УДК 538.221

МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ МАГНЕТИКАХ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Ю. Н. Мицай, Ю. А. Фридман

При помощи диаграммной техники для операторов Хаббарда получено дисперсионное уравнение связанных магнитоупругих волн для магнетиков с геликоидальной магнитной структурой в ферромагнитной фазе при произвольных температурах. Уравнение исследовано в двух температурных интервалах: $T \ll T_c$, $T \to T_c$. Показано, что размягчение поперечной звуковой волны происходит иначе, чем для случая легкоосного ферромагнетика.

Исследование магнитоупругих (МУ) волн в магнетиках является классической областью магнетизма и было начато более тридцати лет назад [1, 2]. Эффекты МУ взаимодействия наиболее сильно проявляются в окрестности спин-переориентационного фазового перехода (ОФП), где параметр МУ связи ξ оказывается равным единице [3].

МУ волны обычно исследуются при низких температурах. Представляет, однако, интерес выяснить температурные зависимости основных характеристик спектра МУ волн, вплоть до температуры Кюри [4].

В ряде магнитоупорядоченных веществ существуют геликоидальные магнитные структуры [5], например в редкоземельных металлах (в частности, в Tb). Причиной возникновения таких структур является конкуренция положительных и отрицательных обменных взаимодействий между соседними и следующими за ними атомами в магнитном кристалле [6].

Наличие геликоидального магнитного порядка приводит к специфическим особенностям спектров МУ волн при низких температурах [7]. В настоящей работе изучается спектр МУ волн при произвольных температурах.

Адекватным аппаратом, позволяющим провести такие исследования, является диаграммная техника для операторов Хаббарда в применении к магнитоупорядоченным веществам [8, 9].

Гамильтониан изучаемой системы выберем в виде

$$\mathcal{H} = -H\sum_f S_f^z - \frac{\beta}{2}\sum_f (S_f^z)^2 - \frac{1}{2}\sum_{f,\,f'} \tilde{\mathcal{J}}(f-f')\,\mathbf{S}_f\mathbf{S}_{f'} + \\ + \nu\sum_f S_f^i S_f^j u_{ij}(f) + \int dr\left\{\frac{\lambda+\eta}{2}(u_{xx}^2+u_{yy}^2+u_{zz}^2) + \eta\,(u_{xz}^2+u_{yz}^2+u_{xy}^2) + \right. \\ \left. + \lambda\,(u_{xx}u_{yy}+u_{xx}u_{zz}+u_{yy}u_{zz})\right\}, \qquad (1)$$

где H — внешнее магнитное поле, параллельное оси Z; $\beta < 0$ — константа анизотропии; S_f^i — спиновый оператор; ν — константа МУ связи; λ, η — модули упругости; $u_{ij}(f)$ — тензор деформаций; $f=(l,\,n)$ — номер узла в кристалле; обменное взаимодействие выбрано следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{J}}(f-f') = \mathcal{J}(n-n')\,\delta_{l,\,l'} - \mathcal{J}_1\delta_{n,\,n'}\delta_{l',\,l+1} + \mathcal{J}_2\delta_{n,\,n'}\delta_{l',\,l+2},$$

n — номер узла в легкой плоскости, (XOY — легкая плоскость); l нумерует узлы вдоль направления z, которое совпадает с волновым вектором спирали. Далее для простоты вычислений будем считать $S=1$; как оказывается, это ограничение не является существенным.

При достаточно больших магнитных полях H реализуется ферромагнитная фаза (магнитный момент направлен вдоль оси z). При полях $H=H_c$ происходит ОФП в состояние ферромагнитной спирали. В полях $H \geqslant H_c$ мы и будем изучать спектр МУ волн. Как оказывается, окончательные ответы при таких полях не зависят от деталей гамильтониана. Поэтому в (1) мы ограничились простейшим видом гамильтониана, для которого реализуется геликоидальная структура.

