

01;09

АВТОКОЛЕБАНИЯ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРСНОЙ ВОЛНЫ И БЕЗДИСПЕРСНОЙ ВОЛНЫ С КУБИЧНОЙ ФАЗОВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© А.П. Четвериков

1. В исследованиях взаимодействия электромагнитных волн в волноводах с волнами в потоках электронов одной из простейших теоретических моделей является модель взаимодействия двух волн со следующими свойствами: одна из волн — линейная, но обладает элементарной дисперсией и диссипацией, другая — бездисперсная, но с кубичной фазовой нелинейностью. В частности, такая модель служит асимптотической для отдельных режимов некоторых сверхвысокочастотных электронных генераторов на быстрых волнах, основанных на взаимодействии потока неизохронных электронов-осцилляторов с волноводной модой вблизи ее критической частоты (см., например, [1]). Она может рассматриваться как одно из простых обобщений элементарной модели взаимодействия двух простых волн с положительной и отрицательной энергиями [2], а с другой стороны — интерпретироваться как частное обобщение модели, описываемой уравнением Гинзбурга-Ландау [3], для случая активной среды с движущимися источниками [1]. В настоящей работе представлен краткий обзор характерных стационарных состояний такой распределенной автоколебательной системы и бифуркационных переходов между ними на параметрической плоскости двух основных параметров.

2. Модель описывается системой двух уравнений в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + j \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \Theta F = j A^2 I, \quad [4,5] \quad (1)$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial I}{\partial \tau} + \frac{\partial I}{\partial \xi} + j(\delta \pm |I|^2)I = -j A F. \quad [1,6] \quad (2)$$

Здесь F и I — комплексные амплитуды линейной и нелинейной волн соответственно (в реальной системе они являются медленными амплитудами электромагнитной и электронной волн), τ и ξ — время и координата, A и δ — параметры

связи и линейной расстройке волн соответственно (основные бифуркационные параметры системы), Θ — параметр диссипации, V — скорость бездисперсной волны. Все переменные и параметры безразмерные. Знак “—” соответствует в реальной системе взаимодействию волн у нижней критической частоты, “+” — у верхней (в периодическом волновом поле¹). Взаимодействие предполагается происходящим в ограниченном пространстве $0 \leq \xi \leq 1$, на концах которого выполняются следующие граничные условия:

$$I(\tau)|_{\xi=0} = 0; \left(F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{j\pi}} \int_0^\tau \frac{e^{-\Theta(\tau-\tau')}}{\sqrt{\tau-\tau'}} \frac{\partial F(\tau')}{\partial \xi} d\tau' \right)_{\xi=0}; \quad (3)$$

$$\left(F(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{j\pi}} \int_0^\tau \frac{e^{-\Theta(\tau-\tau')}}{\sqrt{\tau-\tau'}} \frac{\partial F(\tau')}{\partial \xi} d\tau' \right)_{\xi=1}$$

Первое из них свидетельствует о том, что движущаяся активная среда не возмущена на входе ($\xi = 0$) пространства взаимодействия, а два других соответствуют условиям излучения [4]². Начальные условия задаются в виде $F(\xi)_{\tau=0} = F^0(\xi)$, $I(\xi)_{\tau=0} = I^0(\xi)$, где случайные функции F^0 и I^0 имитируют начальные флуктуации.

3. Система самовозбуждается, если значение параметра A превышает стартовое значение $A_{st}(\delta, V, \Theta)$. На рис. 1, 2 показана зависимость $A_{st}(\delta)$, рассчитанная на основе линейной теории [7] при фиксированных характерных значениях $V = 5$ и $\Theta = 1$, использованных также при расчете нелинейных режимов.

4. Стационарные автоколебательные режимы системы и бифуркационные переходы между ними исследовались в компьютерных экспериментах, проведенных с помощью

¹ В исходной системе уравнений разница между двумя этими ситуациями определяется разными знаками перед пространственной производной в уравнении (1) при неизменном знаке “—” в уравнении (2), соответствующем реальному закону изменения частоты электрона-осциллятора при изменении энергии. Однако заменой переменных система уравнений может быть приведена к используемой выше форме, наглядно демонстрирующей идентичность линейных процессов в обоих случаях, а также более удобной для численного моделирования.

