УДК 535.343.2; 535 : 548


# ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СУБСВЕТОВЫХ СКОРОСТЯХ

*Л. А. Коваленко, К. Б. Толпыго*

На основе микроскопической теории черенковского излучения [1, 2] рассмотрена генерация светоэкситонов полем электрона,скорость которого меньше скорости света в среде. Рожденные при малых скоростях светоэкситоны по своим характеристикам ближе к так называемым «механическим» или «кулоновским» экситонам [3, 4] и их электромагнитная составляющая представляет собой лишь небольшую часть полной энергии. Однако эти светоэкситоны, рассеиваясь на колебаниях решетки, с определенной вероятностью попадают в область малых волновых векторов $k \ll 1/a$ и, преодолевая за счет теплового движения небольшой барьер (в случае отрицательной эффективной массы «обычного» экситона), переходят на почти прямолинейный участок закона дисперсии $\omega \approx ck/\sqrt{\varepsilon_\infty}$, а затем высвечиваются с частотой в пределах от нуля до некоторого $\omega_{max}$. Расчеты интенсивности излучения для разных скоростей и ветвей светоэкситонов проведены применительно к параметрам кристаллического Ne.

В макроскопической теории черенковского излучения [5, 6] распределение излучения по частотам выражается через диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$, учитывается, в частности, временна́я и пространственная дисперсии (в области малых $k \ll 1/a$). При этом излучение возникает лишь при сверхсветовых скоростях электрона $v > u = c/\sqrt{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}$.

Для получения интенсивности излучения нужно знать зависимость $\varepsilon$ от частоты и волнового вектора $\mathbf{k}$. Часто используемые разложения $\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1}$ по степеням $\mathbf{k}$ оказываются не всегда возможными именно в окрестности экситонного резонанса, как это, в частности, показал Пекар [7].

В микроскопической теории распространения света в кристалле [1] черенковское излучение выступает как процесс рождения светоэкситонов [3, 4] полем движущегося электрона [2]. При этом должно выполняться условие двойного резонанса по частоте и волновому вектору. Если $\omega(\mathbf{k})$ — закон дисперсии для светоэкситона, а частоты Фурье-разложения *поля электрона, движущегося прямолинейно и равномерно* со скоростью $\mathbf{v}$, равны $\mathbf{kv}$, то возникает уравнение

$$\omega(k) = kv\cos\theta, \tag{1}$$

где $\theta$ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$.

На рис. 1 изображены две кривые дисперсии для светоэкситонов, когда эффективная масса «обычного экситона» положительна или отрицательна. Существенно, что в области больших $k \sim 1/a$ светоэкситонные частоты оказываются ограниченными (скажем, частотами возбуждения атомов $\omega_i$) и поэтому равенство (1) за счет больших $k$ может быть выполнено даже при $v \ll c/\sqrt{\varepsilon_\infty}$.

Разумеется, рожденный таким образом светоэкситон весьма далек от света в обычном смысле слова. Большая часть его энергии не электромагнитной природы, а представляет просто энергию возбуждения атомной системы. Такой светоэкситон практически не может выйти из кристалла: вследствие выполнения условия Декарта $\sin\alpha/\sin\beta = 1/\sqrt{\varepsilon_\infty}$ при $n \gg 1$ он почти всегда испытывает полное внутреннее отражение на границе.

Однако вследствие рассеяния на фононах волновой вектор $\mathbf{k}$ может после ряда соударений уменьшиться до величины, сравнимой с волновым вектором света той же частоты в вакууме.

Этот процесс схематически изображен на рис. 1 волнистой линией со стрелкой. Попадая в область почти прямолинейного участка закона дисперсии, где $k \approx \omega\sqrt{\varepsilon_\infty}/c$, такие светоэкситоны уже могут выходить из кристалла в широкой области углов падения $\alpha$.

