УДК 539.143.43

О СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ ЯДЕРНОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ В МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ МАТЕРИАЛАХ

Л. Л. Буишвили, Н. П. Гиоргадзе

Показано, что слабонелинейные длинноволновые возмущения намагниченности в ядерной спин-системе с сул-накамуровским взаимодействием, находящейся в магнитоупорядоченной «угловой» фазе, описываются уравнением Кортевега—де Вриза. Вычислены ширина солитона ядерной намагниченности и поправка к групповой скорости линеаризованных спиновых волн. Установлены условия применимости полученных результатов.

В работах [1, 2] была установлена возможность возникновения в ферромагнетиках солитонов ядерной намагниченности. Последующие теоретические и экспериментальные исследования акустической самоиндуцированной прозрачности в некоторых антиферромагнетиках [3–5] явились, на наш взгляд, достаточно убедительным подтверждением существования солитонов намагниченности в ядерной спин-системе с сул-накамуровским взаимодействием. Существенно, что ядерная спин-система в ферромагнетиках представляет собой сильнодиспергирующую нелинейную среду [6], вследствие чего слабонелинейные модулированные волны в ней описываются нелинейным уравнением Шредингера.

С другой стороны, недавно было предсказано существование в магнитоупорядоченных материалах при сверхнизких температурах магнитоупорядоченной «угловой» фазы ядерной спин-системы [7, 8] При этом в работе [8] были исследованы ядерные спиновые волны в этом состоянии. Из результатов упомянутой работы следует, что в случае ферромагнетиков (рассмотрением которых ограничимся) находящаяся в «угловой» фазе ядерная спин-система является слабодиспергирующей нелинейной средой [6]. Поэтому естественно ожидать, что в ней могут возбуждаться слабонелинейные длинноволновые возмущения ядерной намагниченности, описываемые известным уравнением Кортевега—де Вриза [9].

Настоящая работа посвящена конкретному исследованию этого вопроса.

1. Классические уравнения движения ядерной намагниченности m, описывающие динамику ядерной спин-системы с сул-накамуровским взаимодействием, имеют вид [10]

$$\partial \mathbf{m}/\partial t = g_n [\mathbf{m}\mathbf{H}^{(ef)}], \tag{1}$$

где эффективное магнитное поле

$$\mathbf{H}^{(ef)} = \mathbf{e}_z \delta H_n + \int d\mathbf{r}' \chi (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{m}_\perp (\mathbf{r}'),$$

$$\chi (\mathbf{r}) = -\frac{g M_0 A^2}{V} \sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{\omega_{\mathbf{q}}}, \tag{2}$$

$\delta H_n = | H^{(ст)} - H_0 |$; $H^{(ст)}$ — статическая часть действующего на ядерные спины сверхтонкого поля; H_0 — постоянное магнитное поле; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, ориентированный вдоль большего из полей $H^{(\text{ст})}$ и H_0 (эти поля предполагаются антипараллельными); $g_n > 0$ и $g < 0$ — гиромагнитные отношения для ядерных и электронных спинов соответственно; A — константа сверхтонкого взаимодействия; M_0 — намагниченность электронов; V — объем образца; $\mathbf{m}_\perp$ — поперечная (относительно оси z) составляющая ядерной намагниченности; $\omega_q = g(H_0 + \alpha M_0 q^2)$ — частота магнона.

Система уравнений (1) приводит к условию статического равновесия

$$m_{0x}(\delta H_n - \chi_0 m_{0z}) = 0, \quad m_{0y} = 0, \quad \chi_0 = -g M_0 A^2/\omega_0,$$

которое при $\delta H_n/\chi_0 m_0 < 1$ допускает существование «угловой» фазы

$$m_{0z} = m_0 \cos\varphi, \quad m_{0x} = m_0 \sin\varphi, \quad \cos\varphi = \delta H_n/\chi_0 m_0,$$

энергетически более выгодной, чем колинеарная $m_{0x}=0$. Мы будем предполагать это условие выполненным, в соответствии с чем считать, что ядерная спин-система находится в «угловой» фазе.