Выделяя в гамильтониане (1) среднее поле, для одноионного слагаемого получим

$$\mathscr{H}_0 = -\bar{H}\sum_f S_f^z - \frac{\beta}{2}\sum_f (S_f^z)^2 + \frac{\nu}{4}\sum_f \{(u_{xx}-u_{yy}-2iu_{xy})(S_f^+)^2 + $$
$$+ 2u_{zz}(S_f^z)^2 + 2u_z^-(S_f^+S_f^z + S_f^zS_f^+) + \text{э. с.}\}, \tag{2}$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{H} = H + \bar{J}(0)\langle S^z\rangle, \quad u_z^{\pm} = u_{xz} \pm iu_{yz}, \quad S_f^{\pm} = S_f^x \pm iS_f^y, \quad \bar{J}(0) = \sum_f \bar{J}(f-f').$$

На собственных функциях оператора $\mathscr{H}_0$ построим операторы Хаббарда $X_f^{M', M} \equiv |\Psi_f(M')\rangle\langle\Psi_f(M)|$ $(M=-1, 0, 1)$, которые связаны со спиновыми операторами соотношениями [9]

$$S_f^+ = \sum_\alpha \gamma_\perp(\alpha) X_f^\alpha + \sum_M \Gamma_\perp(M) H_f^M, \quad S_f^- = (S_f^+)^+,$$
$$S_f^z = \sum_\alpha \gamma_\parallel(\alpha) X_f^\alpha + \sum_M \Gamma_\parallel(M) H_f^M. \tag{3}$$

Здесь $H^M \equiv X^{M,M}$, $X^{\alpha(p,q)} \equiv X^{p,q}$ — диагональные и недиагональные операторы Хаббарда; α — корневые векторы [8], компоненты которых определяются из коммутационных соотношений

$$[H_f^M, X_f^{p,q}] = (\delta_{M,p} - \delta_{q,M}) X_f^{p,q} = \alpha^M(p, q) X_f^{p,q}.$$

Гамильтониан (2), выраженный через операторы Хаббарда, имеет вид

$$\mathscr{H}_0 = \sum_f \left\{\sum_M p_M H_f^M + \sum_\alpha p_\alpha X_f^\alpha\right\}, \tag{4}$$

где p_M совпадают с энергетическими уровнями E_M магнитного иона, а $p_\alpha \sim \nu$

$$p_1 = E_1 = -\frac{\beta}{2} - \bar{H} + \frac{\nu}{2}(u_{xx} + u_{yy} + 2u_{zz}), \quad p_0 = E_0 = \nu(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$p_{-1} = E_{-1} = -\frac{\beta}{2} + \bar{H} + \frac{\nu}{2}(u_{xx} + u_{yy} + 2u_{zz}).$$

Спонтанные деформации кристалла $u_{ij}^{(0)}(f)$ определяются из условия минимума свободной энергии и равны

$$u_{xx}^{(0)} = u_{yy}^{(0)} = -\frac{b_1\eta + \lambda(b_1 - b_2)}{\eta(\eta + 3\lambda)}, \quad u_{zz}^{(0)} = -\frac{b_2\eta - 2\lambda(b_1 - b_2)}{\eta(\eta + 3\lambda)}, \tag{5}$$
$$u_{ij}^{(0)} = 0, \quad i \neq j,$$
$$b_1 = \nu\frac{\mathrm{ch}(\bar{H}/T) + \exp(-\beta/2T)}{2\,\mathrm{ch}(\bar{H}/T) + \exp(-\beta/2T)}, \quad b_2 = 2\nu\frac{\mathrm{ch}(\bar{H}/T)}{2\,\mathrm{ch}(\bar{H}/T) + \exp(-\beta/2T)}.$$

Тензор деформаций представим в виде $u_{ij}(f) = u_{ij}^{(0)}(f) + u_{ij}^{(1)}(f)$; $u_{ij}^{(0)}(f)$ — спонтанные деформации; $u_{ij}^{(1)}(f)$ — динамическое слагаемое, описывающее колебания кристаллической решетки, которое после квантования приводится к виду

$$u_{ij}^{(1)}(f) = \frac{i}{2}\sum_{q,\lambda} \frac{\exp(iqf)}{\sqrt{2mN\omega_\lambda(q)}} \left(b_{q,\lambda} + b^+_{-q,\lambda}\right)\left(e^i_\lambda(q)\, q_j + e^j_\lambda(q)\, q_i\right), \tag{6}$$