Это выглядит как эффект Черенкова с той разницей, что отсутствует соотношение для угла $\cos\theta = 1/\beta n$, где $\beta = v/c$. В [2] это интерпретировалось как рождение экситона быстрыми электронами. Интенсивность излучения будет больше в случае положительных эффективных масс обычного экситона (кривая *1*), когда экситон «скатывается», испуская фононы, в область перегиба кривой дисперсии. В случае $m^* < 0$ (кривая *2*) рассеяние должно идти с поглощением фононов и вероятность излучения будет уменьшаться пропорционально $\exp(-\Delta E/kT)$, где $\Delta E$ — разность энергий между точкой $B$ рождения экситона и точкой $A$ максимума $\omega(\mathbf{k})$.

Ниже будут приведены результаты расчетов зависимости интенсивности излучения от скорости электрона для различных ветвей экситона и направлений $\mathbf{v}$ применительно к параметрам кристаллического неона.

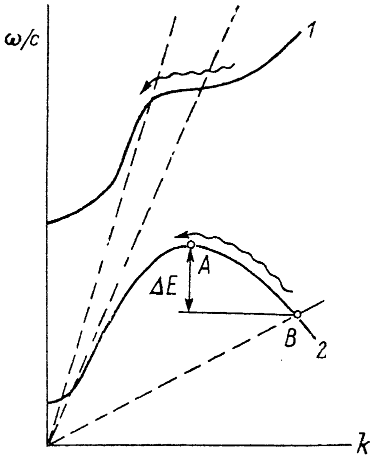


Рис. 1. Дисперсионные кривые светоэкситонов.

Штриховые кривые — закон дисперсии внешнего поля для различных значений $v$ и $\theta$.

## 1. Закон дисперсии светоэкситонов в области малых и средних k

Рассматривая распространение света как самосогласованный процесс поляризации каждого атома полем, порожденным всеми прочими атомами [2] приходим к системе уравнений для дипольных моментов всех атомов $\mathbf{P}_s^l$ ($l$ — номер ячейки, $s$ — номер атома в ячейке)

$$\mathbf{P}_s^l = \alpha_s(\omega)\,\mathbf{E}_s^l,$$

$$E_{s\alpha}^l = \frac{1}{a^3}\sum_{s'\beta}\varphi_{ss'}^{\alpha\beta}(\mathbf{k},\,\omega)\,P_{s'\beta}\,e^{i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_s^l - \omega t\right)}, \tag{2}$$

где $P_{s\beta}$ — Фурье-компонента дипольной волны,

$$\mathbf{P}_s^l = \mathbf{P}_s e^{i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_s^l - \omega t\right)}, \tag{3}$$

$\alpha_s(\omega)$ — поляризуемость атома; индексы $\alpha$, $\beta$ заменяют координатные значки $x$, $y$, $z$. Тензор $\varphi_{ss'}^{\alpha\beta}(\mathbf{k},\,\omega)$ определяется только структурой кристалла. Он был рассчитан в работе [8] для решетки типа NaCl. Для простой гранецентрированной решетки Ne нужно оставить только один индекс $s = s' = 1$.

В области $ka \ll 1$, воспользовавшись разложением $\varphi_{ss'}^{\alpha\beta}(\mathbf{k},\,\omega)$ [2], из (2) получаем

$$1 - \frac{2\pi}{3}A(\omega) - 2\pi A(\omega)\frac{\omega^2}{c^2k^2 - \omega^2} = B_\pm k^2 a^2, \tag{4}$$

где $B_\pm = (3/2\pi)\left(a_{ss'}^{(1)} + \sigma_\pm a_{ss'}^{(3)}\right)$, $a_{ss'}^{(i)}$ — коэффициенты квадратичного разложения величины $\varphi_{ss'}^{\alpha\beta}(\mathbf{k},\,\omega)$ (без учета запаздывания),

$$\sigma_\pm=\frac{1}{2}\left[1-\sum_\alpha s_\alpha^4\pm\sqrt{\left(1-\sum_\alpha s_\alpha^4\right)^2-12s_x^2s_y^2s_z^2}\,\right],$$

$\mathbf{s}=\mathbf{k}/k$, $a$ — половина ребра куба. Величина $A(\omega)=\alpha(\omega)/a^3$ в окрестности дисперсионной частоты $w_i'$ может быть представлена как

$$A(\omega)\approx\frac{3}{2\pi}\left(1+a_i\frac{\omega-\omega_i'}{\omega_i'}\right),\qquad a_i=\left.\frac{d\ln A(\omega)}{d\ln\omega}\right|_{\omega_i'},\tag{5}$$

$\omega_i'$ отличается от частоты возбуждения атома на $i$-й уровень вследствие наличия лоренцева поля.