Закон дисперсии спиновых волн легко получается из системы уравнений (1) подстановкой в нее $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$, линеаризацией по отклонению от равновесия $\delta m(r, t)$ и представлением последнего в виде

$$\delta\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega)\, e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} + \text{к. с.}$$

После элементарных вычислений приходим к результату работы [8] (полученному в рамках квантовой теории), который представим в виде

$$\omega^2 = (g_n m_0 \chi_0)^2 \left(1 - \frac{\chi_k}{\chi_0}\right)\left(1 - \frac{\chi_k}{\chi_0}\cos\varphi\right), \tag{3}$$

где

$$\chi_k = -g M_0 A^2/\omega_k.$$

В длинноволновом пределе отсюда находим

$$\omega = \lambda_0 k + \beta k^3 + \ldots, \tag{3а}$$

где

$$\lambda_0 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_0 = g_n m_0 \eta^2 \left(\frac{H_0}{\alpha M_0}\right)^{1/2} \alpha \sin\varphi, \quad \beta = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial k^3}\right)_0 = g_n m_0 \eta^2 \left(\frac{\alpha M_0}{H_0}\right)^{1/2} \alpha \frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\eta = \frac{A M_0}{H_0}.$$

При этом должно иметь место

$$\alpha k^2 \ll (H_0/M_0)\,|1 - \operatorname{ctg}^2\varphi|^{-1}.$$

Следует заметить, что знак коэффициента β зависит от угла φ, причем при $\varphi=\pi/4$ β обращается в нуль.

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом нами случае ядерная спин-система представляет собой слабодиспергирующую нелинейную среду [6].

2. Приступим теперь к рассмотрению таких возмущений ядерной намагниченности, пространственные масштабы изменения которых значительно превосходят радиус сул-накамуровского взаимодействия R_{SN}. В этом случае в выражении (2) можно разложить $\mathbf{m}_\perp(\mathbf{r}')$ в окрестности точки $\mathbf{r}$, в результате чего после некоторых вычислений получим

$$\mathbf{H}^{\text{ef}} = \mathbf{e}_z \delta H_n + \chi_0 \mathbf{m}_\perp - \frac{1}{2}\chi_0^{(2)} \Delta\mathbf{m}_\perp + \frac{1}{24}\chi_0^{(4)} \Delta\Delta\mathbf{m}_\perp + \ldots, \tag{4}$$

$$\chi_0^{(n)} = \partial^n \chi_k/\partial k^n|_0.$$

Подставляя (4) в (1), придем к следующему уравнению для возмущенной части ядерной намагниченности:

$$\frac{\partial\delta\mathbf{m}}{\partial t}=g_n\chi_0\delta m_z[\mathbf{e}_z\mathbf{m}_{\perp 0}]-\frac{1}{2}g_n\chi_0^{(2)}[\mathbf{m}_0\Delta\delta\mathbf{m}_\perp]+\frac{1}{24}g_n\chi_0^{(4)}[\mathbf{m}_0\Delta\Delta\delta\mathbf{m}_\perp]+g_n\chi_0\delta m_z[\mathbf{e}_z\delta\mathbf{m}_\perp]-$$

$$-\frac{1}{2}g_n\chi_0^{(2)}[\delta\mathbf{m}\Delta\delta\mathbf{m}_\perp]+\frac{1}{24}g_n\chi_0^{(4)}[\delta\mathbf{m}\Delta\Delta\delta\mathbf{m}_\perp], \tag{5}$$

которое дополним соотношением

$$2\mathbf{m}_0\delta\mathbf{m}+(\delta\mathbf{m})^2=0, \tag{6}$$

являющимся следствием сохранения величины ядерной намагниченности.

Заметим, что в линейном по $\delta\mathbf{m}$ приближении из системы уравнений (5) прямо следует длинноволновый предел закона дисперсии ядерных спиновых волн (3а).

