

## ВЛИЯНИЕ АМПЛИТУДНЫХ И ФАЗОВЫХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА НА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

© Л.В.Красичков

Одним из важных приложений нелинейной динамики является создание и развитие методов оценки поведения динамических систем, демонстрирующих сложнопериодическое и хаотическое поведение, по измерениям одной переменной состояния (реализации). Такие методы позволяют восстановить поведение динамической системы в псевдофазовом пространстве, оценить размерность и другие характеристики (см. [1,2]). Однако широкое применение данных методов ограничено, так как в большинстве экспериментальных случаев исследуемые реализации представляют собой смесь детерминированного сигнала, характеристики которого необходимо оценить, и шума. Применение фильтров для выделения детерминированного сигнала на фоне шумов не всегда возможно, поскольку даже линейная фильтрация хаотического сигнала, при отсутствии шума, приводит, как известно, к усложнению исходного хаотического сигнала (увеличению размерности [3-6] и усложнению структуры [4,7,8] аттрактора колебаний на выходе фильтра). Причины такого усложнения остаются до конца не выясненными. Таким образом, выявление механизмов усложнения хаотических колебаний линейными фильтрами, а также поиск процедур фильтрации, приводящих к минимально возможному усложнению исходных хаотических колебаний [9,10], является актуальным.

В данной работе исследуется влияние вида амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик (АЧХ и ФЧХ) простейших фильтров на преобразование *детерминированных* хаотических колебаний. Для того чтобы задавать вид АЧХ и ФЧХ независимо друг от друга, в данной работе осуществляется процедура фильтрации в "частотной области" на основе преобразования Фурье:

$$u(t) = F^* \left( H(\omega) \cdot F(x(t)) \right), \quad (1)$$

где  $x(t)$  и  $u(t)$  — сигналы на входе и выходе фильтра,  $F$  и  $F^*$  — прямое и обратное преобразования Фурье,  $H(\omega)$  —

передаточная характеристика фильтра. Процедура (1) реализована на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье по  $2^{18} = 262144$  отсчетам, причем первые и последние  $10^4$  отсчетов выходного сигнала  $u(t)$  исключались из рассмотрения как соответствующие переходному процессу.

Исследование влияния вида ФЧХ фильтра на преобразование хаотических колебаний при неизменной АЧХ проводилось для простейших фильтров низких частот (ФНЧ)

$$H_1(\omega) = \frac{1 - j(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2}, \quad |H_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}},$$

$$\varphi(H_1(\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad (2)$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}},$$

$$|H_2(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}}, \quad \varphi(H_2(\omega)) = 0, \quad (3)$$

$$H_3(\omega) = -\frac{(1/\sqrt{2})(1 + j)}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}},$$

$$|H_3(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}}, \quad \varphi(H_3(\omega)) = \frac{\pi}{4}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  — частота среза фильтра,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $|H(\omega)|$  — АЧХ фильтра,  $\varphi(H(\omega))$  — ФЧХ фильтра. Нетрудно видеть, что (2) определяет простейший ФНЧ 1-го порядка, описываемый уравнением  $\dot{u} = \alpha(x - u)$  и исследованный в [3,4]. Два других ФНЧ (3), (4) имеют АЧХ, идентичные с АЧХ фильтра (2), и различные ФЧХ, причем ФЧХ фильтров (3) и (4) являются неизменными в диапазоне частот  $[0, \infty)$ .

Хаотические колебания, подаваемые на вход фильтра (1), генерировались системой Ресслера [11]

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + 0.2y, \quad \dot{z} = 0.2 - 4.6z + xz. \quad (5)$$

Реализация  $x$  длиной  $3 \cdot 10^5$  (переходной процесс  $2 \cdot 10^4$  отсчетов исключался из рассмотрения) отсчетов получена интегрированием уравнений (5) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом по времени  $dt = 0.04$  и использовалась во всех численных экспериментах с фильтрами, описанными в данной работе.

