УК 538.913 –405

УЧЕТ ПРОДОЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ ФОНОНОВ ДВУХУРОВНЕВЫМИ СИСТЕМАМИ

Б. И. Кочелаев, А. Е. Соловьев

Методом функций Грина исследовано поведение колебательного спектра неидеального кристалла при различных концентрациях примесных двухуровневых систем. Найдены границы применимости линейного приближения по концентрации. Рассмотрены характер элементарных возбуждений и затухание звука в такой системе.

При исследовании спектров элементарных возбуждений в кристаллах с примесями особый интерес вызывает поведение колебательного спектра при достаточно высокой концентрации примесей, когда могут возникать коллективные возбуждения. Такого рода исследования проводились для широкого класса неупорядоченных систем [1-3]. Во всех этих случаях удалось указать некую характерную концентрацию, ниже которой примеси считаются независимыми и все эффекты линейны по концентрации.

Если примесью является система с внутренними степенями свободы, в частности двухуровневая система, то возникает резонансное рассеяние фононов с частотами, близкими к собственной частоте примеси. При низких концентрациях такое рассеяние приводит к образованию квазилокальных колебаний вокруг примеси. В работе [4] методом двухвременных функций Грина были вычислены ширина и сдвиг частоты квазилокального колебания, изменение спектральной плотности вблизи собственной частоты двухуровневой системы. В пределе высоких концентраций рассеяние приобретает когерентный характер, происходит существенная перестройка спектра, сильно меняется плотность колебаний. Возникающие при этом смешанные примесно-фононные моды также широко исследовались теоретически и экспериментально [5-7].

Представляет интерес рассмотреть изменение характера рассеяния фононов при повышении концентрации двухуровневых систем, т. е. при переходе от картины квазилокальных колебаний к смешанным модам. Этот вопрос уже обсуждался в работах [8, 9], но там, как и в [4], вычисления проводились в пренебрежении флуктуациями разности заселенностей двухуровневой системы (или флуктуациями продольной компоненты спина на языке спиновых операторов). Однако разными авторами было показано, что учет флуктуаций приводит к появлению конечного времени жизни смешанных мод при высоких концентрациях и к иной температурной зависимости ширины и сдвига частоты квазилокального колебания при низких концентрациях. В данной работе сделана попытка учесть эти флуктуации при изучении процессов рассеяния фононов двухуровневыми системами.

Рассмотрим кристалл из N атомов, содержащий N_s двухуровневых систем, так что относительная концентрация $c=N_s/N$. Двухуровневую систему будем описывать с помощью эффективного спина $S=1/2$, взаимодействие с решеткой линейно по фононным операторам. Гамильтониан системы имеет вид ($\hbar=1$)

$$\hat{H}=\omega_0\sum_j S^z_j+\sum_{\mathbf{k}\sigma}\omega_{\mathbf{k}\sigma}b^+_{\mathbf{k}\sigma}b_{\mathbf{k}\sigma}+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\sigma j}A_{\mathbf{k}\sigma}e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_j}2S^x_j\left(b_{\mathbf{k}\sigma}+b^+_{-\mathbf{k}\sigma}\right). \tag{1}$$

Здесь S^z_j, S_j — компоненты спиновых операторов на j-м узле; ω_0 — частота перехода в двухуровневой системе; $b_{\mathbf{k}\sigma}$, $b^+_{\mathbf{k}\sigma}$ — операторы уничтожения и рождения фонона с волновым вектором $\mathbf{k}$, поляризацией σ; $\omega_{\mathbf{k}\sigma}$ — частота фонона. Сумма по j ведется по узлам, занятым примесями.