В области малых $k\sim\omega_i'/c$ и $\omega<\omega_i'$ решение (4) в пренебрежении правой частью есть

$$\omega=\frac{ck}{n},\qquad n^2=\frac{1+(4\pi/3)A(\omega)}{1-(2\pi/3)A(\omega)}.\tag{6}$$

В окрестности дисперсионной частоты $\omega_i'$ такое пренебрежение уже незаконно, но можно использовать приближение (5), и тогда

$$\omega_\pm(k)\approx\omega_i'\left[1-\frac{1}{a_i}\left(B_\pm k^2a^2+3\frac{\omega_\pm^2(k)}{c^2k^2}\right)\right].\tag{7}$$

Соответствующие значения $\mathbf{k}$ будем называть «средними»: разложение $\varphi_{ss'}^{\alpha\beta}(\mathbf{k},\ \omega)$ до квадратичных членов еще возможно, $\omega$ близко к $\omega_i'$ и слагаемые в круглых скобках (7) сравнимы.

## 2. Работа внешнего поля над системой дипольных моментов и интенсивность излучения светоэкситонов

Аналогично [2] находим поперечную часть напряженности электрического поля, создаваемого электроном, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}^{\perp}=-\frac{ie}{2\pi^2}\int d\mathbf{k}\,\frac{\beta^2\nu\cdot\mathbf{s}\,[\mathbf{s}(\nu\cdot\mathbf{s})-\nu]}{k\,[1-\beta^2(\nu\cdot\mathbf{s})^2]}\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t)\right],\quad \nu=\mathbf{v}/v.\tag{8}$$

Соотношение между Фурье-компонентами поляризации $\mathbf{P}_s$ (3) и напряженностью электрического поля (2) при наличии еще и внешнего поля (8) с частотами $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ будет иметь вид

$$\frac{P_{s\alpha}}{a_s}=\frac{1}{a^3}\sum_{s'\beta}\varphi_{ss'}^{\alpha\beta}P_{s'\beta}-\frac{ie}{2\pi^2}\frac{|\beta^2\nu\cdot\mathbf{s}\,[s_\alpha\nu\cdot\mathbf{s}-\nu_\alpha]}{k\,[1-\beta^2(\nu\cdot\mathbf{s})^2]}.\tag{9}$$

Первые слагаемые правой части — внутреннее поле всех прочих диполей, а второе — внешнее. В результате использования разложения $\varphi_{ss'}^{\alpha\beta}(\mathbf{k},\ \omega)$ и выражения (5) получим для Фурье-амплитуд $\mathbf{P}_s$ формулу

$$P_{s\alpha}=E_{\text{ext},\,\alpha}^{\perp}(\mathbf{k})\left[\frac{2\pi}{3}a_i\frac{\omega-\omega_i'}{\omega_i'}+\frac{2\pi\omega^2}{c^2k^2-\omega^2}+B_\pm k^2a^2\right]^{-1},\tag{10}$$

где $E_{\text{ext},\,\alpha}^{\perp}(\mathbf{k})$ — Фурье-компонента выражения (8), $\omega=\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$. Выражение в квадратных скобках (10) обращается в нуль, если $\omega=\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ заменить собственной частотой светоэкситона $\omega(\mathbf{k})$, которая определяется в интересующей нас области формулой (7). Вычитаем из выражения в скобках (10) аналогичное ему с заменой $\omega=\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ на $\omega(\mathbf{k})$. Собираем все компоненты Фурье и вычитаем из каждого члена решение однородного уравнения (с тем, чтобы полученное решение обращалось в нуль при $t=0$). В результате имеем

