1990 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 32, № 5
1990 SOLID STATE PHYSICS Vol. 32, N 5

УДК 534.16

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНО-УПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА И ПЛОСКИХ ДЕФЕКТАХ КРИСТАЛЛОВ

Ю. А. Косевич

Найдено точное решение нелинейных уравнений теории упругости, отвечающее сдвиговой поверхностной волне (СПВ), распространяющейся вдоль границы одноосного нелинейного кристалла со слоем «линейного» кристалла произвольной толщины. Предсказываются, в частности, не существующие в линейной теории СПВ на границе раздела двух полубесконечных кристаллов.

Впервые точные решения нелинейных уравнений, отвечающие поверхностным волнам, в том числе не существующим в линейной теории, были получены для уравнений Максвелла в средах с диэлектрической проницаемостью, зависящей от амплитуды электрического поля [1-3]. В случае же упругих волн были найдены лишь приближенные решения для нелинейных и солитоноподобных поверхностных волн Рэлея [4] и сдвиговых поверхностных волн (СПВ) в системе тонкий слой—подложка (волн Лява) [5, 6] и на свободной поверхности нелинейного твердого тела [7]. При макроскопическом описании чисто сдвиговые (поперечные) упругие волны во многом аналогичны поперечным электромагнитным волнам, поэтому, как и в случае последних, для СПВ можно надеяться получить точные решения нелинейных уравнений. В настоящей работе рассмотрена модель одноосного кристалла, допускающая точное решение уравнений теории упругости для нелинейных сдвиговых поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы нелинейного кристалла со слоем «линейного» кристалла произвольной толщины. Описаны, в частности, нелинейные СПВ на свободной поверхности и плоском дефекте нелинейного кристалла с отличными от нуля капиллярными параметрами (поверхностными упругими модулями и плотностью), на границе раздела полубесконечных нелинейного и линейного кристаллов. В последнем случае важно, что линейные СПВ на такой границе не существуют.

Рассмотрим одноосный кристалл (гексагональный или тетрагональный), граничная поверхность XOY которого перпендикулярна главной оси OZ, и будем интересоваться чисто сдвиговой акустической волной, поляризованной в плоскости границы вдоль кристаллической оси OY и распространяющейся вдоль оси OX. В этом случае у тензора упругих напряжений отличными от нуля будут лишь компоненты σ_{xy} и σ_{zy}, для которых в рассматриваемом нелинейном одноосном кристалле мы предполагаем следующий вид:

$$\sigma_{xy} = 2C_{66}(\omega)\, u_{xy} + 8\alpha(\omega)\, |u_{xy}|^2 u_{xy}, \qquad \sigma_{zy} = 2C_{44}(\omega)\, u_{zy}, \tag{1}$$

где u_{xy}, u_{zy} — компоненты тензора деформации; $C_{44}(\omega)$, $C_{66}(\omega)$ — линейные, $\alpha(\omega)$ — нелинейный упругие модули (с учетом их частотной зависимости). Выражение (1) фактически учитывает лишь зависимость от амплитуды сдвиговой деформации $|u_{xy}|$ упругого модуля C_{66}; его же зависимостью от $|u_{zy}|$, а также нелинейной зависимостью от амплитуды деформации модуля C_{44} пренебрегается, что допустимо, например, в сильно анизотропном кристалле ($C_{44} \ll C_{66}$). В (1) также учтено, что для чисто сдвиговых волн в тензоре напряжений σ_{xy} отсутствуют квадратичные по соответствующим деформациям нелинейности [6, 8]. Уравнение движения в сдвиговой волне с учетом (1) имеет обычный вид

$$\rho \ddot{u}_y = \partial \sigma_{yk}/\partial x_k \quad (k=1,\ 2,\ 3), \tag{2}$$

где ρ — плотность кристалла.

