УДК 537.311 : 539.2
© 1990

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Б. Н. Шалаев

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) применяется для исследования движения квантовой частицы в одномерном случайном гауссовом поле. Показано, что эта модель обладает скрытой бесконечной симметрией, совпадающей с симметрией уравнения Кортевега — де Вриза. Для средней плотности состояний и функции распределения для ландауэровского сопротивления ρ (k) получено представление в виде континуального интеграла по данным рассеяния. Приведен простой вывод нормального закона распределения для $\ln \rho$ в случайной модели Кронига—Пенни. С помощью МОЗР найдены точно решаемые случайные потенциалы, для которых ρ $(k)=0$ для всех k независимо от длины образца.

Центральной проблемой в теории неупорядоченных систем является вычисление средних значений и функций распределения различных корреляторов, через которые выражаются основные термодинамические и кинетические характеристики системы. В настоящей работе рассматривается задача о движении квантовой частицы в одномерном случайном гауссовом поле типа «белый шум», для которой наибольший интерес представляют средние вида [1-3]

$$\langle G(x_i)\rangle = \int DuG(x_i \mid u)P(u), \tag{1}$$

$$P(u) = Z^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx u^2(x)\right), \tag{2}$$

где $G(x_i \mid u)$ — это либо одночастичная функция Грина электрона в случайном примесном потенциале $u(x)$, либо произведение запаздывающей и опережающей функций Грина; $P(u)$ — функция распределения для $u(x)$. В правой части (1) производится интегрирование по «всем» $u(x)$.

Для величин $G(x_i \mid u)$ существуют замкнутые выражения в виде континуальных интегралов по вспомогательным полям Φ, в результате чего искомое среднее оказывается двойным континуальным интегралом по u и Φ, вычисление которого сопряжено с большими трудностями. Математический аппарат, разработанный к настоящему времени для этой цели, весьма сложен и включает в себя множество разнообразных методик, основанных на ренормгруппе и методе реплик [4, 5], суперсимметрии [6], инстантонах [7, 8] и т. д.

В статье развивается подход к этой проблеме, базирующийся на методе обратной задачи рассеяния (МОЗР). Этот метод предназначен для восстановления потенциальной энергии $u(x)$ по данным рассеяния, т. е. по коэффициенту отражения $r(k)$ и энергиям связанных состояний. Для нас важно, что данные рассеяния — это как раз те величины, которые играют главные роли в теории локализации.

Основная идея применения МОЗР в теории неупорядоченных систем заключается в том, что вычисление континуального интеграла (1) производится с помощью замены переменных, носящей название спектрального преобразования: от интегрирования по u переходят к интегрированию по данным рассеяния. Эта сложная нелинейная замена переменных обладает двумя замечательными свойствами: во-первых, подынтегральное выражение в (1) элементарно выражается через данные рассеяния; во-вторых, якобиан спектрального преобразования равен единице. Последнее справедливо, однако, только для «хороших» потенциалов. Более подробно схема применения МОЗР изложена в следующих разделах. Отметим, что техника интегрирования по переменным обратной задачи ранее использовалась в двумерной квантовой теории поля [9].

Статья устроена следующим образом. В разделе 1 приводятся основные сведения из МОЗР и теории уравнения Кортевега — де Вриза (КвВ), необходимые для дальнейшего. В разделе 2 изучается скрытая динамическая симметрия задачи. Для средней плотности состояний и функции распределения для сопротивления в разделе 3 получено представление в виде континуального интеграла по данным рассеяния. Производится приближенное вычисление этого интеграла и показывается, как получаются известные результаты, найденные другими методами. В разделе 4 получены точные соотношения, связывающие безразмерное сопротивление и плотность состояний. Дано простое доказательство полной локализациии электронных состояний в бесконечном образце. Выведены тождества Уорда, соответствующие симметрии, о которой шла речь в разделе 2. Получен нормальный закон распределения для логарифма сопротивления в обобщенной модели Кронига—Пенни. Наконец, в разделе 5 с помощью МОЗР построена точно решаемая одномерная ($1D$) модель, представляющая собой последовательность большого числа хаотически расположенных потенциальных ям случайной глубины. Приведены точные волновые функции и энергетический спектр. Показано, что сопротивление этой модели строго равно нулю! В Заключении подводятся некоторые итоги, в частности кратко обсуждается вопрос о восстановлении примесного потенциала образца конечной длины по его сопротивлению как функции от энергии.

1. Основные сведения из метода обратной задачи

С момента революционного открытия Гарднера, Грина, Крускала и Миуры (ГГКМ) [10] МОЗР широко используется для решения нелинейных эволюционных уравнений. В последние годы ему был посвящен ряд хороших книг [11–14], не говоря уже о многочисленных обзорах, и основные положения МОЗР являются общеизвестными. Вместе с тем автор счел целесообразным коротко изложить необходимые сведения из МОЗР для уравнения Шредингера [11–14], используемые в последующих разделах.