В дальнейшем рассмотрении можно, следуя [7, 9], опустить суммирование по σ. Константу взаимодействия запишем в виде

$$A_{\mathbf{k}}=\varkappa\left(\omega_0\omega_{\mathbf{k}}/4\right)^{1/2},$$

$\varkappa$ — безразмерный параметр. Введем фононную функцию Грина

$$D_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(t-t')=-i\theta(t-t')\left\langle\left[B_{\mathbf{k}}(t),\ B_{-\mathbf{k}'}(t')\right]\right\rangle=\langle\langle B_{\mathbf{k}};\ B_{-\mathbf{k}'}\rangle\rangle,$$

где $B_{\mathbf{k}}=b_{\mathbf{k}}+b^+_{-\mathbf{k}}$, $B_{\mathbf{k}}(t)$ — оператор в гейзенберговском представлении, $\langle\ldots\rangle$ — усреднение по равновесному каноническому распределению. Переходя обычным образом к Фурье-представлению, запишем уравнение движения для функции Грина [10]

$$E\langle\langle A;\ B\rangle\rangle_E=\langle[A,\ B]\rangle+\langle\langle[A,\ \hat{H}];\ B\rangle\rangle_E.$$

Учитывая явный вид гамильтониана (1), получим

$$\left(E^2-\omega^2_{\mathbf{k}}\right)D_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(E)=2\omega_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}+2\omega_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j A_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_j}\langle\langle 2S^x_j;\ B_{-\mathbf{k}'}\rangle\rangle.$$

Записав затем уравнение движения для $\langle\langle 2S^x_j;\ B_{-\mathbf{k}'}\rangle\rangle$, можно замкнуть цепочку уравнений, произведя расцепление возникающей в следующем порядке функции Грина по правилу

$$\langle\langle S^z_j B_{\mathbf{k}''};\ B_{-\mathbf{k}'}\rangle\rangle\simeq\langle S^z_j\rangle D_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}'}(E). \tag{2}$$

Однако такая процедура исключает из рассмотрения флуктуации продольной компоненты спина. Для малых концентраций это приводит к результатам, не согласующимся с теорией возмущений. При высоких концентрациях оказываются неучтенными эффекты, связанные с рассеянием смешанных мод на флуктуациях продольной компоненты спина. Поэтому поступим несколько иначе. Используя свойства симметрии функций Грина, имеем

$$\langle\langle 2S^x_j;\ B_{-\mathbf{k}'}\rangle\rangle_E=\langle\langle B_{-\mathbf{k}'};\ 2S^x_j\rangle\rangle_{-E}.$$

Для полученной справа функции можно написать уравнение движения, а затем сменить знак у E

$$\left(E^2-\omega^2_{\mathbf{k}'}\right)\langle\langle B_{-\mathbf{k}'};\ 2S^x_j\rangle\rangle_{-E}=2\omega_{\mathbf{k}'}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j'}A_{\mathbf{k}'}e^{i\mathbf{k}'\mathbf{R}_{j'}}\langle\langle 2S^x_{j'};\ 2S^x_j\rangle\rangle_{-E}.$$

Тогда для $D_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(E)$ найдем

$$D_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(E)=\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{E^2-\omega^2_{\mathbf{k}}}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}+\frac{1}{N}A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}'}\times$$

$$\times\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{E^2-\omega^2_{\mathbf{k}}}\,\frac{2\omega_{\mathbf{k}'}}{E^2-\omega^2_{\mathbf{k}'}}\sum_{jj'}e^{-i\left(\mathbf{k}'\mathbf{R}_{j'}-\mathbf{k}\mathbf{R}_j\right)}\langle\langle 2S^x_j;\ 2S^x_{j'}\rangle\rangle. \tag{3}$$

В свою очередь функция $\langle\langle 2S^x_j;\ 2S^x_{j'}\rangle\rangle$ может быть найдена из уравнений движения

$$\langle\langle 2S_j^x;\ 2S_{j'}^x\rangle\rangle = \frac{2\omega_0\, th\,(\beta\omega_0/2)}{E^2-\omega_0^2-2EM(E)}\Big\{\delta_{j,\,j'}+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^2 D_{\mathbf{k}}^0(E)\sum_{m\neq j} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_j-\mathbf{R}_m)}\langle\langle 2S_m^x;\ 2S_{j'}^x\rangle\rangle\Big\},\quad \beta=1/k_Б T, \tag{4}$$