где $b^+_{q,\lambda}$, $b_{q,\lambda}$ — операторы рождения и уничтожения фононов с поляризацией $\lambda = (l, \tau, t)$; m — масса атома; N — число узлов в кристалле; $\mathbf{e}_\lambda(q)$ — единичный вектор поляризации; $\omega_\lambda(q) = c_\lambda q$ — закон дисперсии λ-поляризованного фонона; c_λ — скорость звука.

Выделяя в гамильтониане (4) слагаемые, пропорциональные динамической части тензора деформации, и квантуя их по формуле (6), мы получим гамильтониан, описывающий процессы трансформации магнонов в фононы и обратно

$$\mathscr{H}_{\mathrm{tr}} = \sum_f \left\{\sum_M \mathscr{P}_M H^M_f + \sum_\alpha \mathscr{P}_\alpha X^\alpha_f\right\}, \tag{7}$$

где

$$\mathscr{P}_{M(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{q,\lambda}\left(b_{q,\lambda} + b^+_{-q,\lambda}\right) T^{M(\alpha)}_f(q, \lambda),$$

$T^{M(\alpha)}_f(q, \lambda)$ — амплитуды трансформаций, которые имеют громоздкий вид, поэтому приведем лишь те из них, которые понадобятся в дальнейшем

$$T^{\alpha(1,0)}_f(q, \lambda) = -T^{\alpha(0,-1)}_f(q, \lambda) = \frac{i\nu}{2\sqrt{2}}\, T^0_f(q, \lambda)\left(e^-_\lambda q_z + e^z_\lambda q^-\right),$$

$$T^{\alpha(0,1)}_f(q, \lambda) = -T^{\alpha(-1,0)}_f(q, \lambda) = \frac{i\nu}{2\sqrt{2}}\, T^0_f(q, \lambda)\left(e^+_\lambda q_z + e^z_\lambda q^+\right),$$

$$T^0_f(q, \lambda) = \frac{\exp(iqf)}{\sqrt{2m\omega_\lambda(q)}}, \quad e^\pm_\lambda = e^x_\lambda \pm ie^y_\lambda, \quad q^\pm = q_x \pm iq_y. \tag{8}$$

Как известно, спектр элементарных возбуждений определяется полюсами функции Грина, которую мы определим следующим образом:

$$G^{\alpha\alpha'}(f, \tau; f', \tau') = -\langle \hat{T}\tilde{X}^\alpha_f(\tau)\, \tilde{X}^{-\alpha'}_{f'}(\tau')\rangle,$$

где $\hat{T}$ — оператор Вика, $\tilde{X}^\alpha_f(\tau) = e^{\mathscr{H}\tau}X^\alpha_f e^{-\mathscr{H}\tau}$ — оператор Хаббарда в представлении Гейзенберга; $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{tr}} + \mathscr{H}_{\text{обм}}$; $\mathscr{H}_{\text{обм}}$ — обменная часть гамильтониана (1), которая также записана в терминах операторов Хаббарда.

Дальнейшие вычисления будем проводить в приближении среднего поля, поэтому для определения функции Грина достаточно лишь «поперечной» части обменного гамильтониана [9]

$$\mathscr{H}_{\text{обм}} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ f,f'}} \frac{\mathscr{J}(f - f')}{2} A^{-\alpha}_i B^\beta_i X^\alpha_f X^\beta_{f'}; \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$A^\alpha_1 = 2\gamma_\parallel(\alpha), \quad A^\alpha_2 = \gamma^*_\perp(\alpha), \quad A^\alpha_3 = \gamma_\perp(-\alpha), \quad B^\alpha_1 = \gamma_\parallel(\alpha), \quad B^\alpha_2 = \gamma_\perp(\alpha), \quad B^\alpha_3 = \gamma^*_\perp(-\alpha).$$

