

© 1991

## МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ПОПЕРЕЧНО-НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ (КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ)

Ю. В. Грибкова, М. И. Каганов

Проведен качественный анализ магнитостатического спектра поперечно-намагниченной пластины, учитывающий дипольное и неоднородное обменное взаимодействие. Показано, что в толстых пластинах взаимодействие между чисто дипольным и чисто обменным спектрами приводит в определенном интервале волновых векторов к возникновению квазислучайного спектра, очень чувствительного к точному значению параметров системы.

1. Магнитодипольный спектр пластин с учетом и без учета обменного взаимодействия в последние годы неоднократно привлекал внимание [1-3]. В ранних работах по этой теме [4-6] главное внимание обращено на факт существования собственных частот неоднородного магнитного резонанса (уокеровских мод [7]), их модификации при переходе от сферических или эллиптических образцов к пластинам и стержням, а также к связи магнитодипольных мод со спиновыми волнами.

Сформулируем два, по нашему мнению, важнейших качественных результата раннего периода изучения магнитостатических мод.

1) Магнитодипольные моды благодаря правильному учету граничных условий ликвидируют неаналитичность в зависимости частоты спиновой волны  $\omega$  от волнового вектора  $\mathbf{k}$  при  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  [4].

2) В пластине (стержне) дискретные уокеровские моды превращаются в волны, распространяющиеся вдоль пластины (стержня), причем дисперсия (зависимость  $\omega$  от  $\mathbf{k}$ ) — следствие интерференционных эффектов. Поэтому характерный безразмерный параметр, определяющий зависимость  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ , есть  $kd$ , где  $d$  — толщина пластины или диаметр стержня.

С другой стороны, активно исследовался спектр стоячих спиновых волн (магнонов) в магнитных пленках [8-10]. Параметр, описывающий неоднородное обменное взаимодействие, — обменная длина  $l = (\mathcal{J}/\mu M)^{1/2}$ , где  $\mathcal{J}$  — обменный интеграл ( $\mathcal{J} \sim \Theta_c$  — температура Кюри),  $M$  — намагниченность единицы объема,  $\mu$  — магнетон Бора ( $M \sim \mu/a^3$ ,  $\mu = \hbar g$ ,  $g$  — гиромагнитное отношение). При этом  $l \gg a$  (как правило,  $\mu M \ll \Theta_c$ ). Величины  $M$ ,  $\mu$ ,  $a$ ,  $\mathcal{J}$  — константы исследуемого вещества.

Когда выяснилось, что магнитодипольные волны могут быть использованы в технических устройствах [11], появилось много работ по численному расчету спектра для конкретных магнетиков. Взаимодействие магнитодипольных мод и спиновых волн со светом позволяет непосредственно измерить их спектр по рассеянию [12].

2. Цель настоящей статьи — качественный анализ результата взаимодействия двух причин, приводящих к дисперсии волн: интерференции, связанной границам образца, и обменному взаимодействию. Естественный безразмерный параметр задачи — отношение  $l/d = (\mathcal{J}/\mu M)^{1/2} a/d$ .

Мы рассмотрим простейшую ситуацию: пластину, занимающую слой  $|z| < d/2$  (ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии, перпендикулярно-

поверхности), однородно намагниченную вдоль  $z$  ( $M_x = M_y = 0$ , магнитное поле в пластине  $H_x = H$ ,  $H_x = H_y = 0$ ). Движение магнитного момента описывается уравнением Ландау—Лифшица, приводящим к тензору магнитной восприимчивости, пространственная дисперсия компонент которого — следствие учета неоднородного обменного взаимодействия [13]

$$\begin{aligned} \chi_{xx}(\omega, \mathbf{k}) &= \chi_{yy}(\omega, \mathbf{k}) = gM\Omega(\mathbf{k})/[\Omega^2(\mathbf{k}) - \omega^2], \\ \chi_{xy} &= -\chi_{yx} = igM\omega/[\Omega^2(\mathbf{k}) - \omega^2], \quad \chi_{jz} \equiv 0, \quad j = x, y, z, \\ \Omega(\mathbf{k}) &= \omega_0 + gM(kl)^2, \quad \omega_0 = gH_{\text{eff}}, \quad H_{\text{eff}} = H + \beta M, \end{aligned} \quad (1)$$

$\beta$  — константа анизотропии. Вычисление собственных частот магнитных колебаний пластины требует совместного решения линеаризованных уравнений магнитостатики для переменных составляющих магнитного поля  $\mathbf{h}$  и магнитной индукции  $b_i = \mu_{ik}h_k$ , где  $\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}$ , дополненных граничными условиями. На бесконечном расстоянии от пластины  $h=0$ , а при  $|z|=d/2$ , кроме непрерывности тангенциальной составляющей  $\mathbf{h}$  и нормальной магнитной индукции  $\mathbf{b}$ , надо учесть характер поведения магнитного момента на границе. Мы рассмотрим случай «свободного» магнитного момента на границе ( $dm/dz(d/2)=0$ ) [8, 14].

