УДК 537.226; 548.4

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСЛОКАЦИИ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКЕ

В. В. Дежин, В. Н. Нечаев, А. М. Рощупкин

Исследованы изгибные колебания дислокации в сегнетоэлектрическом кристалле. Показано, что спектр колебаний состоит из двух ветвей — «квазиакустической» ($\omega \to 0$ при $q \to 0$, где ω и q — соответственно частота и волновой вектор изгибной волны) и «квазиоптической» ($\omega \neq 0$ при $q=0$). Вычислена обобщенная восприимчивость дислокации. Показано, что рассеяние энергии при колебаниях поляризации кристалла, сопутствующих колебаниям дислокации, вносит существенный вклад в затухание дислокационных колебаний.

Изгибные колебания дислокации в несегнетоэлектрических кристаллах рассматривались в работе [1], где был определен спектр собственных частот дислокации и исследовано рассеяние фононов на дислокациях. В сегнетоэлектриках в отличие от [1] колебания дислокации обязательно сопровождаются колебаниями электрических полей и поляризации, которые вызываются через посредство линейной или квадратичной стрикционной связи переменными упругими полями. В результате перенормируются эффективная масса дислокации и ее эффективная жесткость, появляется дополнительный вклад в затухание дислокационных колебаний вследствие рассеяния энергии при колебаниях поляризации. Возможно также образование локальных поляризационных мод, связанных с дислокацией. Исследование этих особенностей изгибных колебаний дислокации в сегнетоэлектрике — цель настоящей работы.

1. Вывод системы уравнений, описывающей колебания дислокации в сегнетоэлектрике

Исходную систему уравнений, описывающую динамику сегнетоэлектрического кристалла, состоящую из динамического уравнения теории упругости

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{1}$$

динамического уравнения для параметра порядка — вектора поляризации $\mathbf{P}$ [2]

$$m \frac{d^2 \mathscr{P}_i}{dt} + h \frac{d \mathscr{P}_i}{dt} - \delta \Delta \mathscr{P}_i - \alpha \mathscr{P}_i + \beta \mathscr{P}_i^3 - g_{lmik} \sigma_{lm} \mathscr{P}_k = E_i \tag{2}$$

и уравнений электростатики

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi \mathscr{P}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{3}$$

для данной задачи удобно переписать, формулируя упругую задачу в напряжениях. В выражениях (1)—(3) использованы обозначения: ρ — плотность вещества кристалла, v_i — скорость элементов кристалла, σ_{ik} — тензор напряжений, h и m — коэффициент затухания и массовый коэффициент для колебаний поляризации соответственно, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, δ — корреляционная постоянная, α и β — коэффициенты в разложении Ландау свободной энергии, g_{iklm} — тензор электрострикционных коэффициентов.

Для этого подставим в условие совместности деформаций Сен-Венана

$$e_{ikl}e_{jmn}U_{ln,\,km}=0$$

(e_{ikl} — символ Леви-Чивитта) выражение для тензора полной деформации

$$U_{ln}=s_{lnkm}\sigma_{km}+\frac{1}{2}g_{lnkm}\mathscr{P}_k\mathscr{P}_m,$$

где s_{lnkm} — тензор упругих податливостей, и учтем соотношение (1). В результате, предполагая изотропность упругих и электрострикционных свойств ($g_{lnkm}\mathscr{P}_k\mathscr{P}_m=g_1\delta_{ln}\mathscr{P}^2+g_2\mathscr{P}_l\mathscr{P}_n$), получим обобщение динамического уравнения Бельтрами на случай сегнетоэлектрического кристалла