где $D_{\mathbf{k}}^0(E)=2\omega_{\mathbf{k}}/(E^2-\omega_{\mathbf{k}}^2)$ — фононная функция Грина идеального кристалла,

$$M(E)=\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^2 \operatorname{cth}\frac{\beta\omega_{\mathbf{k}}}{2}\left\{\frac{1}{E+\omega_{\mathbf{k}}}+\frac{1}{E-\omega_{\mathbf{k}}}\right\}.$$

Мнимая часть массового оператора после замены $E\to\omega+i0_+$ дает ширину перехода изолированного спина, взаимодействующего с фононной системой

$$\Gamma_{SL}=\frac{3}{4}\pi\varkappa^2\omega_0\left(\frac{\omega_0}{\omega_D}\right)^3\operatorname{cth}\frac{\beta\omega_0}{2}. \tag{5}$$

При выводе уравнения (4) были сделаны приближения, состоящие в замене возникающих гриновских функций на более простые по правилу [5]

$$\langle\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}'} 2S_m^x;\ 2S_{j'}^x\rangle\rangle \simeq \delta_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}\rangle\langle\langle 2S_m^x;\ 2S_{j'}^x\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle S_i^z 2S_m^x;\ 2S_{j'}^x\rangle\rangle \simeq \langle S_i^z\rangle\langle\langle 2S_m^x;\ 2S_{j'}^x\rangle\rangle,\ m\neq i.$$

Уравнение (4) решается методом итераций. Далее необходимо произвести усреднение по конфигурациям примесей. Используя методы теории неупорядоченных систем [12], можно получить для Фурье-образа спиновой функции Грина

$$G_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}(E)=\frac{1}{N}\sum_{j,\,j'} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{R}_{j'}-\mathbf{k}\mathbf{R}_j)}\langle\langle 2S_j^x;\ 2S_{j'}^x\rangle\rangle$$

следующее выражение:

$$G_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}=\delta_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}\frac{G(E)}{1-A_{\mathbf{k}}^2 D_{\mathbf{k}}^0(E)\,G(E)}, \tag{6}$$

$$G(E)=c2\omega_0\operatorname{th}(\beta\omega_0/2)/[E^2-\omega_0^2-2EM_1(E)]$$

— спиновая функция Грина с $\mathbf{k}=0$,

$$M_1(E)=M(E)-c\operatorname{th}\frac{\beta\omega_0}{2}\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^2 D_{\mathbf{k}}^0(E).$$

С помощью (6) можно найти фононную функцию Грина $D_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Из (3) получим

$$D_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}=\delta_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}\frac{D_{\mathbf{k}}^0(E)}{1-A_{\mathbf{k}}^2 D_{\mathbf{k}}^0(E)\,G(E)}. \tag{7}$$

Далее удобно перейти к квадратам частот $\varepsilon=E^2$. С помощью (7) можно получить спектральную плотность колебаний, определяемую как [1]

$$\rho(\varepsilon)=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\operatorname{Im}\frac{D_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}}(\varepsilon+i\gamma)_{\gamma\to 0}}{2\omega_{\mathbf{k}}}. \tag{8}$$

Выражение для фононной функции Грина имеет вид

$$D_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}}(\varepsilon+i\gamma)=2\omega_{\mathbf{k}}/[\varepsilon-\varepsilon_{\mathbf{k}}-\Delta\varepsilon_{\mathbf{k}}/(\varepsilon-\bar{\varepsilon}_0+i\Gamma)], \tag{9}$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}=\omega_{\mathbf{k}}^2,\quad \varepsilon_0=\omega_0^2+2\omega_0\operatorname{Re}M_1(\omega_0),$$
$$\Delta=c\varkappa^2\omega_0^2\operatorname{th}(\beta\omega_0/2),\quad \bar{\varepsilon}_0=\varepsilon_0+\Delta,\quad \Gamma=2\omega_0\Gamma_{SL},\quad \Gamma_{SL}=\operatorname{Im}M_1(\omega_0).$$

Рассмотрим для начала случай $\Gamma=0$. Полюса функции Грина определяются из уравнения

$$(\varepsilon-\bar{\varepsilon}_0)(\varepsilon-\varepsilon_{\mathbf{k}})-\Delta\varepsilon_{\mathbf{k}}=0, \tag{10}$$