Однородность задачи в плоскости пластины и симметрия относительно плоскости  $z=0$  означают, что решение уравнений магнитостатики имеет структуру

$$|z| < d/2: \quad h_i b_i \propto e^{ixz} \begin{cases} \cos qz, \\ \sin qz, \end{cases} \quad (2)$$

$$|z| > d/2: \quad h_i \propto e^{ixz} e^{-x|z|}. \quad (3)$$

Здесь  $\chi$ ,  $\rho$  — векторы с компонентами  $x_x, x_y$ ;  $x, y$  — соответственно;  $q$  — один из корней бикубического уравнения

$$\begin{aligned} q^2 + x^2 + 4\pi x^2 [gM\Omega/(\Omega^2 - \omega^2)] &= 0, \\ \Omega &= \omega_0 + \omega_{\text{ex}}, \quad \omega_{\text{ex}} = gMl^2(x^2 + q^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) — объемное дисперсионное уравнение, определяющее зависимость частоты  $\omega$  спиновой волны в неограниченном магнетике от волнового вектора  $\mathbf{k}$  ( $q$  —  $z$ -я проекция  $\mathbf{k}$ ).

Удовлетворяя перечисленным выше граничным условиям, запишем дисперсионные уравнения для пластины: симметричное решение<sup>1</sup>

$$\sum_{i=1}^3 F_i (1 - x/q_i \operatorname{tg}(q_i d/2)) = 0, \quad (5)$$

антисимметричное решение

$$\sum_{i=1}^3 F_i (1 + x/q_i \operatorname{ctg}(q_i d/2)) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{q_2^2 - q_3^2}{\omega_{\text{ex}}^{(1)}} [\omega_0 + \omega_{\text{ex}}^{(1)}], \quad F_2 = \frac{q_3^2 - q_1^2}{\omega_{\text{ex}}^{(2)}} [\omega_0 + \omega_{\text{ex}}^{(2)}], \quad F_3 = \frac{q_1^2 - q_2^2}{\omega_{\text{ex}}^{(3)}} [\omega_0 + \omega_{\text{ex}}^{(3)}], \\ \omega_{\text{ex}}^{(i)} &\equiv \omega_{\text{ex}}(q_i), \quad \Omega_i = \omega_0 + \omega_{\text{ex}}^{(i)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (4), (5) (или (6)) и (7) определяют спектр спиновых волн в пластине  $\omega = \omega_n(x)$ , где  $n=1, 2, 3, \dots$  — номер решения.

Прежде чем приступить к анализу, сделаем ряд замечаний. Пренебрежение дипольным взаимодействием приводит к предельному упрощению спектра

<sup>1</sup> Решения классифицируются по зависимости потенциала магнитного поля  $\varphi$  ( $\mathbf{h} = -\nabla\varphi$ ) от координаты  $z$ ;  $x = \sqrt{x_z^2 + x_y^2}$ . В плоскости пластины магнетик изотропен.

$$\omega = \omega_n^{обм}(x), \quad \omega_n^{обм}(x) = \omega_0 + gM \{(\pi l/d)^2 n^2 + (x/d)^2\} = \\ = (\mathcal{J}/\hbar) a^2 [x^2 + (n/2d)^2]. \quad (8)$$

Структура обменного спектра (8) изображена на рис. 1. Пренебрежение обменным взаимодействием ( $l=0$ ) позволяет получить магнитодипольный спектр [4] (рис. 2)

$$\omega = \omega_m^{дип} = \sqrt{\omega_0 \left( \omega_0 + \omega_M \frac{(xd)^2}{(xd)^2 + X_m^2(xd)} \right)}, \quad (9)$$

$\omega_M = 4\pi gM$ ;  $X_m = X_m(xd)$  —  $m$ -й корень одного из трансцендентных уравнений. В случае симметричного решения

$$1 - xd/X \operatorname{tg}(X/2) = 0, \quad \pi m < X_m(xd) < \pi(m + 1/2), \quad m = 0, 1, 2 \dots, \quad (10)$$

в случае антисимметричного решения

$$1 + xd/X \operatorname{ctg}(X/2) = 0, \quad \pi(m + 1/2) < X_m(xd) < \pi(m + 1), \\ m = 0, 1, 2 \dots \quad (11)$$

Различный характер спектров (8) и (9), конечно, проявляется при их взаимодействии. Если при изменении номера  $n$  частота  $\omega_n^{обм}$  изменяется

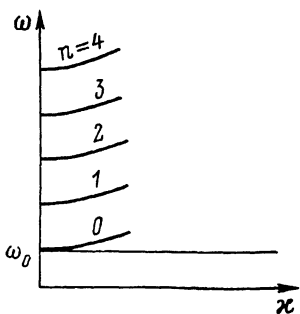


Рис. 1. Зависимость первых четырех обменных частот от волнового вектора  $x$  в плоскости пластины (формула (8)).

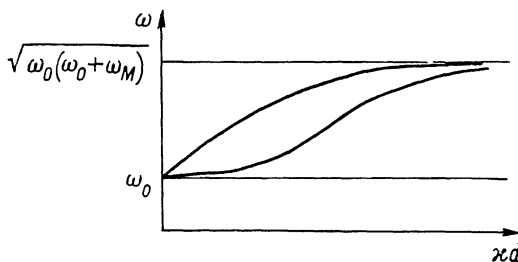


Рис. 2. Зависимость двух (из бесконечного числа) частот магнитостатического спектра от  $xd$  при пренебрежении обменным взаимодействием.