Рассмотрим задачу на собственные значения для $1D$ оператора Шредингера (оператора Штурма—Лиувилля)

$$-d^2\psi/dx^2 + u(x)\psi = k^2\psi \tag{3}$$

на всей прямой. Будем считать, что потенциальная энергия $u(x)$ является вещественной и асимптотически стремится к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее, чем $|x|^{-2}$, поэтому число связанных состояний конечно. Предположим, что слева на потенциал $u(x)$ падает волна единичной амплитуды с волновым числом k. В этом случае асимптотики волновой функции имеют вид

$$\begin{gathered}\psi(x) \to t(k)\exp(ikx), \quad x \to +\infty, \\ \psi(x) \to \exp(ikx) + r(k)\exp(-ikx), \quad x \to -\infty,\end{gathered} \tag{4}$$

где $r(k)$, $t(k)$ — коэффициенты отражения и прохождения. Амплитуда рассеяния вперед $t(k)$ аналитична в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0$, за исключением точек $k_n = i\varkappa_n$, в которых она имеет простые полюсы, отвечающие связанным состояниям с энергией $E_n = -\varkappa_n^2$. Нормировку собственных функций дискретного спектра удобно фиксировать их асимптотикой при $x \to -\infty$ (функции Йоста)

$$\varphi_n(x) \to \exp(\varkappa_n x), \quad n=1, \ldots, N. \tag{5}$$

Тогда при $x \to +\infty$

$$\varphi_n(x) \to b_n \exp(-\varkappa_n x). \tag{6}$$

Совокупность переменных $S=\{r(k), \varkappa_n, b_n\}$ называется данными рассеяния. По данным рассеяния потенциал $u(x)$ восстанавливается однозначно следующим образом.

С этой целью рассмотрим уравнение Гельфанда—Марченко—Левитана (ГМЛ)

$$K(x, y)+F(x+y)+\int_x^\infty dz K(x, z) F(z+y)=0, \quad y>x \tag{7}$$

для неизвестной функции $K(x, y)$. Ядро интегрального уравнения выражается через спектральные данные по формуле

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{a'(i\varkappa_n)} \exp(-\varkappa_n x)+\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} r(k) \exp(ikx), \quad a(k) \equiv t^{-1}(k). \tag{8}$$

Искомая потенциальная энергия $u(x)$ определяется из функции $K(x, y)$

$$u(x)=-2(d/dx) K(x, x+0). \tag{9}$$

Пусть потенциальная энергия зависит от некоторого параметра t (не путать со временем!): $u=u(x, t)$; следовательно, данные рассеяния, вообще говоря, тоже зависят от t. Если $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега — де Вриза

$$u_t=6uu_x-u_{xxx}, \tag{10}$$

то эволюция спектральных данных при изменении k описывается замечательными формулами ГГКМ

$$\begin{gathered} r(k, t)=r(k, 0) \exp(i8k^3 t), \quad \varkappa_n(t)=\varkappa_n(0), \\ t(k, t)=t(k, 0), \quad b_n(t)=b_n(0) \exp(8\varkappa_n^3 t). \end{gathered} \tag{11}$$

Из уравнений ГГКМ следует, в частности, существование бесконечного набора интегралов движения. Действительно, амплитуда прохождения $t(k)$ не зависит от t и при каждом k представляет собой некоторый однозначно определенный функционал от u. Первые 4 локальных полиномиальных интеграла движения имеют вид

$$\begin{gathered} I_{-1}=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x), \quad I_1=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(u_x^2+2u^3), \quad I_0=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u^2, \\ I_2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(u_{xx}^2-5u^2 u_{xx}+5u^4). \end{gathered} \tag{12}$$

Величины (12) являются коэффициентами в высокотемпературном разложении квантовой статистической суммы $Z(\beta)$ по степеням β

$$Z(\beta)=\mathrm{Sp}(\exp(-\beta H)-\exp(-\beta H_0))=\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}}\left(2\beta I_{-1}+\beta^2 I_0+\frac{1}{3}\beta^3 I_1+\ldots\right), \tag{13}$$

где H — оператор Штурма—Лиувилля (3); $H_0=-d^2/dx^2$.

В дальнейшем важную роль будет играть интерпретация уравнения КдВ как полностью интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системы.

Гамильтонова структура на множестве функционалов от u задается скобкой Пуассона

$$\{G,\ F\} \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta G}{\delta u(x)} \frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta u(x)}. \tag{14}$$

Роль функции Гамильтона для уравнения КдВ играет величина I_1, а импульсом служит I_0. Спектральное преобразование $u \to s$ является каноническим преобразованием в фазовом пространстве к переменным типа «действие—угол», которые выражаются через спектральные данные следующим образом:

$$n(k) = -\frac{2k}{\pi} \ln |t(k)|^2, \quad \varphi(k) = \arg b(k), \quad E_n = \varkappa_n^2, \quad \Phi_l = -2\ln |b_l|, \tag{15}$$

где $b(k) = r(k)a(k)$. Величины (15) удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям; ненулевые скобки Пуассона имеют вид

$$\{\varphi(k),\ n(k')\} = \delta(k-k'), \quad \{\Phi_n,\ E_m\} = \delta_{nm}. \tag{16}$$

Интегралы движения (12) можно выразить через канонические переменные действия $n(k)$ и E_n

$$2I_{j-1}(u) = \frac{4^{j+1}}{2j+1} \sum_{l=1}^{N} E_l^{(2j+1)/2} - (-4)^j \int\limits_0^{\infty} dk k^{2j-1} n(k). \tag{17}$$

Поскольку все величины $n(k)$ и E_n коммутируют между собой, то интегралы движения находятся в инволюции

$$\{I_i,\ I_j\} = 0. \tag{18}$$

Строго говоря, скобка Пуассона (18) равна интегралу от полной производной

$$\{I_i,\ I_j\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,(d/dx)\, F_{ij}(u), \tag{19}$$

где $F_{ij}(u)$ — полином по u и ее производным; (19) обращается в нуль для быстроубывающих на бесконечности функций $u(x)$.