$$\mathbf{P}_{s\pm}^{l}=\frac{a^3}{2\pi}\int d\mathbf{k}\,\frac{A_s\mathbf{E}_\pm D(\mathbf{k},\ \omega_\pm)}{(\omega_\pm-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})A}\left\{\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_s^l-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t)\right]-\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_s^l-\omega_\pm t)\right]\right\},$$

$$D(\mathbf{k},\ \omega)=\left\{\frac{1}{3\omega_i'}+\frac{\omega+\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{[1-\beta^2(\nu\cdot\mathbf{s})^2]\,[c^2k^2-\omega^2]}\right\}^{-1},\tag{11}$$

$E_\pm$ — составляющие вектора $E^{\perp}_{\text{ext}}(\mathbf{k})$ по направлениям поляризации двух светоэкситонных ветвей, соответствующих корням $\sigma_+$ и $\sigma_-$.

Зная все $\mathbf{P}^l_{s\pm}$, находим работу внешнего поля над всеми диполями за единицу времени и, как в [2], преобразуем ее к виду

$$W_\pm = \frac{e^2\beta^4}{2\pi^2}\int d\mathbf{k}\,\frac{D(\mathbf{k},\ \omega_\pm)(\nu\cdot\mathbf{s})^2(\nu\cdot\mathbf{e}_\pm)^2\,\omega_\pm}{k^2\,[1-\beta^2(\nu\cdot\mathbf{s})^2]^2}\,\frac{\sin(\omega_\pm t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t)}{\omega_\pm-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}, \tag{12}$$

здесь $\mathbf{e}_\pm$ — орты $\mathbf{E}_\pm$. Отношение $[\sin(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\,t]/\pi(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})$ для всех $t\gg 1/\omega$ приблизительно пропорционально $\delta$-функции, что позволяет в (12) проинтегрировать по $k$. Полярные углы $\theta$, $\varphi$ остаются пока свободными аргументами, и подынтегральное выражение (12) представляет собой распределение по углам излучения в резонансе $k=k^0$, где $k^0$ определяется уравнением, получаемым из (7), (1)

$$\frac{a^2}{a_i}\,B_\pm\omega_i'\,(k^0_\pm)^2+vk^0_\pm\cos\theta-\omega_i'\left(1-\frac{3}{a_i}\,\beta^2\cos^2\theta\right)=0. \tag{13}$$

Вследствие сильного рассеяния светоэкситонов в области «средних» $k$ (а следовательно, и $k^0$) это угловое распределение в эксперименте наблюдаться не будет. Поэтому представляет интерес только интегральное излучение

$$W_\pm=-\frac{e^2\beta^4}{2\pi}\int d\Omega\,\frac{(\nu\cdot\mathbf{s})^2(\nu\cdot\mathbf{e}_\pm)^2\,\omega_\pm(\mathbf{k}^0_\pm)\,D(\mathbf{k}^0_\pm,\ \omega_\pm)}{[1-\beta^2(\nu\cdot\mathbf{s})^2]^2\left[\left.\dfrac{d\omega}{dk}\right|_{k^0_\pm}-v\nu\cdot\mathbf{s}\right]}. \tag{14}$$

## 3. Численные результаты для кристаллического неона и их обсуждение

Для вычисления интеграла (14) необходимо знать величины $a_i$ и $\omega_i'$ и задаться определенными направлениями скорости $\mathbf{v}$ относительно кристаллографических осей. Они были выбраны как [001], [110], [111]. Предполагалось, что в дисперсионной формуле для $A(\omega)$ доминирует первая резонансная частота $\omega_1$, равная, по данным [9], 0.682 ат. ед.

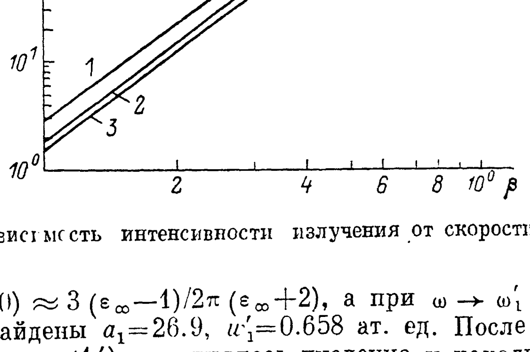


Рис. 2. Зависимость интенсивности излучения от скорости электрона.