$$\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial t^2}-\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{1}{c_t^2}\delta_{ij}\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial t^2}-\Delta\sigma_{ij}-$$
$$-\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_i\partial x_j}-\delta_{ij}\Delta\sigma_{ll}\right)+\rho g_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathscr{P}_i\mathscr{P}_j)-\frac{1}{2}\rho(g_1+g_2)\delta_{ij}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{P}^2)+\mu(g_1+g_2)\delta_{ij}\Delta(\mathscr{P}^2)-\mu(g_1+g_2)\frac{\partial^2(\mathscr{P}^2)}{\partial x_i\partial x_j}+\mu g_2\frac{\partial^2(\mathscr{P}_j\mathscr{P}_l)}{\partial x_i\partial x_l}+$$
$$+\mu g_2\frac{\partial^2(\mathscr{P}_i\mathscr{P}_l)}{\partial x_j\partial x_l}-\mu g_2\Delta(\mathscr{P}_i\mathscr{P}_j)-\mu g_2\delta_{ij}\frac{\partial^2(\mathscr{P}_l\mathscr{P}_k)}{\partial x_l\partial x_k}=0, \qquad (4)$$

где $c_t=\sqrt{\mu/\rho}$ — скорость поперечного звука, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

При наличии в кристалле дислокаций появляется дополнительная несовместность деформаций, связанная с ними. Производя учет ее, согласно [3], и линеаризуя выражение (4) по отклонению поляризации $\mathscr{P}_1=\mathscr{P}-\mathscr{P}_0$ от равновесного значения $\mathscr{P}_0=\sqrt{2\alpha/\beta}$ в однородном кристалле, будем иметь

$$\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial t^2}-\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{1}{c_t^2}\delta_{ij}\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial t^2}-\Delta\sigma_{ij}-\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma_{ll}}{\partial x_i\partial x_j}-\delta_{ij}\Delta\sigma_{ll}\right)-$$
$$-2\mu(g_1+g_2)\delta_{ij}\left[\frac{1}{2c_t^2}\frac{\partial^2(\mathscr{P}_0\cdot\mathscr{P}_1)}{\partial t^2}-\Delta(\mathscr{P}_0\cdot\mathscr{P}_1)\right]+$$
$$+\mu g_2\left[\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathscr{P}_{0i}\mathscr{P}_{1j}+\mathscr{P}_{0j}\mathscr{P}_{1i})-\Delta(\mathscr{P}_{0i}\mathscr{P}_{1j}+\mathscr{P}_{0j}\mathscr{P}_{1i})\right]-$$
$$-2\mu(g_1+g_2)\frac{\partial^2(\mathscr{P}_0\cdot\mathscr{P}_1)}{\partial x_i\partial x_j}+\mu g_2\left(\mathscr{P}_{0i}\frac{\partial\operatorname{div}\mathscr{P}_1}{\partial x_j}+\mathscr{P}_{0j}\frac{\partial\operatorname{div}\mathscr{P}_1}{\partial x_i}\right)+$$
$$+\mu g_2\mathbf{P}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\mathscr{P}_{1i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\mathscr{P}_{1j}}{\partial x_i}-2\delta_{ij}\operatorname{div}\mathscr{P}_1\right)=$$
$$=\rho\frac{\partial}{\partial t}(j_{ij}+j_{ji}-\delta_{ij}j_{ll})-2\mu\eta_{ij}. \qquad (5)$$

Здесь j_{ij} — тензор плотности потока дислокаций, в случае одиночной дислокации он имеет вид [4]

$$j_{ik}=-n_ib_kV\delta(\xi), \qquad (6)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к плоскости скольжения дислокации, $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса дислокации, V — проекция вектора скорости линии дислокации в данной ее точке на направление нормали к ней в плоскости скольжения, ξ — двумерный радиус-вектор, отсчитываемый от оси дислокации в плоскости, перпендикулярной единичному вектору касательной к линии дислокации в данной точке τ,

$$\eta_{ij} = e_{jkn} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau_i b_n - \frac{1}{2} \tau \cdot \mathbf{b} \delta_{in} \right) \delta(\xi) \tag{7}$$

— тензор несовместности деформаций [5].