2. Скрытая симметрия в задаче об электроне в случайном поле

Начнем с хорошо изученной симметрии уравнений КдВ. Каждый интеграл движения I_j порождает однопараметрическую группу преобразований

$$u(x,\ t) \to u(x,\ t,\ \beta), \tag{20}$$

где $u(x, t, \beta)$ является решением нелинейного эволюционного уравнения

$$\partial u/\partial\beta = \{u(x),\ I_j\} = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)} \tag{21}$$

с начальным условием

$$u(x,\ t,\ \beta = 0) = u(x,\ t). \tag{22}$$

Уравнение КдВ инвариантно относительно преобразований (20), это вытекает из коммутативности величин I_j (18) и тождества Якоби для скобки Пуассона (14). Другими словами, если $u(x, t)$ — решение (10), то $u(x, t, \beta)$, удовлетворяющая уравнению (21) с начальным условием (22), тоже является решением (10).

Если $u(x, t, \beta)$ зависит от параметра β в силу (21), то зависимость спектральных данных от β описывается уравнениями ГГКМ [11-14]

$$r(k, \beta) = r(k, 0)\exp(iP_j(k)\beta), \quad \varkappa_n(\beta) = \varkappa_n(0),$$
$$b_n(\beta) = b_n(0)\exp(P_j(\varkappa_n)\beta), \quad t(k, \beta) = t(k, 0), \tag{23}$$

где $P_j(k)$ — некоторый полином нечетной степени от k. Подчеркнем, что под действием преобразований из группы G_j данные рассеяния в отличие от $u(x, t)$ преобразуются линейно. Для комплексного коэффициента отражения группа G_j является группой зависящих от k калибровочных преобразований. Ввиду того что энергетические уровни дискретного спектра инварианты относительно (23), эта группа получила название группы изоспектральных деформаций (ГИД).

Все группы G_j в силу (18) коммутируют между собой. Прямое произведение

$$G \equiv \prod_{j=0}^{\infty} G_j \tag{24}$$

является бесконечной абелевой группой симметрии уравнения КдВ [11-14].

Обратимся теперь к электрону, движущемуся в случайном гауссовом поле. Покажем, что, как и в случае уравнения КдВ, в этой задаче имеет место скрытая бесконечная симметрия. Рассмотрим среднее значение некоторого произвольного интеграла движения уравнения КдВ $F(u)$

$$\langle F(u)\rangle = \int DuP(u)\, F(u). \tag{25}$$

В качестве $F(u)$ можно выбрать, например, коэффициент прохождения $t(k \mid u)$. Легко видеть, что подынтегральное выражение в (25) инвариантно относительно ГИД. Действительно, в показателе экспоненты в (1) стоит I_0, коммутирующий со всеми I_j согласно (18), а $F(u)$ — интеграл движения по определению.

Отсюда следует, что на классическом уровне наша модель обладает скрытой симметрией G, совпадающей с симметрией уравнения КдВ. Разумеется, это не означает, что эта симметрия сохраняется и на квантовом уровне, так как она может нарушаться квантовыми поправками (аномалией). Аномалия — это неинвариантность бесконечномерного элемента объема Du относительно преобразований из G, т. е. отличие якобиана от единицы [15].

На первый взгляд мера интегрирования Du должна сохраняться в силу теоремы Лиувилля об инвариантности фазового объема, поскольку G — это группа канонических преобразований. Однако наивное утверждение об инвариантности Du на самом деле носит чисто классический характер и, вообще говоря, неверно. Так, в фейнмановском континуальном интеграле мера интегрирования

$$DpDq = \prod_{0 \leqslant \tau \leqslant t} dp(\tau)\, dq(\tau) \tag{26}$$

неинвариантна относительно канонических преобразований классической механики.

Тем не менее мы покажем, что для электрона в случайном поле ГИД имеет место и на квантовом уровне. В континуальном интеграле (25) произведем бесконечно малую замену переменных

$$u'(x) = u(x) + \beta\{u(x), I_j\} = u(x) + \beta \frac{d}{dx}\frac{\delta I_j}{\delta u(x)}, \quad \beta \ll 1. \tag{27}$$

Якобиан преобразования (27) с точностью до членов первого порядка малости по β равен

$$J_j = \det \frac{\delta u(x)}{\delta u(y)} = \left|\det \left\{\delta(x-y) + \beta \frac{\delta}{\delta u(y)} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)}\right\} = \right.$$

$$= 1 + \beta \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)}. \tag{28}$$