Переходя к исследованию слабонелинейных модулированных возмущений ядерной намагниченности, ограничимся одномерными волнами, распространяющимися вдоль оси z ($\Delta\equiv\partial^2/\partial z^2$). Уравнения, описывающие пространственно-временну́ю эволюцию этих возмущений, могут быть построены в рамках методики, развитой в работе [11], после несколько громоздких вычислений. Мы, однако, существенно сократим объем вычислений, если, опираясь на известные результаты теории слабонелинейных волн в слабодиспергирующих средах [6] (а также на результаты последовательного расчета, предписываемого методикой [11]), представим искомые величины в виде степенны́х рядов по малому параметру ε (малость которого связана с малостью амплитуды возмущения)

$$m_y(z,t)=\varepsilon m_y^{(1)}(\zeta_1,\tau_3)+\varepsilon^3 m_y^{(3)}(\zeta_1,\tau_3)+\ldots,\quad m_x(z,t)=\varepsilon^2 m_x^{(2)}(\zeta_1,\tau_3)+$$
$$+\varepsilon^4 m_x^{(4)}(\zeta_1,\tau_3)+\ldots,\quad m_z(z,t)=\varepsilon^2 m_z^{(2)}(\zeta_1,\tau_3)+\varepsilon^4 m_z^{(4)}(\zeta_1,\tau_3)+\ldots, \tag{7}$$

где $\zeta_1=\varepsilon(z-\lambda_0 t)$, $\tau_3=\varepsilon^3 t$. Подставляя разложения (7) в систему уравнений (5) и соотношение (6) и используя для операций пространственно-временно́го дифференцирования представление

$$\frac{\partial}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta_1},\qquad \frac{\partial}{\partial t}=-\varepsilon\lambda_0\frac{\partial}{\partial\zeta_1}+\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial\tau_3},$$

после некоторых вычислений получим совокупность соотношений, вытекающих из приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях ε.

В частности, во втором порядке по ε амплитуды $m_x^{(2)}$ и $m_z^{(2)}$ оказываются выраженными через $m_y^{(1)}$

$$m_z^{(2)}=-\frac{\lambda_0}{g_n m_{0x}\chi_0}\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial\zeta_1},\qquad m_x^{(2)}=-\frac{m_{0z}}{m_{0x}}m_z^{(2)}-\frac{m_y^{(1)2}}{2m_{0x}}, \tag{8}$$

причем амплитуда $m_y^{(1)}$ остается пока произвольной.

В четвертом порядке по ε $m_x^{(4)}$ и $m_z^{(4)}$ выражаются через [1] $m_y^{(1)}$ и $m_y^{(3)}$

$$m_z^{(4)}=\frac{1}{g_n m_{0x}\chi_0}\left(\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial\tau_3}-\lambda_0\frac{\partial m_y^{(3)}}{\partial\zeta_1}\right)+\frac{\lambda_0 m_{0z}^2\chi_0^{(2)}}{2g_n m_{0x}^3\chi_0^2}\frac{\partial^3 m_y^{(1)}}{\partial\zeta_1^3}-\frac{m_{0z}\chi_0^{(2)}}{2m_{0x}^2\chi_0}m_y^{(1)}\frac{\partial^2 m_y^{(1)}}{\partial\zeta_1^2}-$$
$$-\frac{\lambda_0}{2g_n m_{0x}^3\chi_0}m_y^{(1)2}\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial\zeta_1}-\frac{m_{0z}\chi_0^{(2)}}{m_{0x}^2\chi_0}\left(\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial\zeta_1}\right)^2,$$

$$m_x^{(4)}=-\frac{m_{0z}}{m_{0x}}m_z^{(4)}-\frac{m_y^{(1)}m_y^{(3)}}{m_{0x}}-\frac{1}{2m_{0x}}\left(m_x^{(2)2}+m_z^{(2)2}\right). \tag{9}$$

При этом амплитуда $m_y^{(3)}$ также остается произвольной.