Полученную систему уравнений (2), (3), (5) необходимо дополнить уравнением движения самой дислокации

$$f_i(\xi) = e_{ikl} \tau_k \sigma_{lm}(\xi) b_m = 0, \tag{8}$$

представляющем собой условие равенства нулю силы Пича—Келера в любой момент времени в любой точке дислокации. Поскольку движение дислокации происходит в плоскости скольжения, то в дальнейшем будем работать с проекцией этой силы f_i на плоскость скольжения

$$f_\perp = \mathbf{f} \cdot \varkappa = n_l \sigma_{lm} b_m, \tag{9}$$

где $\varkappa$ — единичный вектор нормали к линии дислокации в плоскости скольжения.

Система уравнений (2), (3), (5) с граничным условием (8) представляет собой полную систему уравнений, описывающую колебания сегнетоэлектрического кристалла с дислокацией. Умножив (5) на $n_i b_j$, получим уравнение непосредственно для величины $f_\perp$, совпадающей на линии дислокации с проекцией силы Пича—Келера,

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 f_\perp}{\partial t^2} - \Delta f_\perp + \frac{3}{1+\nu} (\mathbf{n} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \nabla) p + \\
+ \mu g_2 \left\{ \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\mathcal{P}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathcal{P}_1 \cdot \mathbf{b}) + (\mathcal{P}_0 \cdot \mathbf{b})(\mathcal{P}_1 \cdot \mathbf{n})] - \right. \\
\left. - \Delta [(\mathcal{P}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathcal{P}_1 \cdot \mathbf{b}) + (\mathcal{P}_0 \cdot \mathbf{b})(\mathcal{P}_1 \cdot \mathbf{n})] \right\} - 2\mu (g_1 + g_2)(\mathbf{n} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathcal{P}_0 \cdot \mathcal{P}_1) + \\
+ \mu g_2 \{(\mathcal{P}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathcal{P}_1 + (\mathcal{P}_0 \cdot \mathbf{b})(\mathbf{n} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathcal{P}_1\} + \\
+ \mu g_2 (\mathcal{P}_0 \cdot \nabla) \{(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathcal{P}_1 \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \nabla)(\mathcal{P}_1 \cdot \mathbf{b})\} = \\
= -\rho b^2 \frac{\partial}{\partial t} (V \delta(\xi)) - 2\mu n_i \eta_{ij} b_j.
\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь использовано обозначение $p = -\sigma_{ll}/3$. Уравнение для величины p — гидростатического давления, — входящей в (10), получается в результате свертки выражения (5)

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p - \frac{4}{3} \mu (g_1 + g_2) \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{3}{4c_t^2} \frac{\partial^2 (\mathcal{P}_0 \cdot \mathcal{P}_1)}{\partial t^2} - \Delta (\mathcal{P}_0 \cdot \mathcal{P}_1) \right] + \\
+ \frac{2}{3} \mu g_2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 (\mathcal{P}_0 \cdot \mathcal{P}_1)}{\partial t^2} - \Delta (\mathcal{P}_0 \cdot \mathcal{P}_1) \right] - \\
- \frac{2}{3} \mu g_2 \frac{1+\nu}{1-\nu} (\mathcal{P}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathcal{P}_1 = -\frac{2}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \eta_{ll},
\end{gathered} \tag{11}$$

где c_l — скорость продольного звука.

Дальнейшее рассмотрение во избежание громоздких выкладок произведем для конкретного случая краевой дислокации в одноосном сегнетоэлектрике.

2. Обобщенная восприимчивость и собственные частоты колебаний краевой дислокации в сегнетоэлектрике

Пусть сегнетоактивная ось совпадает с координатной осью OZ : $\mathcal{P} = (0, 0, \mathcal{P})$. Будем предполагать, что вдоль той же оси OZ расположено равновесное положение линии краевой дислокации: $\tau_0 = (0, 0, -1)$, вектор

Бюргерса которой $\mathbf{b}$ направлен по оси OX: $\mathbf{b}=(b, 0, 0)$. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая малых колебаний дислокации.