При выводе (28) была использована известная операторная формула

$$\det(\hat{1} + \beta \hat{K}) \approx 1 + \beta \operatorname{Sp} \hat{K}. \tag{29}$$

Интеграл в (28) перепишем в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \lim_{y \to x} \frac{d}{dx} \frac{\delta^2 I_j}{\delta u(x) \delta u(y)}. \tag{30}$$

Операции дифференцирования по x и перехода к пределу можно поменять местами. Действительно, функционал I_j содержит только четные производные $u^{(2k)}$, поэтому его вторая вариационная производная содержит только четные производные δ-функции. После дифференцирования по x появятся, конечно, и производные нечетных порядков; наконец, в результате предельного перехода возникнут величины $\delta^{(2k)}(0)$, $\delta^{(2k+1)}(0)$. Последние в силу нечетности равны нулю. Очевидно, мы получили бы тот же результат, если бы сначала перешли к пределу $y \to x$, а уж затем продифференцировали по x, считая $\delta^{(2k)}(0)$ постоянными.

Таким образом, величина J_j равна

$$J_j = 1 + \beta \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} \frac{\delta^2 I_j}{\delta u^2}. \tag{31}$$

Подобно коммутатору (19) якобиан J_j содержит интеграл от полной производной. «Поверхностный» член в (31) не дает вклада в континуальный интеграл для быстроубывающих $u(x)$ или для образца конечной длины. Для бесконечной системы граничные слагаемые отбрасывать нельзя, поэтому мера интегрирования Du, как и функционалы $P(u)$, $F(u)$, неинварианта относительно преобразований из группы вырождения G. Это неудивительно, так как в этом случае МОЗР неприменим, поэтому неприменимы и симметричные соображения, основанные на МОЗР.

Физически это означает, что в бесконечной неупорядоченной системе, где все электронные состояния локализованы, симметрия G нарушена. Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что переход к полной локализации (при $L \to \infty$) для электрона в случайном гауссовом поле сопровождается нарушением бесконечной калибровочной группы G.

Отметим, что как и в теории полей Янга—Миллса, континуальное интегрирование в (25) фактически производится по множеству орбит калибровочной группы G. Интегрирование по переменным действие—угол есть как раз интегрирование по всем орбитам, поскольку переменные $n(k)$, E_n полностью фиксируют орбиту. Интеграл по угловым переменным $\varphi(k)$, Φ_n дает бесконечный объем калибровочной группы. Таким образом, переменные действие—угол в данной задаче являются наиболее естественными, так как они адекватно отражают ее симметрию.

3. Континуальный интеграл по данным рассеяния

Процедура замены $u(x)$ переменными действие—угол (15) в континуальном интеграле (1) подробно изложена в работе де Вега [9] и здесь не рассматривается. Результат имеет вид

$$\int Du \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\int dxu^2\right)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\prod_{k>0}\int_0^{\infty}dn(k)\int_0^{2\pi}d\varphi(k)\prod_{l=1}^{N}\int_0^{\infty}dE_l d\Phi_l J\exp\left(-\frac{S}{\alpha}\right), \tag{32}$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dxu^2(x)=\frac{8}{3}\sum_{l=1}^{N}E_l^{3/2}-2\int_0^{\infty}dkkn(k). \tag{33}$$

Для «хороших» функций $u(x)$ якобиан спектрального преобразования равен единице, однако в континуальном интеграле (32) это не так [9]. Из результатов раздела 2 следует, что J зависит только от инвариантных величин $n(k)$ и E_l.

В квазиклассическом приближении по параметру α $J=1$, так как показатель экспоненты в (32) имеет порядок α^{-1}, в то время как вклад якобиана $\ln J$ (однопетлевых поправок) в действие S пропорционален α^0. Таким образом, в приближении ВКБ континуальный интеграл по данным рассеяния факторизуется в произведение обычных интегралов.

В правой части (32) производится суммирование по числу связанных состояний N, которое играет роль своеобразного «топологического» индекса, характеризующего полевую конфигурацию $u(x)$. Интересно, что вклад переменных дискретного спектра выглядит как большая статистическая сумма классического газа одномерных частиц при температуре $T=\alpha$ с законом дисперсии $\varepsilon=|p|^{3/2}$, причем $\ln J$ играет роль взаимодействия солитонов.

Покажем теперь, как в этом подходе получаются уже известные результаты. Вначале рассмотрим среднюю плотность состояний

$$\langle\nu(E)\rangle=\left\langle\sum_{l=0}^{N}\delta(E-E_l)\right\rangle. \tag{34}$$

В приближении ВКБ имеем

$$\langle\nu(E)\rangle=Z^{-1}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\prod_{k>0}\int_0^{\infty}dn(k)\int_0^{2\pi}d\varphi(k)\prod_{l=0}^{N}\int_0^{\infty}dE_l d\Phi_l\sum_{l=0}^{N}\delta(E-E_l)\exp\left(-\frac{S}{\alpha}\right). \tag{35}$$

Благодаря факторизации и наличию δ-функции вычисление производится тривиально

$$\langle\nu(E)\rangle\sim\int_0^{\infty}dE_l\delta(E_l-|E|)\exp\left(-\frac{8}{3\alpha}E_l^{3/2}\right)\sim\exp\left(-\frac{8}{3\alpha}|E|^{3/2}\right). \tag{36}$$

Мы получили классическое выражение для лифшицевского хвоста плотности состояний в области $E<0$ [1-3]. Для вычисления предэкспоненты необходимо учесть отличие якобиана от единицы. Итак, для плотности состояний МОЗР эквивалентен инстантонному подходу [7, 8].