дающего известный закон дисперсии Джекобсена—Стивенса для смешанных мод. Решениями будут две частоты $\varepsilon_1(\mathbf{k})$ и $\varepsilon_2(\mathbf{k})$, описывающие две ветви элементарных возбуждений. Представив знаменатель $D_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\varepsilon)$ в виде $(\varepsilon-\varepsilon_1(\mathbf{k}))(\varepsilon-\varepsilon_2(\mathbf{k}))$, мы можем разложить $D_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ на простые дроби, в результате чего получим

$$D_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\varepsilon)=f_1(\mathbf{k})\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_1(\mathbf{k})}+f_2(\mathbf{k})\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_2(\mathbf{k})},$$

где $f_i(\mathbf{k})=(\varepsilon_i(\mathbf{k})-\varepsilon_0)/(\varepsilon_i(\mathbf{k})-\varepsilon_j(\mathbf{k}))$ — введенная в [5] доля фононов в i-й ветви смешанных мод. Тогда плотность колебаний будет

$$\rho(\varepsilon)=\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{i=1,2}f_i(\mathbf{k})\,\delta(\varepsilon-\varepsilon_i(\mathbf{k})).$$

Из выражения (10) следует, что

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon\left[(\varepsilon-\bar{\varepsilon}_0)/(\varepsilon-\varepsilon_0)\right].\tag{11}$$

Так как $\varepsilon_{\mathbf{k}}>0$, то $\varepsilon>\bar{\varepsilon}_0$ и $\varepsilon<\varepsilon_0$. Это свидетельствует о наличии в спектре возбуждений щели величиной Δ.

Переходя от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию, получим

$$\rho(\varepsilon)=3\frac{k^2}{k_D^3}f_i(\mathbf{k})\frac{dk}{d\varepsilon_i(\mathbf{k})}\bigg|_{\varepsilon_i(\mathbf{k})=\varepsilon}.$$

Поскольку $k=\omega_{\mathbf{k}}/v$, где v — скорость звука, а $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ связано с ε формулой (11), можно найти k, $f_i(\mathbf{k})$, $dk/d\varepsilon_i$ как функции ε. Опуская детали вычислений, запишем результат

$$\rho(\varepsilon)=\rho_0(\varepsilon)\left[(\varepsilon-\bar{\varepsilon}_0)/(\varepsilon-\varepsilon_0)\right]^{3/2}.\tag{12}$$

Здесь $\rho_0(\varepsilon)=3\sqrt{\varepsilon}/2\varepsilon_D^{3/2}$ — плотность колебаний идеального кристалла, $\varepsilon_D=\omega_D^2$, ω_D — частота Дебая. Допустимые значения ε определяются из (11) при условии $0<\varepsilon_{\mathbf{k}}<\varepsilon_D$.

В общем случае при нахождении плотности колебаний используем выражение (9) для фононной функции Грина. Тогда для $\rho(\varepsilon)$ получим

$$\rho(\varepsilon)=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{1+z}\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\varepsilon'-\varepsilon_{\mathbf{k}}},$$

где $\varepsilon'=\varepsilon/(1+z)$, $z=\Delta/(\varepsilon-\bar{\varepsilon}_0+i\Gamma)$. В рамках дебаевской модели мы можем вычислить сумму по $\mathbf{k}$ и найти ρ как функцию комплексной величины ε'

$$\rho(\varepsilon')=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{1+z}\frac{3}{\omega_D^3}\left\{-\omega_D+\frac{\sqrt{\varepsilon'}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\varepsilon'}+\omega_D}{\sqrt{\varepsilon'}-\omega_D}\right)\right\}.$$

При $\Gamma\to 0$ это выражение переходит в (12). Если $|z|\ll 1$, то можно разложить ρ по z. В линейном приближении получим

$$\rho(\varepsilon)=\rho_0(\varepsilon)+3\frac{\Delta}{\varepsilon_D}\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma}{(\varepsilon-\bar{\varepsilon}_0)^2+\Gamma^2}.\tag{13}$$

Полученная плотность колебаний имеет типичный вид, описывающий распределение частот при наличии квазилокального уровня в системе. Ширина квазилокального уровня определяется формулой (9) и обусловлена спин-фононным взаимодействием. Можно учесть феноменологически другие механизмы уширения квазилокального уровня (разброс частот ω_0 и другие) путем введения дополнительной ширины Γ_s, так что $\Gamma=2\omega_0(\Gamma_{SL}+\Gamma_S)$.