Тогда, учитывая, что в линейном по смещению дислокации $u=u(z)$ приближении

$$\tau=(-du/dz,\ 0,\ -1),\quad \delta(\xi)=\delta(x)\,\delta(y)-\delta(y)\,\delta'(x)\,u(z),$$

уравнения (10), (11) приводим к виду

$$\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 f_\perp}{\partial t^2}-\Delta f_\perp+\frac{3b}{1+\nu}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}-2\mu(g_1+g_2)\mathscr{P}_0 b\frac{\partial^2\mathscr{P}_1}{\partial x\partial y}=$$
$$=-\mu b^2\left(\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\delta(x)\,\delta(y),\tag{12}$$

$$\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\Delta p-\frac{4}{3}\mu(2g_1+g_2)\mathscr{P}_0\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\frac{3g_1+g_2}{2(2g_1+g_2)}\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\mathscr{P}_1}{\partial t^2}-\Delta\mathscr{P}_1\right]-$$
$$-\frac{2}{3}\mu g_2\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathscr{P}_0\frac{\partial^2\mathscr{P}_1}{\partial z^2}=-\frac{2}{3}\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}b\left[\delta(x)\,\delta'(y)-u\delta'(x)\,\delta'(y)\right].\tag{13}$$

Через электрострикционную связь (см. (2)) поляризация оказывается в нашем случае связанной как с гидростатическим давлением p, так и с компонентой σ_{zz} тензора напряжений. Уравнение для σ_{zz} очевидным образом следует из (5):

$$\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial t^2}-\Delta\sigma_{zz}+\frac{3}{1+\nu}\left[\frac{1}{2c_l^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\Delta_\perp p\right]-2\mu g_1\mathscr{P}_0\left[\frac{g_1-g_2}{2g_1c_l^2}\frac{\partial^2\mathscr{P}_1}{\partial t^2}-\Delta_\perp\mathscr{P}_1\right]=$$
$$=-2\mu b\left[\delta(x)\,\delta'(y)-u\delta'(x)\,\delta'(y)\right],\tag{14}$$

где $\Delta_\perp=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$. Систему уравнений (2), (3), (12)—(14) удобно решать в Фурье-представлении. Из системы уравнений (2), (3) находим Фурье-образ поляризации $\mathscr{P}_1(\mathbf{q},\ \omega)$

$$\mathscr{P}_1(\mathbf{q},\ \omega)=\chi(\mathbf{q},\ \omega)\left(-3g_1\mathscr{P}_0\tilde{p}+g_2\mathscr{P}_0\tilde{\sigma}_{zz}\right),\tag{15}$$

где

$$\chi(\mathbf{q},\ \omega)=\frac{1}{m}\frac{1}{\omega_0^2+\varkappa q^2+dq_z^2/q^2-i\Gamma\omega-\omega^2}$$

— обобщенная восприимчивость кристалла на внешнюю силу, затрагивающую его поляризацию, $\omega_0^2=\sqrt{2a/m}$, $\varkappa=\delta/m$, $d=4\pi/m$, $\Gamma=h/m$.

Подставляя (15) в систему уравнений (12)—(14) и исключая последовательно $\tilde{\sigma}_{zz}$ и $\tilde{p}$, с точностью до слагаемых квадратичных по коэффициентам электрострикционной связи g_1, g_2 находим выражение Фурье-образа проекции силы Пича—Келера, действующей на дислокацию

$$\tilde{f}_\perp(q_z,\ \omega)=\alpha_D^{-1}(q_z,\ \omega)\,\tilde{u}(q_z,\ \omega),$$