² В реальной системе необходимо учитывать частотную зависимость коэффициентов отражения электромагнитной волны на концах системы, например в форме [5]. Используемые выше граничные условия, не содержащие дополнительных параметров, более идеализированные и могут рассматриваться как асимптотические.

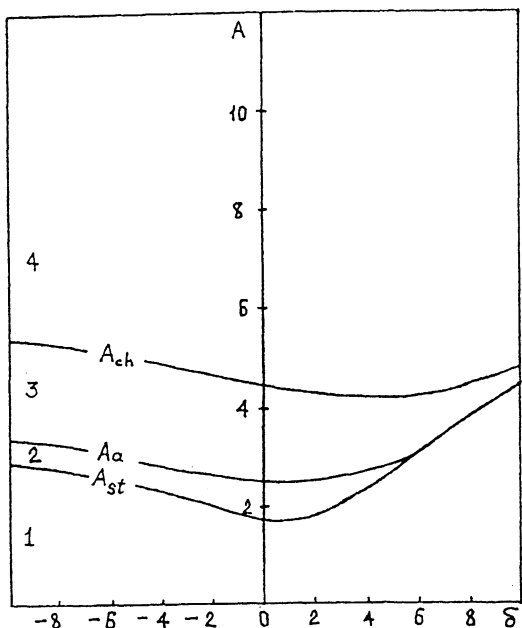


Рис. 1. Карта автоколебательных режимов системы на плоскости параметров (A, δ) вблизи нижней критической частоты. $V = 5$, $\Theta = 1$. Отмечены области отсутствия автоколебаний (1) и реализации одночастотных (2), многочастотных периодических (3) и хаотических (4) автоколебаний, разделенные бифуркационными линиями.

программы, основанной на неявной сеточной схеме второго порядка. Идентификация режимов осуществлялась в результате анализа статистических характеристик [8], рассчитанных для временных реализаций $F_0(\tau) = |F(\tau, \xi = 0)|$ и $F_1(\tau) = |F(\tau, \xi = 1)|$, а также эволюции трехмерных распределений $|F(\xi, \tau)|$ и $|I(\xi, \tau)|$.

5. Вблизи нижней критической частоты карта автоколебательных режимов на плоскости (A, δ) имеет довольно простое устройство (рис. 1). При больших отрицательных значениях δ с увеличением $A > A_{st}$ наблюдается характерная смена режимов от одночастотного до хаотического с преобладающим возбуждением встречной компоненты линейной волны и значениями бифуркационных параметров, близкими к соответствующим значениям в модели взаимодействия встречных волн [9]. При больших значениях A характерно возбуждение "многогорбых" пространственных распределений амплитуд обеих мод из-за быстрого изменения вследствие развития нелинейных эффектов фазы нели-

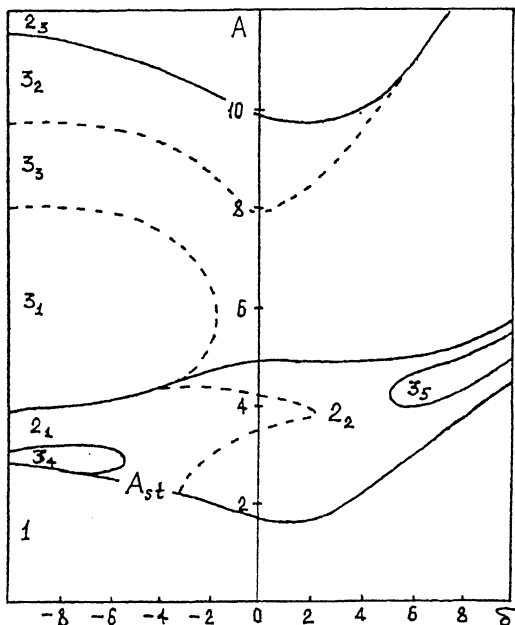


Рис. 2. Карта автоколебательных режимов системы на плоскости параметров (A, δ) вблизи верхней критической частоты. $V = 5, \Theta = 1$. Отмечены области отсутствия автоколебаний (1) и реализации одночастотных (2_1-2_3) и многочастотных периодических (3_1-3_5) автоколебаний, разделенные бифуркационными линиями (сплошные линии). Выделены области с преобладающим одночастотным возбуждением неволновой моды ($2_2, 2_3$) и стоячей двухгорбой (2_1), а также области многочастотных колебаний за счет конкуренции неволновой и стоячей мод ($3_2, 3_3, 3_4, 3_5$) и разных стоячих мод между собой (3_1).