Искомая корреляционная функция $G^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n)$ связана с неприводимыми частями $\Sigma^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n)$ [10, 11] и амплитудами трансформаций $T^\alpha(k, \lambda)$ уравнениями типа Ларкина

$$G^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n) = \Sigma^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n) - \frac{\mathscr{J}(k)}{2}\Sigma^{\alpha\alpha_1}(k, \omega_n)\, A^{\gamma_1}_i B^{\alpha_2}_i G^{\gamma_2\alpha'}(k, \omega_n) +$$
$$+ \Sigma^{\alpha\alpha_1}(k, \omega_n)\, T^{-\alpha_1}(k, \lambda)\, D_\lambda(k, \omega_n)\, T^{\alpha_2}(-k, \lambda)\, G^{\alpha_2\alpha'}(k, \omega_n), \tag{9}$$

где $D_\lambda(k, \omega_n) = 2\omega_\lambda(k)\left[\omega_n^2 - \omega_\lambda^2(k)\right]^{-1}$ — функция Грина λ-поляризованного фонона [11], в приближении среднего поля $\Sigma^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n) = \delta_{\alpha\alpha'} b(\alpha)\, G^\alpha_0(\omega_n)$, $G^\alpha_0(\omega_n) = [i\omega_n + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E})]^{-1}$, $b(\alpha) = \langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{H}\rangle_0$.

Уравнения типа (9) без учета МУ связи были получены в [9]. Эти уравнения можно решить благодаря расщепленной зависимости от индекса α, и для МУ волн получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| \delta_{ji} + \frac{\tilde{J}(k)}{2} A_{ji} + \frac{\tilde{J}(k)}{2} \frac{D_\lambda(k, \omega_n)}{1 - Q_{\lambda\lambda'} D_\lambda(k, \omega_n)} d_{j\lambda} \pi_{i\lambda'} \right\| = 0, \tag{10}$$

где

$$A_{ji} = B_j^\alpha \Sigma^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n) A_i^{\alpha'}, \quad d_{j\lambda} = B_j^\alpha \Sigma^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n) T^{-\alpha'}(k, \lambda),$$

$$\pi_{i\lambda} = T^\alpha(-k, \lambda) \Sigma^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n) A_i^{\alpha'}, \quad Q_{\lambda\lambda'} = T^\alpha(-k, \lambda') \Sigma^{\alpha\alpha'}(k, \omega_n) T^{-\alpha'}(k, \lambda).$$

Заметим, что при исследовании дисперсионного уравнения для МУ волн при $S > 1$ получается следующая ситуация. Высшие спины приводят к большему числу спиновых ветвей возбуждений. В дисперсионном уравнении наличие этих ветвей приводит к дополнительному множителю, поскольку звук с высоколежащими спиновыми возбуждениями не взаимодействует. Таким образом, рассматриваемая далее ситуация $S=1$ отличается от $S > 1$ лишь численными множителями в некоторых ответах [4].

Проанализируем уравнение (10) для наиболее интересного случая $k \parallel z$. В такой геометрии отличными от нуля компонентами единичного вектора поляризации являются e_l^z, e_t^x, e_τ^y.

Уравнение (10) рассмотрим в двух температурных интервалах: $T \ll T_c$, $T \to T_c$. Кроме того, предположим, что $\beta \ll \tilde{\mathcal{J}}(0)$.

При $T \ll T_c$ можно ограничиться учетом лишь нижайшего энергетического уровня E_1. Из (10) для спектра квазимагнонов имеем

$$\omega_s(k) = \alpha k^2 + \gamma k^4 + H + \beta/2 + a_0, \tag{11}$$

где

$$a_0 = \frac{\nu^2}{2\eta}, \quad \alpha = 2\mathcal{J}_2 - \frac{\mathcal{J}_1}{2} < 0, \quad \gamma = -\frac{2}{3}\mathcal{J}_2 + \frac{\mathcal{J}_1}{24} > 0.$$