Нелинейное уравнение (1), (2) имеет точное решение в виде монохроматической (неоднородной) волны

$$u_y = U(z) \exp[i(kx - \omega t)], \tag{3}$$

где ω, k — частота и волновое число; $U(z)$ — вещественная амплитуда. Подстановка (3) в (1), (2) дает для функции $U(z)$ уравнение

$$C_{44}(\partial^2 U/\partial z^2) = (C_{66}k^2 - \rho\omega^2)\, U + \alpha k^4 U^3. \tag{4}$$

Это уравнение имеет решение в виде монохроматической однородной волны (с не зависящей от z амплитудой U) и законом дисперсии

$$\rho\omega^2 = C_{66}k^2 + \alpha k^4 U^2. \tag{5}$$

Как и в случае нелинейных электромагнитных волн [9], в фокусирующем кристалле ($\alpha < 0$) такая волна является неустойчивой относительно образования неоднородной самоканалированной волны.

Для неоднородной волны уравнение (4) имеет первый интеграл, который для стремящихся к нулю при $|z| \to \infty$ значений U и $\partial U/\partial z$ имеет вид

$$C_{44}(\partial U/\partial z)^2 + (\rho\omega^2 - C_{66}k^2)\, U^2 - {}^1/_2\, \alpha k^4 U^4 = 0. \tag{6}$$

Интегрирование уравнения (6) дает

$$U = \left[\frac{2(C_{66}k^2 - \rho\omega^2)}{|\alpha| k^4}\right]^{1/2} \Big/ \operatorname{ch}\left[\left(\frac{C_{66}k^2 - \rho\omega^2}{C_{44}}\right)^{1/2} (z - z_0)\right] \tag{7}$$

в случае $C_{66}k^2 > \rho\omega^2$, $\alpha < 0$;

$$U = \left[\frac{2(C_{66}k^2 - \rho\omega^2)}{\alpha k^4}\right]^{1/2} \Big/ \operatorname{sh}\left[\left(\frac{C_{66}k^2 - \rho\omega^2}{C_{44}}\right)^{1/2} (z - z_0)\right] \tag{8}$$

в случае $C_{66}k^2 > \rho\omega^2$, $\alpha > 0$. В случае же $C_{66}k^2 < \rho\omega^2$ уравнение (6) не имеет стремящихся к нулю при $|z| \to \infty$ решений.

Для нахождения закона дисперсии $\omega = \omega(k, U(0))$ и неопределенной константы z_0 в выражениях (3), (7), (8), описывающих СПВ, необходимо удовлетворить граничным условиям (ГУ) на поверхности нелинейного кристалла.

Если поверхность $z=0$ нелинейного кристалла находится в акустическом контакте со слоем линейного кристалла толщиной d, то эффективное импедансное ГУ для поля смещения в СПВ (3) может быть записано в виде [10]

$$C_{44}(\partial U/\partial z) = -C_{44}^{(L)} U(0)\, \varkappa \operatorname{th} \varkappa d, \tag{9}$$

где $\varkappa = \left[\left(C_{66}^{(L)}k^2 - \rho_L\omega^2\right)/C_{44}^{(L)}\right]^{1/2}$; $C_{44}^{(L)}$, $C_{66}^{(L)}$, ρ_L — сдвиговые модули упругости и плотность анизотропного (одноосного) линейного кристалла (предполагается, что кристаллические оси контактирующих сред совмещены); нелинейный кристалл занимает область $z < 0$. В случае $\varkappa > 0$, $\varkappa d \gg 1$ условие (9) переходит в эффективное ГУ для СПВ на границе раздела двух полубесконечных анизотропных сред. В случае $\varkappa d \ll 1$ условие (9) переходит в ГУ на свободной поверхности с учетом капиллярных явлений [11]

$$C_{44}(\partial U/\partial z) = U(0)\,[\rho_S\omega^2 - h_{66}k^2],$$

где величины $\rho_s = \rho_L d$, $h_{66} = C_{66}^{(L)} d$ при $d \to 0$ играют роль капиллярных параметров поверхности кристалла.