В пятом порядке по ε получаем два условия

---

[1] Все коэффициенты при членах ε^2 обращаются в нуль автоматически.

$$-\lambda_0 \frac{\partial m_z^{(4)}}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial m_z^{(2)}}{\partial \tau_3} + \frac{1}{2} g_n m_{0x} \chi_0^{(2)} \frac{\partial^2 m_y^{(3)}}{\partial \zeta_1^2} - \frac{1}{24} g_n m_{0x} \chi_0^{(4)} \frac{\partial^4 m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1^4} + $$
$$+ \frac{1}{2} g_n \chi_0^{(2)} \left(m_x^{(2)} \frac{\partial^2 m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} - m_y^{(1)} \frac{\partial^2 m_x^{(2)}}{\partial \zeta_1^2} \right) = 0,$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial m_x^{(4)}}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial m_x^{(2)}}{\partial \tau_3} - \frac{1}{2} g_n m_{0z} \chi_0^{(2)} \frac{\partial^2 m_y^{(3)}}{\partial \zeta_1^2} + \frac{1}{24} g_n m_{0z} \chi_0^{(4)} \frac{\partial^4 m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1^4} -$$
$$- \frac{1}{2} g_n \chi_0^{(2)} m_z^{(2)} \frac{\partial^2 m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} + g_n \chi_0 \left(m_z^{(2)} m_y^{(3)} + m_z^{(4)} m_y^{(1)} \right) = 0,$$

которые, как можно показать, являются взаимосвязанными. Подставляя в первое из них выражения (8) и (9) и проводя надлежащие вычисления, придем к искомому уравнению, описывающему пространственно-временную эволюцию $(\partial m_y^{(1)}/\partial \zeta_1)$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau_3} \left(\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1} \right) - \beta \frac{\partial^3}{\partial \zeta_1^3} \left(\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1} \right) - \frac{3 g_n m_{0z} \chi_0^{(2)}}{2 m_{0x}} \left(\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial m_y^{(1)}}{\partial \zeta_1} \right) = 0. \qquad (10)$$

Отсюда с использованием выражения (8) приходим к уравнению для $m_z^{(2)}(\zeta_1, \tau_3)$

$$\frac{\partial m_z^{(2)}}{\partial \tau_3} - \beta \frac{\partial^3 m_z^{(2)}}{\partial \zeta_1^3} - \frac{3 \lambda_0 m_{0z}}{m_{0x}^2} m_z^{(2)} \frac{\partial m_z^{(2)}}{\partial \zeta_1} = 0. \qquad (11)$$

Пусть сперва $\beta < 0$ (т. е. $\varphi > \pi/4$). Тогда легко видеть, что $u^{(2)} = -(3 m_{0z} \lambda_0 / m_{0x}^2)\, m_z^{(2)}$ удовлетворяет уравнению Кортевега—де Вриза

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \tau_3} + |\beta| \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial \zeta_1^3} + u^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \zeta_1} = 0,$$

имеющему солитонное решение

$$u^{(2)} = u_0^{(2)} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{u_0^{(2)}}{12 |\beta|}} \left(\zeta_1 - \frac{u_0^{(2)}}{3} \tau_3 \right) \right), \qquad u_0^{(2)} > 0.$$

Отсюда для исчезающего на бесконечности решения уравнения (11) имеем

$$m_z^{(2)} = -m_{z0}^{(2)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{\Lambda} \left(\zeta_1 - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{m_{z0}^{(2)}}{m_0} \lambda_0 \tau_3 \right) \right], \qquad (12)$$

где

$$\Lambda = \left(\frac{2 |\cos 2\varphi|}{\cos \varphi} \frac{m_0}{m_{z0}^{(2)}} \right)^{1/2} R_{SN} \qquad \left(R_{SN} = (a M_0 / H_0)^{1/2}, \quad m_{z0}^{(2)} > 0 \right)$$

характеризует ширину солитона намагниченности. При этом, согласно принятому в начале настоящего раздела предложению, должно иметь место условие

$$\frac{R_{SN}}{\Lambda} \sim \left(\frac{\cos \varphi}{|\cos 2\varphi|} \frac{m_{z0}^{(2)}}{m_0} \right)^{1/2} \ll 1. \qquad (13)$$

Еще одно ограничение на амплитуду $m_{z0}^{(2)}$ вытекает из требования малости поправки к групповой скорости линейного приближения

$$\frac{\delta \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{m_{z0}^{(2)}}{m_0} \ll 1. \qquad (14)$$

Нетрудно, однако, видеть, что в интервале углов $\pi/2 \geqslant \varphi > \pi/4$ условие (13) является определяющим. При любом заданном φ ему в принципе можно удовлетворить надлежащим выбором амплитуды $m_{z0}^{(2)}$.