где

$$\alpha_D^{-1}(q_z,\ \omega)=-\frac{\mu b^2}{2\pi}\int q_\perp q_\perp\left\{\left[\frac{q_z^2-\omega^2/c_l^2}{q^2-\omega^2/c_l^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{q_\perp^4}{(q^2-\omega^2/c_l^2)(q^2-\omega^2/c_l^2)}-1\right]+\right.$$
$$+\mu g_1(g_1+g_2)\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathscr{P}_0^2\chi(\mathbf{q},\ \omega)\left[\frac{q_\perp^4}{(q^2-\omega^2/c_l^2)(q^2-\omega^2/c_l^2)}-1\right]-$$
$$-\mu g_2(g_1+g_2)\mathscr{P}_0^2\chi(\mathbf{q},\ \omega)\left[\frac{q_\perp^4}{(q^2-\omega^2/c_l^2)^2}-1\right]-\frac{\mu}{1-\nu}g_2(g_1+g_2)\mathscr{P}_0^2\chi(\mathbf{q},\ \omega)\times$$
$$\times\left[\frac{q_\perp^2-\omega^2/2c_l^2}{q^2-\omega^2/c_l^2}\frac{q_\perp^4}{(q^2-\omega^2/c_l^2)(q^2-\omega^2/c_l^2)}-1\right]-\frac{\mu g_2^2\mathscr{P}_0^2}{1-\nu}\chi(\mathbf{q},\ \omega)\times$$
$$\times\frac{q_\perp^4q_z^2}{(q^2-\omega^2/c_l^2)^2(q^2-\omega^2/c_l^2)}-\frac{\mu g_2^2\mathscr{P}_0^2}{(1-\nu)^2}\chi(\mathbf{q},\ \omega)\frac{q_\perp^2-\omega^2/2c_l^2}{q^2-\omega^2/c_l^2}\times$$
$$\times\frac{q_\perp^4q_z^2}{(q^2-\omega^2/c_l^2)^2(q^2-\omega^2/c_l^2)}-\frac{\mu g_1g_2}{1-\nu}\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathscr{P}_0^2\chi(\mathbf{q},\ \omega)\frac{q_\perp^4q_z^2}{(q^2-\omega^2/c_l^2)(q^2-\omega^2/c_l^2)^2}-$$

$$-\frac{2\mu}{1-\nu}\frac{1+\nu}{1-\nu}g_1(2g_1+g_2)\mathscr{F}_0^2\chi(\mathbf{q},\omega)\left[\frac{q_\perp^4(q^2-A\omega^2/c_l^2)}{(q^2-\omega^2/c_l^2)(q^2-\omega^2/c_t^2)^2}-1\right]+$$

$$+\frac{2\mu}{1-\nu}g_2(2g_1+g_2)\mathscr{F}_0^2\chi(\mathbf{q},\omega)\left[\frac{q_\perp^4(q^2-A\omega^2/c_l^2)}{(q^2-\omega^2/c_l^2)^2(q^2-\omega^2/c_t^2)}-1\right]+$$

$$+\frac{2\mu}{(1-\nu)^2}g_2(2g_1+g_2)\mathscr{F}_0^2\chi(\mathbf{q},\omega)\left[\frac{q_\perp^4(q^2-A\omega^2/c_l^2)(q_\perp^2-\omega^2/2c_t^2)}{(q^2-\omega^2/c_l^2)^2(q^2-\omega^2/c_t^2)^2}-1\right]+$$

$$+\mu\mathscr{F}_0^2\left[-\frac{(1+\nu)(3+\nu)}{(1-\nu)^2}g_1^2+\frac{5+2\nu}{1-\nu}g_1g_2+\frac{(1+\nu)(2-\nu)}{(1-\nu)^2}g_2^2\right]\times$$

$$\times[\chi(\mathbf{q},\omega)-\chi(q_z=0,\ \omega=0)]\Big\} \qquad (16)$$

— обратная обобщенная восприимчивость дислокации, описывающая отклик кристалла на внешнюю силу, пространственная зависимость которой характеризуется волновым вектором q_z, временная — частотой ω, $q_\perp=\sqrt{q_x^2+q_y^2}$, $A=(3g_1+g_2)/2\,(2g_1+g_2)$.

В силу значительной громоздкости получающихся выражений явный вид $\alpha_D\,(q_z,\,\omega)$ приводить не будем, а сразу перейдем к анализу особенностей колебаний дислокации в сегнетоэлектрическом кристалле.

