

УДК 536.242
 © 1990

СВЕРХЗВУКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

А. З. Паташинский, М. В. Чертков

Изучается взаимодействие параметра порядка со звуковым полем при сверхзвуковом движении фронта фазового перехода I рода. Найдены области устойчивого и неустойчивого движения плоского фронта перехода.

1. Введение и постановка задачи

Релаксация метастабильной системы к термодинамически стабильному состоянию может происходить либо путем гомогенного зародышеобразования, либо за счет движения фронта фазового перехода. Движение фронта перехода управляется для слабо метастабильной системы уравнением теплопроводности. Для сильно метастабильной системы теплопроводность не является контролирующим процессом и движение фронта перехода управляется кинетикой фазового превращения в малых элементах системы. В нашей работе [1] мы исследовали движение фронта перехода в системе со скалярным параметром порядка $\varphi(r, t)$ вблизи точки фазового перехода I рода. При учете только собственной кинетики параметра порядка релаксация $\varphi(r, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta H \{\varphi\}}{\delta \varphi}, \quad (1)$$

где $\Gamma = \text{const}$ для рассматриваемого случая несохраняющегося параметра порядка. Функционал $H \{\varphi\}$ есть эффективный гамильтониан системы. Для движущегося фронта фазового перехода выражение (1) справедливо и на фронте перехода, если ширина фронта r_ϕ существенно больше межатомных длин, что означает «близость» фазового перехода I рода к непрерывному фазовому переходу. В этом случае

$$H \{\varphi\} = \int d^3r \left\{ d (\nabla \varphi)^2 - \frac{a\varphi^2}{2} + \frac{b\varphi^4}{4} - h\varphi + \Phi_0 \right\}, \quad (2)$$

причем $a/d \sim 1/r_\phi^2 \ll 1/\lambda^2$. Будем также считать выполненным критерий Гинзбурга—Леванюка малости флуктуаций [2]

$$G_i = b^2 T_c^2 / a d^3 \ll \tau \ll 1, \quad \alpha = a / (T - T_c).$$

Решение (1) описывает релаксацию из метастабильной $\langle \varphi_+ \rangle$ фазы в стабильную $\langle \varphi_- \rangle$. В случае малого h ($h \ll h_c = 2/3\sqrt{3} \cdot a^{1/2}/b^{1/2}$) и постоянных коэффициентов в формуле (2) система (1) имеет простое решение

$$\varphi = \sqrt{a/b} \operatorname{th}(\sqrt{a/2d}(x - vt)) + h/4a.$$

Для более реалистического описания необходимо учитывать взаимодействие параметра порядка $\varphi(r, t)$ с другими гидродинамическими модами (теплопроводность, деформация и т. д.). Учет влияния теплообмена

на релаксацию φ был проведен в [1]. Как было показано в работе [1], при большой метастабильности исходной системы возникает быстро движущийся устойчивый фронт фазового перехода с изменением температуры. Переход малого элемента из начальной фазы в конечную происходит почти адиабатически. При приближении скорости фронта к скорости звука существенную роль начинает играть взаимодействие параметра порядка $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и поля плотности, т. е. происходит генерация звука. Само по себе это взаимодействие связано со стрикцией и тепловым расширением в системе. Цель предлагаемой работы — описать это взаимодействие в простом случае линейной стрикции и теплового расширения с постоянными коэффициентами. Основную роль играет продольная звуковая волна. Эффективный гамильтониан принимает вид

$$H\{\varphi, u_{ii}, T\} = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{d}{2} (\nabla\varphi)^2 - \frac{a\varphi^2}{2} + \frac{b\varphi^4}{4} - h\varphi + \beta\varphi u_{ii} + \right. \\ \left. + \frac{k}{2} (u_{ii})^2 + \sigma u_{ii} (T - T_+) \right\}, \quad (3)$$