Отметим, что результат (13) можно получить непосредственно из (3), оставив в правой части только диагональные по узлу спиновые функции Грина (приближение изолированных примесей).

Из предыдущего рассмотрения следует, что приближение изолированных примесей справедливо при $|z| \ll 1$, т. е. при $\Delta/\Gamma \ll 1$. Если Γ определяется только спин-фононным взаимодействием, то это условие дает нам характерную концентрацию c_0, ограничивающую область применения линейного приближения

$$c \ll c_0, \quad c_0 = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_D}\right)^3 \operatorname{cth}^2 \frac{\beta\omega_1}{2}.$$

Рассмотрим спектр элементарных возбуждений с затуханием. Теперь он определяется уравнением

$$(\varepsilon - \varepsilon_0 + i\Gamma)(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}) - \Delta\varepsilon_{\mathbf{k}} = 0, \tag{14}$$

решениями которого будут две комплексные частоты $\omega_1(\mathbf{k})$ и $\omega_2(\mathbf{k})$. Чтобы смешанная примесно-фононная мода могла рассматриваться как бегущая волна, затухание которой мало на длине волны, необходимо выполнение следующего условия:

$$k\,(\partial/\partial k)\,\mathrm{Re}\,\omega_i(\mathbf{k}) \gg \mathrm{Im}\,\omega_i(\mathbf{k}).$$

Для квадратов частот это условие можно переписать в виде

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}\left(\partial/\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}\right)\mathrm{Re}\,\varepsilon_i(\mathbf{k}) \gg \mathrm{Im}\,\varepsilon_i(\mathbf{k}). \tag{15}$$

Это условие особенно актуально для квазиспиновых мод, у которых групповая скорость достаточно мала, а затухание сравнительно велико. С помощью (15) определим границы, внутри которых $\mathbf{k}$ является хорошим волновым числом и может рассматриваться как квазиимпульс. При $\Delta \gg \Gamma$ имеем

$$\varepsilon_{\mathbf{k}\,\min} \simeq (\Gamma/\Delta)\,\varepsilon_0 \ll \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}\,\max} \simeq (\Delta/\Gamma)\,\varepsilon_0 \gg \varepsilon_0,$$

т. е. данный интервал охватывает значительную часть $\mathbf{k}$-спектра. Для обратного случая получим

$$\varepsilon_{\mathbf{k}\,\min} \simeq \varepsilon_0\left(1 - \sqrt{\Delta/\Gamma}\right), \quad \varepsilon_{\mathbf{k}\,\max} = \varepsilon_0\left(1 + \sqrt{\Delta/\Gamma}\right).$$

Таким образом, здесь бегущие волны существуют только вблизи точки $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_0$. Заметим попутно, что при $\Delta \ll \Gamma$ исчезает щель в спектре элементарных возбуждений.

Наконец, используя (14), можно вычислить коэффициент поглощения звука. Для этого нужно найти комплексное решение для k как функцию вещественного ω

$$v^2k^2 = \varepsilon\left\{1 - \Delta\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_0 - i\Gamma}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Gamma^2}\right\}. \tag{16}$$

Если $\Delta \ll \Gamma$, то второе слагаемое в фигурных скобках всегда много меньше единицы. Тогда приближенно получим

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v}\left\{1 - \frac{\Delta}{2}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_0 - i\Gamma}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Gamma^2}\right\}. \tag{17}$$

Действительная часть $k(\omega)$ описывает дисперсию звуковой волны, а мнимая — поглощение звука. Из (17) видно, что $\mathrm{Re}\,k(\omega) \gg \mathrm{Im}\,k(\omega)$, т. е. звуковая волна может распространяться в кристалле. Если же $\Delta \gg \Gamma$, то при частотах, близких к резонансной, может возникнуть ситуация, когда $\mathrm{Im}\,k(\omega) > \mathrm{Re}\,k(\omega)$. Это означает, что вблизи резонансной частоты возникает запрещенная полоса, где прохождение звука невозможно. В спектре элементарных возбуждений появляется интервал частот, где возбуждения не могут быть описаны с помощью волнового вектора.