Приравнивая выражение $\alpha_D^{-1}\,(q_z,\,\omega)$ к нулю, находим дисперсионное уравнение для изгибных колебаний дислокации. В длинноволновом приближении $q_z\ll q_D$, где q_D — дебаевский волновой вектор, зависимость частоты изгибных колебаний ω от волнового вектора q_z имеет вид

$$\omega=\xi c_t q_z, \qquad (17)$$

где $\xi=\xi_0+\xi_1$,

$$\xi_0=\frac{\sqrt{2}\,c_t/c_l}{\sqrt{1+c_t^4/c_l^4}}=2\left(\frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{5-12\nu+8\nu^2}\right)^{1/2}$$

— отвечает скорости изгибной волны дислокации в несегнетоэлектрическом кристалле,

$$\xi_1\sim\chi_0\mu g^2\mathscr{F}_0^2\xi_0$$

— малая добавка к скорости, связанная с электрострикционным взаимодействием упругого поля с поляризацией. Такой же порядок величины, очевидно, имеют поправки к эффективной массе m_e и эффективной жесткости c_e дислокации в сегнетоэлектрическом кристалле

$$\Delta m_e/m_e\sim\Delta c_e/c_e\sim\chi_0\mu g^2\mathscr{F}_0^2\sim 0.1\div 1.0.$$

Вклад в затухание γ дислокационных колебаний, связанный с рассеянием энергии при колебаниях поляризации, сопутствующих колебаниям дислокации,

$$\gamma=\left[\frac{(1+\nu)(3+\nu)g_1^2-(1-\nu)(5+2\nu)g_1g_2}{5-12\nu+8\nu^2}-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)g_2^2}{5-12\nu+8\nu^2}\right]\times$$

$$\times\frac{4c_t^2\Gamma\mu\mathscr{F}_0^2}{m\omega_0^2\varkappa^2}\,\frac{\omega_0^4+2d\omega_0^2+d\varkappa q_D^2}{(\omega_0^2+d)(\omega_0^2+\varkappa q_D^2)}\left(\ln\frac{q_D^2}{q_z^2}\right)^{-1},$$

учитывая, что $\varkappa\sim c_t^2\sim 10^7$ м^2/с^2, $\Gamma\sim 10^{13}$ с$^{-1}$, сравним с известными фононными механизмами рассеяния энергии дислокации [6]. Учитывая, что в рамках теории Ландау от температуры зависит лишь коэффициент $\alpha=\alpha_0\,(T-T_c)$, нетрудно убедиться, что величина γ практически не зависит от близости к температуре фазового перехода T_c, так же как и поправки к собственной частоте, эффективной массе m_e, эффективной жесткости c_e дислокации. Значительных температурных аномалий $\xi_1\sim(T-T_c)^{-1}$, $\gamma\sim(T-T_c)^{-1}$ следует ожидать в сегнетоэлектриках, обладающих пьезоэлектрическими свойствами в парафазе, поскольку связь упругих полей и поляризации будет тогда осуществляться через независящий от температуры пьезоэлектрический коэффициент b в отличие от нашего случая, где $b \sim g\mathscr{P}_0$. Однако полученные здесь формулы, строго говоря, неприменимы для этого случая, поскольку влияние поляризации на колебания дислокации уже нельзя рассматривать как малое возмущение, и систему уравнений (2), (3), (12)—(14) нужно решать точно.

Помимо этой ветви изгибных колебаний дислокации существует еще одно решение дисперсионного уравнения $\alpha_D^{-1}(q_z, \omega)=0$, описывающее локальные колебания дислокации, характеризующееся тем, что частота ω отлична от нуля при $q_z=0$. По аналогии с колебаниями сложных кристаллических решеток первую ветвь колебаний можно назвать «квазиакустической», а вторую ветвь — «квазиоптической». Соответствующее решение запишем для случая однородных колебаний дпклокацпп ($q_z=0$)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\varkappa}{c_l^2} e^{-\frac{A}{B}\omega_0^2}\right), \tag{18}$$

где

$$A = \frac{1}{2c_l^2}\left(\ln \frac{c_l^2 q_D^2}{\omega_0^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \ln \frac{c_l^2 q_D^2}{\omega_0^2}\right),$$

$$B = \frac{\mu\mathscr{P}_0^2}{(1-\nu)^2 (1-2\nu)\, m\varkappa} [(7 - 12\nu - 7\nu^2 + 8\nu^3)(1-2\nu) g_1^2 -$$

$$- (5 - 17\nu + 42\nu^2 - 52\nu^3 + 24\nu^4) g_1 g_2 - (2 - 3\nu + 33\nu^2 - 42\nu^3 + 8\nu^4) g_2^2].$$

Для существования этого решения необходимо чтобы константа B была положительной.