$\omega_s(k)$ имеет минимум при $k_0 = \sqrt{-\alpha/2\gamma}$, а поле ОФП равно $H_c = -\beta/2 + \alpha^2/4\gamma$. Спектр квазимагнонов при $H = H_c$, $\omega_s(k) = \gamma(k^2 - k_0^2)^2 + a_0$, а величина МУ щели равна a_0. Для квазифононных ветвей получаем

$$\omega_1(k) = \omega_l(k), \quad \omega_2(k) = \omega_t^2(k)/\omega_s(k), \quad \omega_3(k) = \omega_s(k) - a_0. \tag{12}$$

Из (12) следует, что при $H = H_c$ и $k \sim k_0$ t-поляризованные квазифононы размягчаются

$$\omega_2(k) = c_t^2 k^2/a_0, \tag{13}$$

а энергия τ-поляризованных квазифононов обращается в нуль при $k = k_0$

$$\omega_3(k) = 4\gamma k_0^2 (k - k_0)^2. \tag{14}$$

При $T \to T_c$ необходимо учитывать все три энергетических уровня магнитного иона E_1, E_0, E_{-1}. При этом мы предполагаем, что $\beta/\mathcal{J}_{(0)}$, $H/\mathcal{J}_{(0)} \ll (T_c - T)/T_c = \tau \ll 1$. Это означает, что мы находимся вне критической области температур. Величина среднего спина $\langle S^z \rangle = 2\sqrt{2\tau/3}$.

Решая уравнение (10), получаем

$$\omega_s(k) = \gamma \langle S^z \rangle (k^2 - k_0^2)^2 + {}^9/_8 a_0 \langle S^z \rangle^3 + H - H_c,$$

$$H_c = \frac{3}{8} \langle S^z \rangle \left(\frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{\gamma} - \beta + \frac{3}{2} a_0 \langle S^z \rangle^2 \right). \tag{15}$$

Спектры квазифононов при $H = H_c$ и $k \sim k_0$ имеют вид

$$\omega_1(k) = \omega_l(k), \quad \omega_2(k) = c_t^2 k^2/(9/8) a_0 \langle S^z \rangle^3, \quad \omega_3(k) = 4\gamma \langle S^z \rangle k_0^2 (k - k_0)^2. \tag{16}$$

Из (15) видно, что величина МУ щели равна ${}^9/_8\, a_0 \langle S^z \rangle^3$.

Проведенное исследование показало, что вблизи температуры Кюри при ОФП в пространственно-неоднородное состояние с магнитной подсистемой интенсивно взаимодействуют поперечные звуковые ветви. Энергия этих ветвей возбуждений сильно зависит от температуры (16). Величина МУ щели $\sim\tau^{3/2}$. Отметим, что величина k_0 остается конечной при $T \to T_c$, и это обстоятельство является весьма удобным для экспериментального изучения температурных зависимостей спектров, описанных выше.

Список литературы

[1] Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 1. С. 228—239.
[2] Туров Е. А., Ирхин Ю. П. // ФММ. 1956. Т. 3. № 1. С. 15—17.
[3] Туров Е. А., Шавров В. Г. // УФН. 1983. Т. 140. № 3. С. 429—462.
[4] Мицай Ю. Н., Фридман Ю. А. // ФТТ. 1989. Т. 31. № 6. С. 197—202.
[5] Изюмов Ю. А. // УФН. 1984. Т. 144. № 3. С. 439—474.
[6] Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975. 527 с.
[7] Бучельников В. Д., Шавров В. Г. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 4. С. 1167—1170.
[8] Зайцев Р. О. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. № 1. С. 207—215.
[9] Вальков В. В., Валькова Т. А., Овчинников С. Г. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 2. С. 550—561.
[10] Изюмов Ю. А., Кассан-Оглы Ф. А., Скрябин Ю. Н. Полевые методы в теории ферромагнетизма. М.: Наука, 1974. 224 с.
[11] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962. 444 с.

Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе
Симферополь

Поступило в Редакцию 29 мая 1989 г.
В окончательной редакции 29 августа 1989 г.