Если функцию распределения выбрать в виде

$$P(u)=Z^{-1}\exp\left(-\frac{1}{\alpha}I_{2n}(u)\right), \tag{37}$$

где $I_{2n}(u)$ — интеграл движения (17), то хвост плотности состояний будет выглядеть иначе

$$\langle\nu(E)\rangle\sim\exp\left(-\frac{16^{n+1}}{(8n+6)\alpha}|E|^{(4n+3)/2}\right). \tag{38}$$

Вычислим функцию распределения для безразмерного ландауэровского сопротивления $\rho(k)$ $1D$ неупорядоченной системы. Величина $\rho(k)$ связана с переменной действия $n(k)$ простой формулой

$$\rho(k) = |t(k)|^{-2} - 1 = \exp\left\{\frac{\pi}{2k} n(k)\right\} - 1. \tag{39}$$

Как и в предыдущем случае, нахождение $f(\rho)$ сводится к вычислению обыкновенного интеграла по $n(k)$

$$f(\rho) = \langle \delta(\rho - \rho(k)) \rangle = Z^{-1} \int_0^\infty dn(k) \exp\left\{-\frac{2\pi}{aL} kn(k)\right\} \delta\left[\rho + 1 - \exp\left(\frac{\pi}{2k} n\right)\right], \tag{40}$$

$$Z = \int_0^\infty dn(k) \exp\left\{-\frac{2\pi}{aL} kn(k)\right\}, \tag{41}$$

где L — размер образца; при вычислении (32) интегрирование по k было заменено на суммирование. Из (40)—(41) получаем

$$f(\rho) = \frac{4k^2}{aL} (\rho + 1)^{-4k^2/aL - 1}. \tag{42}$$

Негауссовский степенной вид функции распределения (42) есть следствие квазиклассического приближения. В области больших $\rho \gg 1$ вместо ожидаемого нормального закона для $\ln \rho$ [16, 17] (см. раздел 4) мы имеем степенное убывание с показателем, зависящим от k. При малых $\rho(k) \ll 1$ или больших k, т. е. там, где применима теория возмущений, $f(\rho)$ принимает известный вид [17]

$$f(\rho) = \frac{4k^2}{aL} \exp\left(-\frac{4k^2}{aL} \rho\right). \tag{43}$$

4. Некоторые точные результаты

Выход за рамки квазиклассического приближения требует вычисления якобиана спектрального преобразования J. Хотя величина J неизвестна, опираясь на МОЗР можно получить ряд точных результатов. Рассмотрим некоторые из них.

а) В разделе 2 было показано, что электрон в случайном гауссовом поле обладает бесконечным вырождением. Под действием преобразований из ГИД данные рассеяния преобразуются линейно по формулам ГГКМ (23), Точная калибровочная симметрия (23) накладывает определенные ограничения на структуру корреляторов, содержащих коэффициент отражения $r(k)$. Из инвариантности функции распределения и меры интегрирования относительно ГИД следует, что

$$\langle r(k) r^*(k') \rangle = \langle r(k) r^*(k') \rangle \exp\{iP_j(k)\beta - iP_j(k')\beta\}, \quad \langle r(k) \rangle = \langle r(k) \rangle \exp\{iP_j(k)\beta\} \tag{44}$$

и т. д. Поскольку k и k' произвольны, то

$$\langle r(k) \rangle = 0, \quad k \neq 0, \quad \langle r(k) r^*(k') \rangle = \langle |r(k)|^2 \rangle \delta(k - k'). \tag{45}$$

В низшем порядке теории возмущений по α парный коррелятор (45) имеет вид

$$\langle r(k) r^*(k') \rangle = (aL/4k^2) \delta(k - k'). \tag{46}$$

Тождества (45) не столь тривиальны, как это могло бы показаться на первый взгляд. Так, например, соотношения (45) несправедливы для комплексной амплитуды прохождения $t(k)$, имеющей другие трансформационные свойства относительно (23), нежели $r(k)$.

б) На формулы (45)—(46) интересно взглянуть с теоретико-полевой точки зрения. Видно, что мы имеем дело с (1+0)-мерной теорией комплексного скалярного поля $r(k)$, на которое наложено ограничение $|r(k)| < 1$. Поле $r(k)$ описывает систему взаимодействующих голдстоуновских частиц с затравочным пропагатором (46), в которой, как и в $2D$ нелинейной сигмамодели, инфракрасные расходимости приводят к динамической генерации массы. Это следует из того, что в силу указанного выше ограничения среднее значение

$$\langle | r(k) |^2 \rangle \leqslant 1 \tag{47}$$

конечно при всех $k \geqslant 0$. Масса, о которой идет речь, является обратным радиусом локализации. Среднее значение поля $r(k)$ в делокализованной фазе равно нулю согласно (45).