Заметим еще, что в рассматриваемом случае z-компонента намагниченности в солитоне антипараллельна m_{0z}.

Пусть теперь $\beta > 0$ (т. е. $\varphi < \pi/4$). Переходя к переменной $\eta_1 = -\zeta_1$, убеждаемся, что уравнению Кортевега—де Вриза удовлетворяет $v^{(2)} =$

$=(3m_{0z}\lambda_0/m_{0x}^2)\, m_z^{(2)}$, причем соответствующее солитонное решение имеет вид

$$v^{(2)}=v_0^{(2)}\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{v_0^{(2)}}{12\beta}}\left(\eta_1-\frac{v_0^{(2)}}{3}\tau_3\right)\right),\qquad v_0^{(2)}>0.$$

Отсюда для исчезающего на бесконечности решения уравнения (11) получим

$$m_z^{(2)}=m_{z0}^{(2)}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{\Lambda}\left(\zeta_1+\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,\frac{m_{z0}^{(2)}}{m_0}\,\lambda_0\tau_3\right)\right].\tag{15}$$

Как и в предыдущем случае, это решение справедливо при выполнении условий (13), (14). Очевидно, при этом, что для углов, близких к $\pi/4$, определяющим является условие (13), в то время как для углов, близких к нулю, — условие (14).

Заметим также, что теперь z-компонента намагниченности в солитоне параллельна m_{0z}.

Наконец, заметим, что при $\varphi=\pi/4$ ($\beta=0$) в уравнении (11) исчезает член, содержащий $\partial^3 m_z^{(2)}/\partial\zeta_1^3$. Поэтому волновые процессы в окрестности $\varphi=\pi/4$ требуют специального рассмотрения [12]. Мы, однако, не касаемся этого вопроса в настоящей работе.

Список литературы

[1] Buishvili L. L., Volzhan E. B., Giorgadze N. P., Pataraya A. D. // Phys. St. Sol. (b). 1976. V. 75. N 1. P. K69—K74.

[2] Волжан Е. Б., Гиоргадзе Н. П., Патарая А. Д. // ФТТ. 1976. Т. 18. № 9. С. 2546—2555.

[3] Лукомский В. П. // УФЖ. 1979. Т. 24. № 7. С. 975—982.

[4] Богданова Х. Г., Голенищев-Кутузов В. А., Монахов А. А., Кузько А. В., Лукомский В. П., Човнюк Ю. В. // Тез. докл. XXI Всес. совещ. по физике низких температур. 1980. Ч. II. С. 86.

[5] Богданова Х. Г., Голенищев-Кутузов В. А., Монахов А. А., Кузько А. В., Лукомский В. П., Човнюк Ю. В. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. № 7. С. 476—479.

[6] Taniuti T. // Progr. Theor. Phys. (Suppl.). 1974. N 55. P. 1—35.

[7] Цифринович В. И., Игнатченко В. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. № 9. С. 968—974.

[8] Сафонов В. Л. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 11. С. 263—270.

[9] Карпман В. И. // Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973. С. 175.

[10] Туров Е. А., Куркин М. И., Николаев В. В. // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. № 1. С. 283—295.

[11] Kono M. // Progr. Theor. Phys. (Suppl.). 1974. N 55. P. 80—96.

[12] Hunter I. K., Scheurle J. // Physica (D.) 1988. V. 32. N 2. P. 253—268.

Институт физики АН ГрузССР
Тбилиси

Поступило в Редакцию
3 января 1990 г.