Принимая во внимание формулы (17), (18), нетрудно получить выражения для обобщенных восприимчивостей, описывающих отклик дислокаций на низкочастотное и высокочастотное длинноволновое внешнее возмущение.

В первом случае, разлагая выражение для $\alpha_D^{-1}(q_z, \omega)$ в ряд по ω^2 вблизи собственной частоты $\omega(q_z)$, задаваемой формулой (17), находим

$$\alpha_D^{(l)}(q_z, \omega) = \frac{C}{\omega^2(q_z) - \omega^2 - i\gamma\omega},$$

где

$$C = \frac{\pi}{\rho b^2}\left(\frac{c_t^4/c_l^4}{1 + c_t^4/c_l^4} \ln \frac{q_D^2}{q_z^2}\right)^{-1},$$

γ — полное затухание дислокационных колебаний.

В случае высокочастотного возмущения аналогичным способом находим

$$\alpha_D^{(h)}(q_z, \omega) = \frac{4\pi}{\rho b^2} e^{-\frac{A}{B}\omega_0^2} \frac{1}{\omega^2(q_z) - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Здесь $\omega^2(q_z)$ определяется по формуле (18), γ — полное затухание в этой ветви.

3. Распределение поляризации и электрических полей вокруг дислокации

Развитый в настоящей работе подход позволяет исследовать распределение поляризации и электрических полей вокруг колеблющейся дислокации. Задача о распределении электрических полей вокруг дислокации в пьезоэлектрике в статическом случае решалась в работе [7]. В [8, 9] исследовано распределение намагниченности и магнитных полей в ферромагнетике с дислокацией также в статическом случае.

Предположим, что дислокация совершает колебания по закону

$$u = u\, e^{ikz - i\nu t}.$$

Сопровождающие колебания дислокации, колебания упругих, электрических полей и поляризации определяются из системы уравнений (12)—(15). Интересуясь в дальнейшем только зависящими от времени компонентами указанных полей для Фурье-образов величин p и σ_{zz}, имеем

$$\tilde{p} = -\frac{8\pi^2}{3}\mu b \frac{1+\nu}{1-\nu} u_0 \frac{q_x q_y \delta(\omega-\nu)\,\delta(q_z-k)}{q^2-\omega^2/c_l^2},$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = 8\pi^2 \mu b u_0 \frac{q_x q_y \delta(\omega-\nu)\,\delta(q_z-k)}{q^2-\omega^2/c_t^2}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в уравнения (12)—(15) после несложных преобразований для Фурье-образов поляризации $\mathscr{P}_z$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ получаем следующие выражения:

$$\mathscr{P}_z(\mathbf{q},\ \omega) = 8\pi^2 b \mathscr{P}_0 \chi(\mathbf{q},\ \omega)\left(g_1 \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{q^2-\omega^2/c_l^2} + g_2 \frac{1}{q^2-\omega^2/c_t^2}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{4\pi \mathbf{q} q_z \mathscr{P}_z(\mathbf{q},\ \omega)}{q^2}. \tag{20}$$

Совершая Фурье-обращение формул (20), находим распределение поляризации и электрических полей вокруг колеблющейся дислокации. Выражение для $\mathscr{P}$ имеет вид

$$\mathscr{P}(\mathbf{r},\ t) = \frac{\mu b}{\pi}\mathscr{P}_0 u_0 \chi_0 \left(g_1 \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_1 + g_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_2\right) e^{ikz - i\nu t}, \tag{21}$$