Если слой линейного кристалла толщины d зажат между двумя одинаковыми полубесконечными нелинейными кристаллами (сэндвич-структура или плоский дефект нелинейного кристалла при $d \to 0$), то для поля смещения в нижнем $(z < 0)$ кристалле эффективное ГУ на поверхности раздела $z=0$ имеет следующий вид:

$$C_{44}(\partial U/\partial z) = -C_{44}^{(L)} U(0)\, \varkappa\, [\mathrm{th}\, \varkappa (d/2)]^{\pm 1},$$

где знаки плюс и минус в показателе степени относятся соответственно к СПВ с симметричным и антисимметричным распределением поля смещений $U(z)$ относительно срединной плоскости слоя.

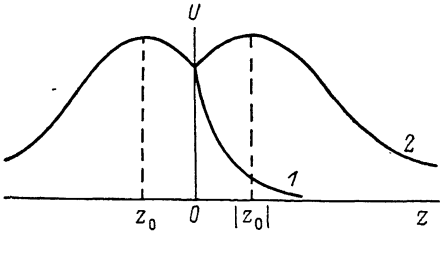
Закон дисперсии нелинейной СПВ $\omega^2=\omega^2 (k^2, U^2(0))$ может быть найден из уравнения (6) после подстановки в него ГУ (9)

$$\frac{[C_{44}^{(L)}]^2}{C_{44}} \varkappa^2\, \mathrm{th}^2\, \varkappa d + \rho\omega^2 - C_{66}k^2 = \frac{1}{2}\alpha k^4 U^2(0), \tag{10}$$

а значение параметра z_0 можно найти из ГУ (9) после подстановки в него явного вида функции $U(z)$ в форме (7) или (8)

$$[C_{44}(C_{66}k^2 - \rho\omega^2)]^{1/2}\, \mathrm{th}^p \left[z_0 \left(\frac{C_{66}k^2 - \rho\omega^2}{C_{44}} \right) \right] = -C_{44}^{(L)} \varkappa\, \mathrm{th}\, \varkappa d, \tag{11}$$

где $p = -\operatorname{sign} \alpha$. Таким образом, уравнения (10), (11) совместно с уравнениями (7), (8) описывают точное решение для нелинейной СПВ, распро-



Распределение амплитуды $U(z)$ нелинейной СПВ в глубине нелинейного кристалла $z < 0$.

1 — в случае границы раздела с линейным кристаллом $z > 0$, *2* — в случае «ускоряющего» $2D$ дефекта нелинейного кристалла $(h_{66}/\rho_S > C_{66}/\rho)$ на плоскости $z = 0$.

страняющейся вдоль границы одноосного нелинейного кристалла со слоем линейного кристалла произвольной толщины d.

В случае границы раздела двух полубесконечных кристаллов, когда линейных СПВ не существует, нелинейные СПВ могут распространяться только в фокусирующих кристаллах, причем в (7) параметр $z_0 < 0$, т. е. максимум амплитуды СПВ находится на конечной глубине $|z_0|$ в нелинейном кристалле (см. рисунок). Нелинейные СПВ могут распространяться, например, вдоль границы нелинейного фокусирующего кристалла с «ускоряющим» сильно анизотропным кристаллом, у которого $C_{66}^{(L)}/\rho_L > C_{66}/\rho$, $C_{44}^{(L)} \ll C_{44}$. В этом случае СПВ имеют закон дисперсии

$$\rho\omega^2 = \left[C_{66} - \frac{C_{44}^{(L)}}{C_{44}} \left(C_{66}^{(L)} - \frac{\rho_L}{\rho} C_{66} \right) \right] k^2 - \frac{1}{2} |\alpha|\, k^4 U^2(0). \tag{12}$$