Анализ колебаний на выходе фильтров  $u(t)$  проводился путем сопоставления отображений последования  $(r(i), r(i+1))$ , где  $\{r(i)\}_{i=1}^M = \min\{u(t)\}$ . Анализ отображений последования для простых систем, подобных рассматриваемой, является предпочтительным по сравнению с оценкой количественных характеристик, поскольку является наиболее наглядным. Отображение последования для реализации системы Реслера (5) имеет вид квадратичной параболы (см., например, [12]) и подобно изображенному на рис. 1, а, б (левая колонка). Отображения последования, рассчитанные для сигналов на выходе фильтров (1)–(4), представле-

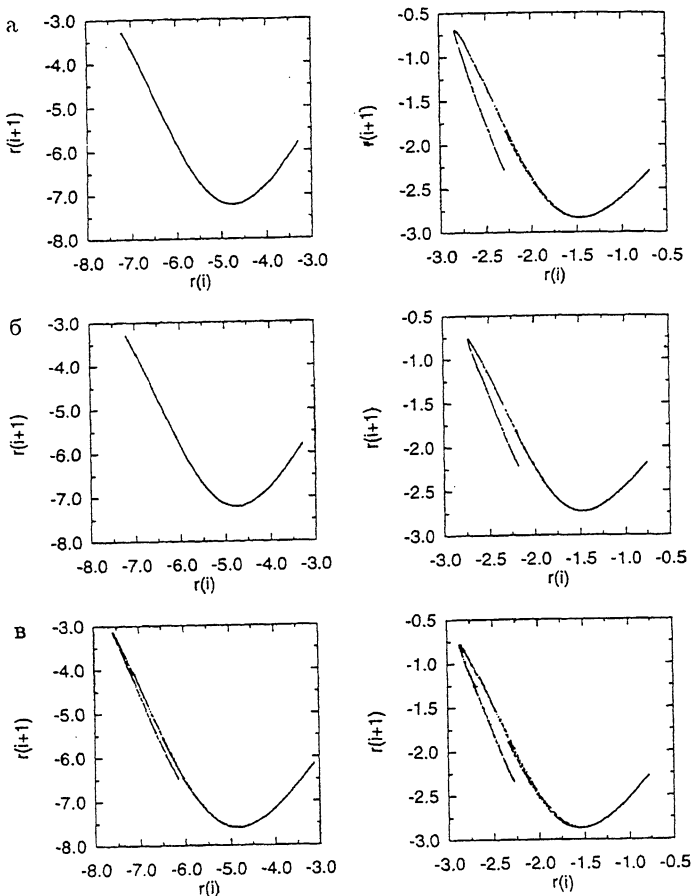


Рис. 1. Отображения последования ( $M = 1400$ ) сигнала на выходе ФНЧ, определяемого  $H_1(\omega)$  (а),  $H_2(\omega)$  (б),  $H_3(\omega)$  (в). Частота среза фильтров  $\alpha = 5.0$  (левая колонка) и  $\alpha = 0.4$  (правая колонка).

ны на рис. 1. В том случае, когда частота среза фильтра  $\alpha = 5.0$ , т. е. значительно превышает основную частоту колебаний системы Ресслера ( $\omega_0 \approx 1.08$ ), расслоение исходной параболы отображения последования заметно только для фильтра, определяемого  $H_3$ , вносящего постоянный, отличный от нуля фазовый сдвиг ( $\varphi(H_3(\omega)) = \pi/4$ ) (рис. 1, *в*, левая колонка). Отображения последования для фильтров, определяемых  $H_1$  и  $H_2$  и вносящих незначительный фазовый сдвиг, практически не изменяются по сравнению с отображением последования для  $x(t)$ . При  $\alpha = 0.4$  расслоение параболы наблюдается для всех фильтров (2)–(4) (рис. 1, правая колонка), причем расслоение наиболее заметно для фильтра, имеющего  $\varphi(H_3(\omega)) = \pi/4$ . Расслоение параболы отображения последования ( $\alpha = 0.4$ ) является наименьшим для фильтра с нулевым фазовым сдвигом (рис. 1, *б*, правая колонка). Численные эксперименты, проведенные для фильтров типа (1)–(4) при других значениях фазового сдвига в диапазоне  $[0, \pi/2)$ , подтверждают выявленную закономерность, т. е. для фильтров, вносящих больший постоянный фазовый сдвиг, наблюдается более значительное расслоение параболы отображения последования.

Рассмотрим, какое влияние оказывает ФЧХ фильтра (при постоянной в диапазоне частот  $[0, \infty)$  АЧХ) на преобразование хаотических колебаний. С этой целью исследовался фазовый фильтр

$$H_4(\omega) = \frac{1 + j(\omega/\alpha)}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}},$$

$$|H_4(\omega)| = 1, \quad \varphi(H_4(\omega)) = \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (6)$$

ФЧХ фазового фильтра (6) имеет такой вид, что большим значениям  $\alpha > 2$  соответствует меньший фазовый сдвиг на частотах, близких к основной частоте колебаний системы Ресслера  $\omega_0$ . Именно при таких значениях  $\alpha$  фазовый фильтр не приводит к заметному расслоению исходной параболы отображения последования (рис. 2, *а*). Расслоение параболы наблюдается при  $\alpha < 2$ , т. е. когда фильтр приводит к значительному фазовому сдвигу на частотах вблизи основной частоты колебаний  $\omega_0$  (рис. 2, *б*, *в*). На рис. 2, *в* видно, что происходит многократное расслоение параболы и возникает фрактальная структура, наблюдаемая ранее для цифровых фильтров [8].