где

$$I_{1,\,2} = \frac{\pi}{2}\frac{\nu^2/c_{l,\,t}^2}{dk^2/\omega_0^2 + \nu^2/c_{l,\,t}^2} Y_0\left(\rho\sqrt{\nu^2/c_{l,\,t}^2 - k^2}\right) + \left(1 + \frac{d\varkappa k^2}{\omega_0^4}\right) K_0\left(\frac{\rho\omega_0}{\sqrt{\varkappa}}\right) - $$
$$- \frac{dk^2/\omega_0^2}{dk^2/\omega_0^2 + \nu^2/c_{l,\,t}^2} K_0\left(\rho k\sqrt{1 + d/\omega_0^2}\right).$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, Y_0 — функция Неймана, K_0 — функция Макдональда. При записи этих формул предполагалось выполнение условия $k^2 > \nu^2/c_t^2$. В этом случае, согласно (21), при удалении от линии дислокации поляризация убывает по степенному закону $\mathscr{P} \sim \rho^{-3/2}$. Если же $k^2 < \nu^2/c_l^2$, то в выражениях для I_1 и I_2 нужно сделать замену

$$Y_0\left(\rho\sqrt{\nu^2/c_{l,\,t}^2 - k^2}\right) \to -\frac{2}{\pi} K_0\left(\rho\sqrt{k^2 - \nu^2/c_{l,\,t}^2}\right).$$

Спадание $\mathscr{P}$ в этом случае будет происходить по экспоненциальному закону на расстояниях $l \sim \left(\sqrt{k^2 - \nu^2/c_t^2}\right)^{-1}$.

Электрические поля, связанные с дислокацией в нашем случае $\mathscr{P}_0 \parallel \boldsymbol{\tau}$, имеют чисто динамическую природу. В качестве иллюстрации распределения электрического поля вокруг дислокации приведем выражение для компоненты вектора напряженности электрического поля E_z ($k^2 > \nu^2/c_t^2$).

$$E_z(\mathbf{r},\ t) = 4\mu b \mathscr{P}_0 u_0 \chi_0 k^2 \left(g_1 \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi_1 + g_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi_2\right) e^{ikz - i\nu t},$$

где

$$\Phi_{1,\,2} = \frac{1}{\omega_0^2/\varkappa} K_0\left(\frac{\rho\omega_0}{\sqrt{\varkappa}}\right) - \frac{\pi}{2}\frac{1}{dk^2/\omega_0^2 + \nu^2/c_{l,\,t}^2} Y_0\left(\rho\sqrt{\nu^2/c_{l,\,t}^2 - k^2}\right) - $$
$$- \frac{1}{dk^2/\omega_0^2 + \nu^2/c_{l,\,t}^2} K_0\left(\rho k\sqrt{1 + d/\omega_0^2}\right).$$

Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы для исследования затухания и рассеяния ультразвука и электромагнитных волн в сегнетоэлектрическом кристалле с дислокациями, для расчета вклада дислокаций в диэлектрическую проницаемость и тангенс угла диэлектрических потерь, в пьезомодули кристаллов и т. д.

Список литературы

[1] Ninomiya T. // J. Phys. Soc. Jap. 1968. V. 25. N 3. P. 830—840.
[2] Вакс В. Г. Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. М.: Наука, 1973. 327 с.
[3] Bross H. // Phys. St. Sol. 1964. V 5. N 2. P. 329—342.
[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
[5] Де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир. 1977. 208 с.
[6] Альшиц В. И., Инденбом В. Л. // УФН. 1975. Т. 115. № 1. С. 3—39.
[7] Косевич А. М., Пастур Л. А., Фельдман Э. П. // Кристаллография. 1967. Т. 12. № 5. С. 916—923.
[8] Косевич А. М., Фельдман Э. П. // ФТТ. 1967. Т. 9. № 12. С. 3415—3421.
[9] Ганн В. В., Фельдман Э. П. // ФНТ. 1976. Т. 2. № 1. С. 30—36.

Воронежский политехнический институт
Воронеж

Поступило в Редакцию
30 мая 1989 г.
В окончательной редакции
20 октября 1989 г.