Ультрафиолетовые асимптотики парного коррелятора (45) легко находятся из теории возмущений, в то время как поведение в инфракрасной области, наиболее интересное для локализации, можно определить из теоремы Абловица, Крускала и Сигура (АКС) [18]. Согласно теореме АКС, «почти для всех» потенциалов $u(x)$

$$r(0) = -1, \quad t(0) = 0, \tag{48}$$

кроме тех случаев, когда имеются связанные состояния с нулевой энергией [18]. Последние имеются только у некоторых потенциалов специального вида, к которым относятся, в частности, безотражательные потенциалы (см. раздел 5).

Интуитивно ясно, что вклад таких потенциалов в континуальный интеграл по $u(x)$ пренебрежимо мал по сравнению с вкладом потенциалов «общего» вида. То, что это действительно так, следует из обращения в нуль точной усредненной плотности состояний в точке $E=0$: $\nu(0)=0$ [1]. Отсюда вытекает, что статистический вес потенциалов, для которых несправедливы соотношения АКС (48), равен нулю; следовательно,

$$\langle \rho(0) \rangle = \infty, \quad \langle | r(0) |^2 \rangle = 1. \tag{49}$$

Поскольку предел $k \to 0$ эквивалентен предельному переходу $L \to \infty$, то соотношения (49) фактически справедливы для всех k при $L=\infty$, а это означает полную локализацию всех электронных состояний в $1D$ неупорядоченной системе. Таким образом, причиной локализации является то обстоятельство, что «почти для всех» $u(x)$ выполняются равенства (48). Если это не так, то локализация отсутствует (см. раздел 5).

в) Обратимся теперь к точным интегральным соотношениям, связывающим плотность состояний $\nu(E)$ и безразмерное сопротивление ρ. Эти соотношения («правила сумм») получаются усреднением интегралов движения (17), записанных через $\nu(E)$ и $\rho(k)$

$$\langle 2I_{j-1}(u) \rangle = \frac{4^{j+1}}{2j+1} \int_{-\infty}^{0} dE\, |E|^{2j+1/2} \langle \nu(E) \rangle + \frac{(-4)^{j+1}}{2\pi} \int_{0}^{\infty} dk k^{2j} \langle \ln(\rho+1) \rangle. \tag{50}$$

В частности, при $j=0$, 1 имеем

$$2 \int_{-\infty}^{0} dE\, |E|^{1/2} \langle \nu(E) \rangle - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} dk \langle \ln(\rho+1) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \right\rangle = 0, \tag{51}$$

$$\frac{16}{3} \int_{-\infty}^{0} dE\, |E|^{3/2} \langle \nu(E) \rangle + \frac{8}{\pi} \int_{0}^{\infty} dk k^2 \langle \ln(\rho+1) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx u^2(x) \right\rangle = N, \tag{52}$$

где N — число рассеивающих центров. Подчеркнем, что точные соотношения (50) универсальны, т. е. справедливы для произвольной функции распределения.

Из общих формул (50) можно извлечь конкретную информацию о статистических свойствах $\rho(k)$, в частности получить нормальный закон для $\ln \rho$ [16, 17]. С этой целью рассмотрим обобщенную модель Кронига—Пенни, в которой потенциальная энергия электрона есть сумма периодически расположенных узких бесконечно гладких пиков со случайными амплитудами

$$u(x)=\sum_{n=1}^{N} u_n h(x-nb), \tag{53}$$

где N — число дефектов, b — расстояние между ближайшими соседями, u_n — случайные амплитуды примесного потенциала. В качестве $h(x)$ можно выбрать, например, функцию

$$h(x)=\theta(c^2-x^2)\exp[-c^2/(c^2-x^2)], \tag{54}$$

где $c<b/2$, $\theta(z)$ — ступенька Хевисайда. Функция (54) бесконечно дифференцируема и отлична от нуля в интервале $-c<x<c$. Благодаря тому что $c<b/2$, для функции $h(x)$ и ее производных любого порядка $h^{(k)}(x)$ выполняются равенства

$$h^{(k)}(x-mb)\,h^{(l)}(x-nb)=0, \tag{55}$$

где k, l, $m\neq n$ — целые числа. Бесконечная гладкость пиков и конечное их число необходимы для существования бесконечного числа интегралов движения. Будем считать для простоты, что $u_n\geqslant 0$, поэтому связанные состояния отсутствуют, $\nu(E)=0$ при $E<0$. Неусредненные соотношения (50) в этом случае приобретают вид

$$I_{j-1}(u)=-\frac{(-4)^j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk k^{2j}\ln(\rho+1), \quad j=0,\ 1,\ \ldots . \tag{56}$$

Подставляя (53) в левую часть (56) и принимая во внимание (54), находим

$$\sum_{n=1}^{N} P_{j-1}(u_n)=\int_{-\infty}^{\infty} dk k^{2j}\ln(\rho+1), \tag{57}$$

где $P_j(u_n)$ — некоторый полином от u_n. Равенства (57) позволяют найти $\ln(\rho+1)$ как функцию u_n.