нейной волны [9]. При $\delta \approx 0$ в стационарных пространственных распределениях $|F(\xi, \tau)|$ также преобладает встречная волна, хотя на линейной стадии переходного процесса из начальных флуктуаций выделяется линейная мода, топологически подобная односторонней стоячей волне. Это связано с тем, что с увеличением амплитуды I "нелинейное эффективное" значение параметра расстройки $\delta_{eff} = \delta - \int_0^1 |I|^2 d\xi$ уменьшается и возникает ситуация, аналогичная отмеченной выше. При $\delta > 0$ значение A_{st} с ростом δ быстро растет из-за ухудшения связи волн. Но в области $A > A_{st}$ амплитуда возникающих волн большая, поэтому одночастотный режим теряет устойчивость примерно при том же значении параметра A_a , что и при $\delta \approx 0$. В результате область реализации режима одночастотных колебаний су-

жается и затем исчезает. Аналогичную эволюцию претерпевает область реализации периодических многочастотных автоколебаний ($A_a < A < A_{ch}$) при дальнейшем увеличении параметра δ . Поэтому при изменении бифуркационного параметра A возможно мягкое возбуждение хаотических автоколебаний ($A > A_{ch}$), минуя стадию установления периодических. Характеристики хаотических автоколебаний в этой области отличаются от аналогичных характеристик режимов с превалирующим возбуждением встречной компоненты линейной волны, однако этот вопрос требует специального обсуждения.

6. Вблизи верхней критической частоты доминирующим эффектом является тенденция установления режимов с временным и пространственным спектрами функции $|F(\xi, \tau)|$, сосредоточенными около точки ($\Omega \approx 0, h \approx 0$), включая режим с неволновым пространственным распределением $|F(\xi, \tau)|$ при $\Omega \leq 0^3$ ($F, I \exp(j\Omega\tau - jh\xi)$). Для таких структур характерен малый поток энергии линейной волны, в которую трансформируется энергия волны активной среды. Поэтому принципиальна величина диссипации, за счет которой обеспечивается единственный сток энергии. В зависимости от величины Θ в пространственном распределении $|F(\xi)|$ может превалировать стоячая волна с определенным количеством горбов или "неволновая" мода (рис. 2). Первое характерно для достаточно больших значений $|\delta|$ и ограниченных значений A , второе — в области вблизи малых значений δ , а также при больших A вне зависимости от значения параметра δ (область \mathcal{Z}_3 на рис. 2). В последнем случае амплитуда "неволновой" моды столь велика, что она "заваливает" все другие возбуждающиеся из начальных шумов структуры. Область многочастотных периодических колебаний, обязанных своим существованием конкуренции описанных структур, ограничена и "зажата" между \mathcal{Z}_3 и $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$. Хаотические автоколебания в системе вообще не наблюдаются. На карта режимов имеет в этом случае более сложное строение, хотя возбуждающиеся пространственные структуры проще, чем вблизи нижней критической частоты.

Список литературы

- [1] Четвериков А.П. // Изв. АН. Сер. Физическая. 1994. Т. 58. С. 171–178.
- [2] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [3] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

³ Такие режимы наиболее близки к устанавливающимся в модели, описываемой уравнением Гинзбурга–Ландау [3].

- [4] *Ginzburg N.S., Nusinovich G.S., Zavolsky N.A.* // Int. J. Electronics. 1986. V. 61. P. 881-894.
- [5] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. С. 1575-1583.
- [6] *Chetverikov A.P.* // Proc. of Workshop "Nonlinear Dynamics of Electronic Systems". Poland, Krakov: Univ. of Mining and Metallurgy, 1994. P. 3-7.
- [7] *Chetverikov A.P., Konevets A.E.* // Proc. of 17th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves. Pasadene. Proc. SPIE. 1992. P. 400-401.
- [8] *Анищенко В.С., Сапарин П.И., Сафонова М.А.* // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. С. 467-478.
- [9] *Четвериков А.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. С. 46-55.

Поступило в Редакцию
23 августа 1996 г.

Саратовский
государственный
университет
им. Н.Г. Чернышевского