где u_i — вектор смещения, u_{ij} — тензор деформации, T_+ — температура начальной недеформированной фазы, σ — коэффициент теплового расширения, k — модуль всестороннего сжатия. Для полей параметра порядка, деформации и температуры вместо (1) получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta H}{\delta\varphi}, \quad \rho^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{ii} = \Delta \frac{\delta H}{\delta u_{ii}}, \quad T \frac{\partial S}{\partial t} = \kappa \Delta T, \quad (4a)-(4b)$$

где (4б) есть уравнение движения упругой фазы с плотностью ρ_0 в недеформированном состоянии. Уравнение (4б) в пренебрежении стрикцией и тепловым расширением переходит в уравнение для свободных звуковых волн. Относительное изменение объема при движении фронта фазового перехода в среде определяется уравнением $u_{ii} = (\rho_0 + \rho)/\rho_0$, где ρ — скалярное поле плотности, отсчитываемое от ρ_0 — плотности недеформированной фазы. В уравнении теплопроводности (4в) S является плотностью энтропии системы, $S = S_0(T) + S_1(\varphi) + S_2(u_{ii})$, где $S_0(T)$ — основная температурная часть плотности энтропии, $S_1(\varphi) = \mu\varphi$ с $\mu = h/(T - T_0)$ и T_0 — температурой равновесного фазового перехода I рода, $S_2(u_{ii}) = -\sigma u_{ii}$ — термоупругий член в плотности энтропии. Согласно (3), система (4) примет вид

$$\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = d\Delta\varphi + a\varphi - b\varphi^3 + h(T - T_0) - \beta\rho, \quad (5a)$$

$$\partial^2\rho/\partial t^2 = s^2\Delta\rho + \beta\Delta\varphi + \sigma\Delta T, \quad (5б)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \mu T \frac{\partial\varphi}{\partial t} - T \frac{\sigma}{\rho_0} \frac{\partial\rho}{\partial t} = \kappa\Delta T, \quad (5в)$$

где c — теплоемкость; κ — коэффициент температуропроводности; s — скорость звука; c, κ, s мы примем для простоты постоянными, одинаковыми в обеих фазах.

Определим условия, при которых имеется решение системы (5) в виде фронта $\varphi^0(x-vt)$, $\rho^0(x-vt)$, $T^0(x-vt)$, движущегося со скоростью v . Как будет показано в п. 2, учет стрикционного члена в уравнениях (5а), (5б) существен в некоторой области скоростей фронта фазового перехода, близких к скорости звука. Температурное влияние на динамику фронта в этой области менее существенно, так как быстрый процесс носит адиабатический характер, что приводит к перенормировке коэффициентов разложения Ландау [1]. Тепловое расширение в силу линейности уравнений (5а), (5б) относительно величин ρ, T приводит лишь к поправке к коэффициенту стрикции β . Таким образом, в настоящей работе мы исключим из рассмотрения поле температур T и в уравнениях (5а), (5б) вместо обычных

(изотермических) значений коэффициентов будем брать их адиабатические значения.

Введем безразмерные переменные: линейный размер x в единицах $\sqrt{2d/a}$; время t в единицах $2/\Gamma a$, параметр порядка φ в единицах $\sqrt{a/b}$, скорость звука s в единицах $\sqrt{8d/\Gamma^2 a^3}$, h в единицах $a^{3/2}/2b^{1/2}$, коэффициент линейной стрижки β в единицах $\Gamma a/2$. В безразмерных единицах уравнения на $\varphi(r, t)$, $\rho(r, t)$ примут вид

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + 2(\varphi - \varphi^3) + h - \beta\rho, \quad \partial^2\rho/\partial t^2 = s^2\Delta\rho + \beta\Delta\varphi. \quad (6a), (6b)$$