В случае тонкого слоя ускоряющего линейного кристалла, когда линейные СПВ также не существуют, нелинейные СПВ могут существовать только в фокусирующем кристалле, причем амплитуда СПВ и в этом случае немонотонно $(z_0 < 0)$ спадает в глубину нелинейного кристалла (см. рисунок). В случае тонкого слоя замедляющего линейного кристалла $(\varkappa d \ll 1,\ C_{66}^{(L)}/\rho_L < C_{66}/\rho)$ нелинейные СПВ могут существовать как в фокусирующих, так и в дефокусирующих $\alpha > 0$ кристаллах; в обоих случаях в выражениях (7), (8) параметр $z_0 > 0$, т. е. амплитуда нелинейных СПВ монотонно спадает в глубину кристалла $z < 0$ (как и в случае линейных СПВ Лява). Закон дисперсии рассматриваемой нелинейной СПВ при наличии тонкого слоя линейного кристалла имеет вид

$$\rho\omega^2 = C_{66}k^2 + k^4\left[\frac{1}{2}\,aU^2(0) - \frac{1}{C_{44}}\left(h_{66} - \frac{\rho_S C_{66}}{\rho}\right)^2\right], \tag{13}$$

откуда следует ограничение на величину амплитуды СПВ на поверхности дефокусирующего кристалла

$$|U(0)| < \left(\frac{C_{66}\rho_S}{\rho} - h_{66}\right)\left(\frac{2}{aC_{44}}\right)^{1/2}.$$

Аналогичными свойствами (законом дисперсии и характером распределения амплитуды $U(z)$) обладают симметричные капиллярно-упругие нелинейные СПВ, распространяющиеся вблизи плоского дефекта кристалла (см. рисунок). Отметим в связи с этим, что в длинноволновом пределе $kd \ll 1$ вдоль плоского дефекта как линейного, так и нелинейного кристалла могут распространяться только симметричные СПВ.

В качестве нелинейных сред для экспериментального исследования рассмотренных поверхностных волн могут быть, по-видимому, использованы кристаллы отвердевших благородных газов (криокристаллы). Сильная упругая нелинейность этих кристаллов обусловлена тем, что они образованы за счет относительно слабого ван-дер-ваальсова межатомного взаимодействия, которое характеризуется большим ангармонизмом.

В заключение отметим, что, используя систему макроскопических граничных условий к уравнениям Максвелла на поверхности $2D$ дефекта кристалла [12], можно показать возможность существования симметричных нелинейных поверхностных электромагнитных волн (поверхностных поляритонов) s- и p-поляризации на плоском дефекте диэлектрического кристалла. Вместе с рассмотренными выше нелинейными капиллярно-упругими СПВ такие волны расширяют класс упругих и электромагнитных поверхностных волн, локализованных вблизи плоского дефекта кристалла [12, 13].

Выражаю благодарность В. Г. Можаеву за критические замечания и И. Б. Яковкину и участникам его семинара за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Tomlinson W. J. // Opt. Lett. 1980. V. 5. N 7. P. 323—325.
[2] Агранович В. М., Бабиченко В. С., Черняк В. Я. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. № 8. С. 532—535.
[3] Maradudin A. A. // Z. Phys. 1981. V. B41. N 4. P. 341—344.
[4] Sakuma T., Kawanami Y. // Phys. Rev. 1984. V. B29. N 2. P. 869—879.
[5] Bataille K., Lund F. // Physica D. 1982. V. 6. N 1. P. 95—104.
[6] Maradudin A. A. // Physics of Phonons, Lecture Notes in Physics. N 285 / Ed. T. Paszkiewicz. Berlin: Springer—Verlag, 1987. P. 82—147.
[7] Mozhaev V. G. // Phys. Lett. A. 1989. V. 139. N 7. P. 333—337.
[8] Зарембо Л. К., Красильников В. А. // УФН. 1970. Т. 102. № 4. С. 549—586.
[9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[10] Косевич Ю. А., Сыркин Е. С. // Акуст. журн. 1988. Т. 33. № 1. С. 65—69.
[11] Андреев А. Ф., Косевич Ю. А. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. № 4 (10). С. 1435—1443.
[12] Косевич Ю. А. // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. № 1. С. 353—362.
[13] Kosevich Yu. A., Syrkin E. S. // Phys. Lett. A. 1987. V. 122. N 3—4. P. 178—182.

ВНИЦПВ
Москва

Поступило в Редакцию
7 августа 1989 г.
В окончательной редакции
4 декабря 1989 г.