Пусть $\{\varphi_m(k)\}$ — произвольная система ортонормированных функций, заданных на всей числовой оси; это могут быть, например, волновые функции гармонического осциллятора. Поскольку $\rho(k)$ — четная функция k, будем рассматривать только четные $\varphi_m(k)$. Соотношения (57) запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\varphi_m(k)\ln(\rho+1)=a_m, \tag{58}$$

где

$$a_m=\sum_{j=0}^{\infty} c_{mj}\sum_{n=1}^{N} P_{j-1}(u_n), \tag{59}$$

c_{mj} — коэффициенты разложения $\varphi_m(k)$ в ряд по степеням k

$$\varphi_m(k)=\sum_{j=0}^{\infty} c_{mj}k^{2j}. \tag{60}$$

Из (59), (60) находим

$$\ln(\rho+1)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(k)=\sum_{n=1}^{N} f(k,\ u_n), \tag{61}$$

где $f(k,u_n)$ — некоторая функция k и u_n. Следовательно, средний логарифм сопротивления представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин $f(k,u_n)$. Согласно центральной предельной теореме, величина $\ln(\rho+1)$ распределена по нормальному закону и поэтому обладает свойством самоусредняемости. Усредняя (61), получим

$$\langle \ln(\rho+1) \rangle \sim L, \tag{62}$$

т. е. сопротивление $1D$ цепочки экспоненциально зависит от ее размера. По-видимому, имеется глубокая связь между тем, что логарифм ландау-эровского сопротивления является переменной действия (каноническим импульсом) в формализме МОЗР и гауссовским распределением для этой величины.

5. Одномерная неупорядоченная система без локализации

Среди специалистов по теории неупорядоченных систем господствует убеждение, что в $1D$ случае наличие сколь угодно слабого беспорядка приводит к локализации всех электронных состояний и обращению в нуль коэффициентов диффузии и статической проводимости [1-3, 8]. В частности, именно так, по общему мнению, должно обстоять дело и в модели Андерсона — системе хаотически расположенных ям случайной глубины. Не подвергая сомнению правильность традиционной точки зрения в общем случае, мы покажем отсутствие локализации в одной точно решаемой модели, уникальной особенностью которой является ее абсолютная прозрачность

$$\rho(k) = 0 \tag{63}$$

для всех k независимо от длины образца L.

Случайные потенциалы, обладающие свойством «сверхпроводимости» (63), представляют собой безотражательные случайные потенциалы. Напомним, что безотражательные потенциалы являются точными N-солитонными решениями уравнениями КдВ. Общее выражение для безотражательного потенциала с N-связанными состояниями легко получить с помощью формул МОЗР (7)—(9) [11-14]. Положив в (8) $r(k)=0$ и подставив функцию $F(x)$ в виде суммы экспонент в уравнение ГМЛ (7), получим линейное интегральное уравнение с вырожденным ядром для неизвестной функции $K(x, y)$, которое легко решается. Подставив найденную функцию $K(x, y)$ в (9), получим [12]

$$u(x, t) = -2(d^2/dx^2) \ln \det A_{mn}(x, t), \tag{64}$$

где $A_{mn}(x, t)$ — невырожденная симметричная матрица $N \times N$, зависящая от $2N+1$ вещественных параметров: c_n, $\varkappa_n$, t, $n=1, \ldots, N$ [12]

$$A_{nm}(x, t) = \delta_{nm} + \frac{c_n c_m}{\varkappa_n + \varkappa_m} \exp\{(4\varkappa_n^3 + 4\varkappa_m^3)t - (\varkappa_n + \varkappa_m)x\}, \quad c_n > 0. \tag{65}$$

Точные волновые функции уравнения Шредингера (3) с потенциалом (64) имеют вид [12]

$$\psi(x, k) = \exp(ikx)\left[1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\varkappa_n - ik} \varphi_n(k) \exp\{-\varkappa_n x + 4\varkappa_n^3 t\}\right], \tag{66}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=1}^{N} A_{nm}^{-1}(x, t) c_m \exp(-\varkappa_m x + 4\varkappa_m^3 t) = c_n \psi(x, i\varkappa_n). \tag{67}$$

Волновая функция непрерывного спектра (66) есть функция Йоста

$$\psi(x, k) \to \exp(ikx), \quad x \to +\infty, \tag{68}$$

а (68) — это нормированная на 1 волновая функция дискретного спектра с собственным значением $-\varkappa_n^2$.

Потенциал (64) представляет собой последовательность солитонных ям, т. е. это действительно модель Андерсона. Интересно, что безотражательных потенциалов без связанных состояний не существует, если не считать тривиальный потенциал $u(x)=0$. Если ямы удалены достаточно далеко друг от друга, то (64) можно приближенно записать в виде суперпозиции солитонных решений

$$u(x,\ t) \approx -2 \sum_{n=1}^{N} \varkappa_n^2 \operatorname{ch}^{-2} \varkappa_n (x - x_n). \tag{69}$$

Координаты центров ям x_n сложным образом зависят от всей совокупности параметров $\varkappa_n$, c_n, t.