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что хаотические колебания усложняются при

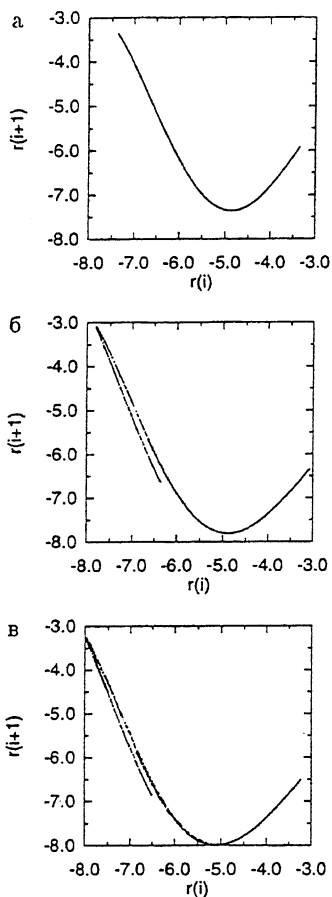


Рис. 2. Отображения последования ( $M = 1400$ ) сигнала на выходе фазового фильтра, определяемого  $H_4(\omega)$  для  $\alpha = 5.0$  (а),  $\alpha = 0.4$  (б),  $\alpha = 0.05$  (в).

прохождении через линейный ФНЧ, обладающий только амплитудно-частотными свойствами ( $\varphi(H(\omega)) = 0$ ). ФНЧ с ненулевым фазовым сдвигом приводит к более значительному усложнению хаотических колебаний (структуры странного аттрактора) на выходе фильтра. Наличие фазовых свойств у линейного преобразования при постоянной АЧХ ( $|H(\omega)| = 1$ ) (фазовый фильтр) также приводит к усложнению хаотических колебаний, причем чем больше величина фазового сдвига, тем более значительным является усложнение. Таким образом, фильтры низких частот, приводящие к минимально возможному усложнению хаотических коле-

баний, должны обладать ФЧХ, как можно более близкой к нулю. Наиболее предпочтительными являются ФНЧ с  $\varphi(\tilde{H}(\omega)) = 0$ .

Автор выражает благодарность профессору Д.И. Трубецкову за полезные замечания по тексту статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-02-16753).

### Список литературы

- [1] *Interpretation of Time Series from Nonlinear Systems* / Eds. P.G. Drazin, G.P. King // *Physica D*. 1992. V. 58.
- [2] Андрушкевич А.В., Купчатов Ф.Ф., Красичков Л.В., Митрофанов А.П., Трубецков Д.И. // Физика. Сб. статей (Программа "Университеты России") / Под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Садовниченко. М.: МГУ, 1994. С. 32-40.
- [3] Badii R., Broggi G., Derighetti B., Ravani M., Cliberto S., Politi A., Rubio M.A. // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 60. N 11. P. 979-982.
- [4] Mitschke F., Möller M., Lange W. // *Phys. Rev. A*. 1988. V. 37. N 11. P. 4518-4521.
- [5] Купчатов А.А., Красичков Л.В., Андрушкевич А.В. // Докл. Международн. семинара по нелинейным цепям и системам. М., 1992. Т. 2. С. 308-317.
- [6] Lawkins W.F., Daw C.S., Downing D.J., Clapp N.E. // *Phys. Rev. E*. 1993. V. 47. N 4. P. 2520-2535.
- [7] Купчатов А.А., Красичков Л.В. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 17. С. 68-71.
- [8] Купчатов А.А., Красичков Л.В. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 4. С. 1-6.
- [9] Mitschke F. // *Phys. Rev. A*. 1990. V. 41. N 2. P. 1169-1171.
- [10] Rapp P.E., Albano A.M., Schmah T.I., Farwell L.A. // *Phys. Rev. E*. 1993. V. 47. N 4. P. 2289-2297.
- [11] Rössler O.E. // *Phys. Lett. A*. 1976. V. 57. N 5. P. 397-398.
- [12] Kipchatov A.A., Krasichkov L.V. // In: the Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Chaos / Ed. by Aizawa Y., Saito S., Shiraiwa K. Singapore: World Scientific, 1995. V. 2. P. 359-362.

Саратовский  
государственный университет  
им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию  
26 июля 1996 г.