2. Устойчивость плоского фронта фазового перехода

Решение системы уравнений (6), отвечающее плоскому фронту и недеформированной $\langle\varphi_+\rangle$ фазе, есть

$$\rho_1 = \beta \frac{\varphi_1 - \varphi_+}{v^2 - s^2}, \quad (7a)$$

$$\varphi_1 = \sqrt{g} \operatorname{th}(\sqrt{g}(x - vt)) + \frac{h + 2\eta\sqrt{g}}{4g}; \quad g = 1 + \frac{\eta}{v^2 - s^2}, \quad \eta = \frac{\beta^2}{2}, \quad (7b)$$

$$v = -\frac{3}{2} \frac{h + 2\eta\sqrt{g}}{g}. \quad (7b)$$

Решение (7) имеет смысл при выполнении условия $(h + 2\eta\sqrt{g})/4g \ll \sqrt{g}$ (неспинодальная релаксация φ), в соответствии с чем мы ограничиваемся изучением решения (7) для $\eta \ll c^2$. Параметр η определяет скачок плотности.

Уравнение (7b) задает неявным образом зависимость скорости движения

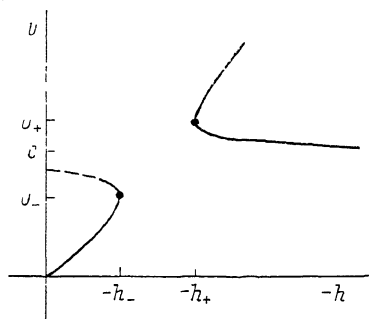


Рис. 1. Зависимость скорости движения фронта фазового перехода от внешнего поля.

Штрихом отмечена область, в которой релаксационное решение вида (7) не определено. $(\partial h/\partial v)_{v=\pm} = 0$, $|v_{\pm} - s| \approx \approx \sqrt{\eta/2}$.

фронта от внешней силы $v(h)$ (для доменной стенки в ферромагнетике h — внешнее магнитное поле) (рис. 1). Имеется область полей $-h^- < -h < < -h^+$, для которых не существует решения системы (6) в виде плоского фронта. При $v^- < v < s$, $g \ll 1$ фронт размывается (ширина фронта $\sim 1/\sqrt{g} \gg 1$). Кроме того, параметр в разложении, по которому получено (7b), перестает быть малым (на рис. 1 эта область соответствует штриховой линии).

Исследуем линейную устойчивость системы (7) относительно возмущений φ и ρ

$$\varphi = \varphi_1(x - vt) + \lambda(r, t), \quad \lambda \ll \varphi_1; \quad \rho = \rho_1(x - vt) + \zeta(r, t), \quad \zeta \ll \rho_1. \quad (8)$$

Линеаризуя уравнение (7) относительно λ , ζ и исключая из системы (8) одну переменную, например ζ , имеем операторное уравнение на λ

$$\hat{H}\lambda = -({}_1\hat{U} + {}_2\hat{U})\lambda, \quad (9a)$$

$$\hat{H} = \partial/\partial t - \Delta - 2g(1 - 3\operatorname{th}^2(\sqrt{g}(x - vt))), \quad (9b)$$

$${}_1\hat{U} = 2\eta\hat{L}^{-1}\Delta, \quad \hat{L} = \partial^2/\partial t^2 - s^2\Delta, \quad (9b)$$

$${}_2\hat{U} = 3\sqrt{g}(h + 2\eta\sqrt{g})\operatorname{th}(\sqrt{g}(x - vt)). \quad (9b)$$

Правую часть (9а) будем рассматривать как возмущение по малым параметрам h, η невозмущенного уравнения

$$\hat{H}\lambda = 0. \quad (10)$$

Для решения уравнения (10) перейдем к новым переменным $x' = x - vt, t' = t$, связанным с движущимся фронтом. λ будем искать в виде

$$\lambda = e^{-(v/2)x'} e^{-i\omega t'} f(x') e^{-ik_{\perp} r_{\perp}}, \quad (11)$$