Суммируя все вышесказанное, мы видим, что отношение Δ/Γ является параметром, определяющим возможность линейного приближения в расчете плотности колебаний, характер элементарных возбуждений в системе, режим поглощения звука в среде с резонансными центрами.

В заключение приведем некоторые значения Δ и Γ, полученные экспериментально для ряда веществ методом неупругого рассеяния нейтронов.

$MgO : Cr^{2+}$ [13]. Хотя константа взаимодействия здесь велика ($\varkappa \sim \sim 10$), имеется большой разброс значений ω_0, так что $\Delta \simeq 0.04$ (ТГц)^2, $\Gamma \simeq 0.28$ (ТГц)^2.

$KCl : CN^-$ [14]. Здесь аналогичная ситуация — при сравнительно сильном взаимодействии величина Γ также значительна. $\Delta \simeq 0.033$ (ТГц)^2, $\Gamma \simeq 0.07$ (ТГц)^2.

$TmVO_4$ [15]. Взаимодействие крамерсова дублета иона Tm с колебаниями решетки является слабым. В то же время приведенное значение Γ может считаться верхним пределом, так как не учтено разрешение прибора. $\Delta = 0.64$ (мэВ)^2, $\Gamma \simeq 0.8$ (мэВ)^2.

Во всех трех случаях отношение Δ/Γ меньше единицы, хотя для двух последних веществ наблюдаются хорошо разрешенные ветви смешанных мод вблизи точки $\varepsilon_k = \varepsilon_0$.

Список литературы

[1] Косевич А. М. Физическая механика реальных кристаллов. Киев, 1981. 328 с.
[2] Иванов М. А. // ФТТ. 1970. Т. 12. № 7. С. 1895—1904.
[3] Ботвинко М. Н., Иванов М. А. // ФТТ. 1986. Т. 28. № 11. С. 3485—3491.
[4] Аминов Н. М., Кочелаев Б. И. // ФТТ. 1969. Т. 11. № 10. С. 2906—2909.
[5] Elliott R. J., Parkinson J. B. // Proc. Phys. Soc. 1967. V. 92. N 4. P. 1024—1039.
[6] Stevens K. W. H., Van Eekelen H. A. M. // Proc. Phys. Soc. 1967. V. 92. N 3. P. 681—696.
[7] Sheard F. W., Toombs G. A. // J. Phys. C: Sol. St. Phys. 1973. V. 6. N 9. P. 1467—1488.
[8] Kokshenev V. B. // Phys. St. Sol. (b) 1980. V. 102. N 1. P. 257—263.
[9] Kavanuma Y., Yamada H., Tanaka S. // J. Phys. Soc. Jap. 1985. V. 54. N 7. P. 2567—2587.
[10] Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М., 1975. 336 с.
[11] Klein M. V. // Phys. Rev. 1969. V. 186. N 3. P. 839—851.
[12] Elliott R. J., Krumhansl J. A., Leath P. L. // Rev. Mod. Phys. 1974. V. 46. N 3. P. 465—544. (Пер. в сб.: Теория и свойства неупорядоченных материалов. М., 1977).
[13] Challis L. J., Fletcher J. R., Jefferies D. J., Sheard F. W., Toombs G. A., de Goer A. M., Hutchings M. T. // Phys. Rev. 1979. V. 19. N 1. P. 296—299.
[14] Wood R. F., Mostoller M. // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. N 13. P. 819—822.
[15] Kjems J. K., Haves W., Smith S. H. // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. N 16. P. 1089—1092.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина
Казань

Поступило в Редакцию
18 июля 1989 г.