Предположим теперь, что величины c_n, $\varkappa_n$, N в (64), т. е. размеры ям, координаты центров и число потенциальных ям N, являются случайными. Несмотря на то что потенциал (64) стал случайным, он сохранил свойство безотражательности: любая его реализация является безотражательной для всех k

$$\rho(k) = r(k) = 0, \quad t(k) = \prod_{n=1}^{N} \frac{k + i\varkappa_n}{k - i\varkappa_n}. \tag{70}$$

Замечательно, что для каждой реализации примесной потенциальной энергии известны точные волновые функции (66) и (67) и энергетический спектр.

Поскольку на функцию распределения не накладывается никаких ограничений, то плотность состояний может быть задана совершенно произвольно. Важным свойством (64) является также наличие своеобразного квантовомеханического отталкивания дискретных уровней энергии: чем ближе по энергии два уровня, тем дальше они расположены друг от друга. В результате в (64) не существует двух ям с одинаковыми значениями энергии («принцип Паули»).

Уникальным свойством (63) обладает только случайный потенциал (64) и никакой другой, что вытекает из единственности решения уравнения ГМЛ. Таким образом, случайный безотражательный потенциал — это исключительный случай в теории неупорядоченных систем, когда квантовая интерференция приводит к эффекту «просветления», а не к локализации.

Заключение

Развитый выше подход к задаче локализации опирался на МОЗР для одномерного оператора Шредингера. Область применимости МОЗР, однако, гораздо шире и не исчерпывается одним этим оператором. В частности, его можно применить к квантовой частице, описываемой $1D$ уравнением Дирака, с комплексной случайной массой. В обеих задачах имеется много общего: бесконечная скрытая симметрия, полная локализация электронных состояний в бесконечном образце, существование случайных безотражательных потенциалов и т. д.

Особый интерес представляет вычисление якобиана спектрального преобразования, поскольку это позволит выйти за рамки квазиклассического приближения. Кроме того, якобиан и сам по себе имеет важный физический смысл, так как через него выражается функция распределения для сопротивления.

Коротко остановимся на проблеме восстановления потенциальной энергии электрона $u(x)$ по известному из эксперимента сопротивлению $\rho(k)$. В этой постановке обратная задача не имеет единственного решения; больше того, существует бесконечное число потенциалов с одним и тем же $\rho(k)$. Неоднозначность решения обратной задачи есть следствие специфического вырождения, рассмотренного в разделе 2. Любое преобразование из группы вырождения переводит потенциал $u_1(x)$ в $u_2(x)$, причем с тем же модулем коэффициента отражения $|r(k)|$. Меняется лишь его фаза $\arg r(k)$ по формулам ГГКМ (23).

Подчеркнем, что указанное вырождение приводит к тому, что не всякая, даже сильная, флуктуация примесного потенциала изменяет остаточное сопротивление проводника. Этот вывод, относящийся к $1D$ системам, несколько расходится с общепринятой точкой зрения, согласно которой остаточная проводимость образцов малых размеров обладает большой чувствительностью к малым изменениям случайной реализации примесного потенциала [19].

Если допустить, что нам известны модуль и фаза коэффициента отражения, то нахождение $u(x)$ сводится к решению линейного интегрального уравнения ГМЛ, что является трудной математической задачей. Точное аналитическое решение можно получить, аппроксимировав $r(k)$ рациональной функцией от k, т. е. представив его в виде отношения двух полиномов. В этом случае уравнение ГМЛ сводится к интегральному уравнению с вырожденным ядром, решение которого известно [12]. Автор надеется вернуться к этому вопросу в другом месте.

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Аронову за плодотворные обсуждения и поддержку, без которых эта статья не была бы написана. Автор признателен также В. В. Брыксину, А. В. Гольцеву, С. Н. Дороговцеву, А. Зюзину, С. А. Ктиторову, Е. К. Кудинову, Ю. В. Петрову, М. В. Садовскому, А. Н. Самухину, А. И. Соколову и Ю. А. Фирсову за полезные обсуждения и доброжелательную критику.

Список литературы

[1] Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Ведение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982. 360 с.
[2] Займан Дж. Модели беспорядка. М.: Мир, 1982. 592 с.
[3] Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 400 с.
[4] Ефетов К. Б., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. № 3. С. 1120—1133.
[5] Кравцов В. Е., Лернер И. В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 4. С. 1281—1299.
[6] Ефетов К. Б. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. № 3. С. 872—887.
[7] Садовский М. В. // ФТТ. 1979. Т. 21. № 3. С. 743—751.
[8] Садовский М. В. // УФН. 1981. Т. 133. № 2. С. 223—257.
[9] De Vega H. J. // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. N 2. P. 392—405.
[10] Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. N 19. P. 1095—1097.
[11] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
[12] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985. 472 с.
[13] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
[14] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
[15] Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989. 400 с.
[16] Мельников В. И. // ФТТ. 1981. Т. 23. № 3. С. 782—786.
[17] Gasparian V. M., Altshuler B. L., Aronov A. G., Kasamanian Z. A. // Phys. Lett. A. 1988. V. 132. N 4. P. 201—205.
[18] Ablowitz M. J., Kruskal M. D., Segur H. // J. Math. Phys. 1979. V. 20. N 4. P. 999—1003.
[19] Альтшулер Б. Л., Спивак Б. З. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. № 9. С. 363—365.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило в Редакцию
2 июля 1990 г.