где $\omega = \Omega + i\gamma$ — комплексная частота; k_{\perp} — волновой вектор в плоскости, перпендикулярной направлению движения фронта. Уравнение (10) имеет вид уравнения Шредингера с потенциальной ямой Пешля—Теллера. Она имеет два дискретных собственных значения $i\omega'_1 = k_{\perp}^2 + v^2/4 > 0$ и $i\omega'_2 = k_{\perp}^2 + v^2/4 + 3g$ с собственными функциями $f_1 = \sqrt{3\sqrt{g}/4} (\text{ch}(\sqrt{g}x))^{-2}$ и $f_2 = \sqrt{3\sqrt{g}/2} \text{sh}(\sqrt{g}x) (\text{ch}(\sqrt{g}x))^{-1}$ соответственно, а также непрерывный спектр $-i\omega'_{k_x} = k_{\perp}^2 + v^2/4 + 4g + k_x^2$ с $f_{k_x} = N_k e^{ik_x x} (3 \text{th}^2(\sqrt{g}x) - 1 - k_x^2/g - g^{-1/2} \cdot 3ik_x \text{th}(\sqrt{g}x))$, где $N_k^{-2} = 4\pi (2(k_x^2/(2g+1))^2 + k_x^2/2g)$. Имея в виду исследование сверхзвукового решения (7) с $g \geq 1$, мы учли при нормировке собственных функций $v \ll \sqrt{g}$. Таким образом, все решения невозмущенного уравнения (10) устойчивы ($\Omega = 0, \gamma < 0$).

Исследование на устойчивость возмущенного уравнения (9а) с возмущением (9в), (9г) также удобно производить в переменных x', t' (далее везде штрихи опускаем). Основным претендентом на появление неустойчивости является первый дискретный уровень. Отметим, что первый дискретный уровень является голдстоуновской модой исходного решения (7б), т. е. представляет из себя возмущение формы границы раздела фаз — морфологическое возмущение ($k_{\perp} \neq 0$) и возмущение скорости границы ($k_{\perp} = 0$). Имеет смысл изучать только $k_{\perp}^2 \ll g$, для которых применима теория возмущений. Кроме того, возмущения с $k_{\perp}^2 \gg g$ должны описываться на атомном уровне.

В первом порядке теории возмущений поправка к собственному значению первого дискретного уровня принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} [U(\omega, k_{\perp}^2, v) = & \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) U f_1(x) dx = -\frac{3}{8} \sqrt{g} \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}^2(\sqrt{g}x)} \times \\ & \times \hat{L}^{-1} \left(k_{\perp}^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{dx}{\text{ch}^2(\sqrt{g}x)}. \end{aligned} \quad (12)$$

В выражении (12) учтено, что матричный элемент ${}_2U_{11}$ от возмущения ${}_2\hat{U}$ в первом порядке теории возмущений равен нулю. Вводя действие обратного оператора через двойное интегрирование, имеем (12) в явном виде

$$\begin{aligned} U(k_{\perp}^2, \omega, v) = & -\frac{3}{4} \frac{i\eta}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 s^2 + (v^2 - s^2) k_{\perp}^2 s^2}} \times \\ & \times \left\{ k_{\perp}^2 \left[M \left(-\frac{i}{2\sqrt{g}} \frac{(v\omega - \sqrt{\omega^2 s^2 + (v^2 - s^2) k_{\perp}^2 s^2})}{v^2 - s^2} \right) - \right. \right. \\ & - M \left(-\frac{i}{2\sqrt{g}} \frac{(v\omega + \sqrt{\omega^2 s^2 + (v^2 - s^2) k_{\perp}^2 s^2})}{v^2 - s^2} \right) \left. \right] + \\ & + g \left[P \left(-\frac{i}{2\sqrt{g}} \frac{(v\omega - \sqrt{\omega^2 s^2 + (v^2 - s^2) k_{\perp}^2 s^2})}{(v^2 - s^2)} \right) - \right. \\ & \left. \left. - P \left(-\frac{i}{2\sqrt{g}} \frac{(v\omega + \sqrt{\omega^2 s^2 + (v^2 - s^2) k_{\perp}^2 s^2})}{(v^2 - s^2)} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$M(z) = 4z^2\psi'(z) - 4z - 2$, $P(z) = 16z^4\psi'(z) - 16z^3 - 8z^2 - 8/3z$, $\psi'(z)$ — три-гамма-функция.