При $\omega\to 0$ $A(0)\approx 3(\varepsilon_\infty-1)/2\pi(\varepsilon_\infty+2)$, а при $\omega\to\omega_1'$ $A(\omega_1')\approx 3/2\pi$. Отсюда были найдены $a_1=26.9$, $\omega_1'=0.658$ ат. ед. После этого интегрирование по углам в (14) выполнялось численно и находилась интенсивность излучения для каждого из направлений поляризации.

На рис. 2 изображены кривые $W_+(\beta)$ в двойном логарифмическом масштабе для трех указанных выше направлений скорости. Зависимости $W_-(\beta)$ в случаях *1*, *2*, *3* близки к кривым *3*, *2*, *1* для $W_+(\beta)$. Почти прямолинейный ход кривых свидетельствует о приблизительно степенной зависимости $W(\beta)\sim\beta^{2.5}$.

Что же будет наблюдаться на опыте? Его следует ставить при $v < c/\sqrt{\varepsilon_\infty}$, когда «обычное» черенковское излучение отсутствует.

Непосредственно рожденные электронами светоэкситоны испытывают многократное рассеяние и подходят к поверхности практически изотропно распределенными. Те из них, которые обладают частотами, близкими к плато на законе дисперсии (рис. 1), и большими показателями преломления, будут преимущественно «расходиться веером» при выходе в вакуум. Те же, которые уже преодолели изгиб в окрестности точки $A$, могут выходить и под малыми углами. Они практически уже не будут рассеиваться и «спускаться» вниз по кривой $\omega(\mathbf{k})$. Следовательно, спектр излучения будет обрезан и сверху, и снизу в небольшой окрестности плато. Каждая ветвь светоэкситонов будет давать излучение соответствующей частоты $\omega'_i$. При этом более интенсивным и менее температурозависящим будет излучение для экситона с положительной эффективной массой.

Теоретический нижний предел для скоростей электронов получится, если подставить в формулу (1) максимальное значение волнового вектора $k \approx 10^8$ см$^{-1}$. При выбранном нами $\omega \approx 0.7$ ат. ед. и $\cos\theta = 1$ это дает $v_{\min} \approx 3.10^8$ см/с, т. е. $\beta \approx 0.01$ (вместо $1/n$). Это почти на 2 порядка меньше скорости, когда наблюдается обычное черенковское излучение, что облегчает постановку эксперимента (электронная энергия $\sim 1$ кэВ). К сожалению, из-за резкого убывания интенсивности излучения с уменьшением $\beta$ (рис. 2) вряд ли удалось бы наблюдать теоретический порог излучения.

## Список литературы


[1] Толпыго К. Б. // УФЖ. 1986. Т. 31. № 2. С. 178—187.
[2] Толпыго К. Б. // УФЖ. 1987. Т. 32. № 8. С. 1190—1198.
[3] Пекар С. И. Кристаллооптика и добавочные световые волны. Киев, 1982. 296 с.
[4] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., 1979. 432 с.
[5] Тамм И. Е., Франк И. М. // ДАН СССР. 1937. Т. 14. С. 107—112.
[6] Басс Ф. Г., Яковенко В. М. // УФН. 1965. Т. 86. № 2. С. 189—230.
[7] Пекар С. И. // ФТТ. 1962. Т. 4. № 5. С. 1301—1311.
[8] Толпыго К. Б., Заславская И. Г. // УФЖ. 1956. Т. 1. № 3. С. 226—244.
[9] Братцев В. Ф. Таблицы атомных волновых функций / Под ред. М. Г. Веселова. М.; Л., 1966. 192 с.



Донецкий физико-технический институт
АН УССР



Поступило в Редакцию
1 декабря 1989 г.
В окончательной редакции
26 апреля 1990 г.