Дисперсионное соотношение для решения (10а) в виде (12) есть

$$i\omega = k_{\perp}^2 + v^2/4 + U(\omega, k_{\perp}^2, v). \quad (14)$$

(14) — комплексное выражение, являющееся функцией от комплексной величины ω , — содержит в себе неявную связь $\gamma(k_{\perp}^2, v)$, интересующую нас. В пространстве $k_{\perp}^2 - v$ области неустойчивости ограничены кривыми $\gamma(k_{\perp}^2, v) = 0$. Три-гамма-функция от мнимого аргумента действительна и выражается через элементарные функции. Это позволяет получить уравне-

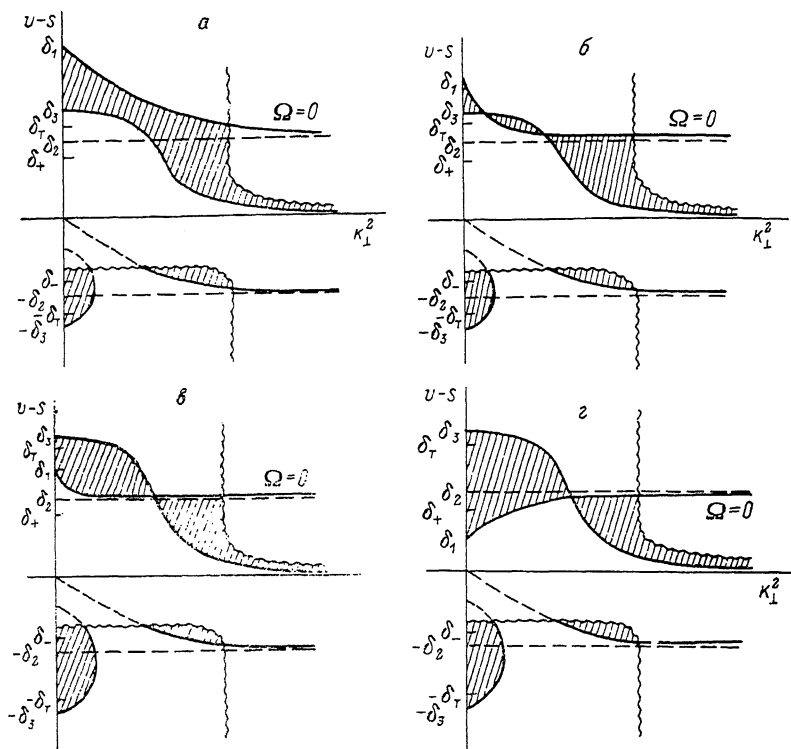


Рис. 2. Характер линейной устойчивости в пространстве $(v-s) - k_{\perp}^2$.

Заштрихованная область неустойчива. Волнистые линии ограничивают области, где решение (7) не определено. $\delta_1 = 4\eta/s^2$, $\delta_2 = \sqrt{3}\eta/4$, $\delta_3 = \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{\eta/s}$, $\delta_{\pm} = \pm \sqrt{\eta/2}$, $\eta \gg s'$ (а), $s' \gg \eta > 3/8 s^2$ (б), $3/8 \cdot s^2 > \eta > 3/64 \cdot s^2$ (в), $\eta < 3/64 s^2$ (г).

ния кривых, ограничивающих области неустойчивости, как решения системы

$$\Omega = \frac{3\pi^2}{2} \frac{\eta}{\sqrt{\Omega^2 s^2 + (v^2 - s^2) k_{\perp}^2 s^2}} \frac{1}{\sqrt{g}} \left[k_{\perp}^2 \left(\frac{z_1^2}{\text{sh}^2 \pi z_1} - \frac{z_2^2}{\text{sh}^2 \pi z_2} \right) + 4g \left(\frac{z_1^4}{\text{sh}^2 \pi z_1} - \frac{z_2^4}{\text{sh}^2 \pi z_2} \right) \right], \quad (15a)$$

$$k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{3\eta}{4(v-s)^2} \right) + \frac{v^2}{4} = \frac{\eta}{(v-s)s} + \frac{3}{2} \frac{\Omega^2}{(v-s)^3 s}, \quad (15б)$$

где

$$z_{1,2} = [v\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 s^2 + k_{\perp}^2 s^2 (v^2 - s^2)}] / 2\sqrt{g}(v^2 - s^2).$$

Для околосвукового движения предполагаем $z_{1,2} \ll 1$. Это предположение существенно упрощает (15), и конечный результат полностью согласуется

с ним. Кривыми, ограничивающими область устойчивости, оказываются (рис. 2)

$$v - s = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi \sqrt{\eta}}{g^2 / s^{1/2}} \sqrt{\frac{4g}{\pi^2} - \frac{k_{\perp}^2}{3}}, \quad (16a)$$

$$k_{\perp}^2 = -\frac{s^2}{4} \frac{(v-s)((v-s) - 4\eta/s^3)}{(v-s)^2 - 3\eta/4}, \quad (16b)$$

причем кривая (16b) соответствует неосциллирующим ($\Omega=0$) решениям.

Для дозвуковых скоростей в некоторой окрестности v_{\pm} плоский фронт неустойчив относительно изменения скорости ($k_{\perp}=0$). Для дозвуковых скоростей движения фронта, близких к области неустойчивости (рис. 1 — это штриховая линия, на рис. 2 — волнистая линия), к длинноволновой неустойчивости добавляется морфологическая коротковолновая неустойчивость, размывающая фронт.

При сверхзвуковых скоростях, близких к s , фронт расплывается, обнаруживая морфологическую неустойчивость. Для более высоких скоростей движения фронта устойчивость зависит от η . Для $s^3 > \eta > s^3/64s^6$ существует область скоростей, где реализуется особый режим, когда фронт неустойчив относительно k_{\perp}^2 из конечного диапазона волновых векторов (рис. 2, $a-e$). Скорость особого режима всегда больше v_{\pm} (рис. 1). Режимы с еще более высокими скоростями имеют длинноволновую неустойчивость, которая исчезает при $v = \max(v_1, v_2)$ (рис. 2). Термодинамическая устойчивость начального и конечного состояний требует выполнения неравенства $\partial\varphi_{\pm}/\partial h > 0$. Это условие выполняется при $|\delta| < \sqrt{\eta/(g^{1/2}s)} = \delta_T$, где $\delta = v - s$. Но δ_T меньше δ_3 для всех значений η . Таким образом, абсолютная устойчивость фронта фазового перехода (устойчивость относительно малых возмущений) имеет место только для термодинамически устойчивых начального и конечного состояний.

Нелинейная стадия развития неустойчивости требует особого рассмотрения. Ожидается, что нелинейные члены носят диссипативный характер, тогда рост неустойчивости останавливается на конечной амплитуде. Длина волны в плоскости границы раздела возмущенного фронта определяется гармоникой k_{\perp}^* , имеющей максимальный инкремент нарастания в линейном приближении. Движение сверхзвукового фронта сопровождается черенковским излучением с k_{\perp}^* . Возможным становится образование структуры на границе раздела фаз.

Эксперимент и некоторый расчет в специальной ситуации сверхзвукового движения доменной стенки в ортоферрите проведен в работе [3], где получен особый режим со специальной структурой фронта.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Паташинский А. З., Чертков М. В. // Препринт 89-117, Новосибирск, ИЯФ СО АН СССР, 1989.
- [2] Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 384 с.
- [3] Четкин М. В., Звездин А. К. и др. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 1. С. 269—279.

Институт ядерной физики
СО АН СССР
Новосибирск

Поступило в Редакцию
30 декабря 1989 г.