Верхняя кривая —  $m=0$ , нижняя —  $m \neq 0$  (формулы (9)–(11)). Характерная особенность магнитодипольного спектра — существование двух точек сгущения: при  $xd \rightarrow 0$  и  $xd \rightarrow \infty$  частоты  $\omega_m(xd)$  стремятся к  $\omega_0$  и  $\sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)}$  соответственно при любом  $m$ .

на величину, превышающую ширину интервала магнитодипольных частот, т. е. при  $gM (\pi l/d)^2 > \sqrt{\omega_0 (\omega_0 + \omega_M)}$ , то по существу никакого «взаимодействия» между спектрами не происходит. Как мы увидим, роль магнитодипольного взаимодействия сводится при этом к уточнению минимума частоты в каждой зоне. Исключение составляет наименьшая обменная зона, взаимодействие которой с магнитодипольным спектром изменяет зависимость частоты от волнового вектора  $x$  при  $x \rightarrow 0$ .

Если на интервале  $\sqrt{\omega_0 (\omega_0 + \omega_M)}$  помещается много обменных частот при  $xd=0$ , то взаимодействие между двумя спектрами может оказаться весьма существенным. Поэтому главное внимание при анализе мы уделим случаю толстых пластин ( $d \gg l$ ).

Распределение переменного магнитного поля  $h$  и плотности магнитного момента  $m$  в спиновой волне определяется, согласно (3), значением величин  $q_z$ . Если все три  $q_z$  действительны, то спиновая волна — объемная; если  $\operatorname{Im} q_z \neq 0$ , то она похожа на поверхностную волну. Правда, то, насколько затухает поле (момент) в глубину пластины, зависит от соотношения амплитуд при  $\cos q_z z$  (или  $\sin q_z z$ ) (они пропорциональны  $F_z$ ).

В отсутствие обменного взаимодействия  $q = X_m/d$  — действительное число, так как уравнения (10), (11) не имеют комплексных решений.

т. е. в поперечно-намагниченной пластине поверхностных магнитодипольных возбуждений нет [4]. Это существенно отличает рассматриваемый случай от пластины в параллельном магнитном поле [6].

Структура поля  $h$  и момента  $m$  в стоячей спиновой волне с чисто обменным законом дисперсии (9) соответствует объемной волне. Учет одновременно двух взаимодействий кардинально изменяет ситуацию.

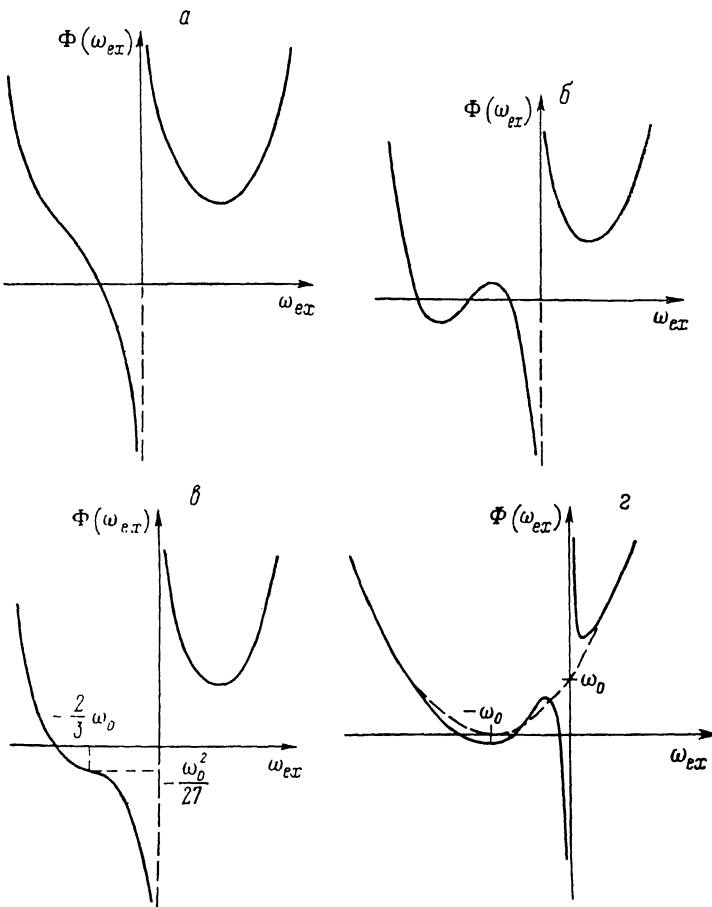


Рис. 3. Правая часть уравнения (12) при различных соотношениях между  $\omega_x$  и  $\omega_0$ :  $\omega_x > (2/3)^{3/2}\omega_0$  (а),  $\omega_x < (2/3)^{3/2}\omega_0$  (б),  $\omega_x = (2/3)^{3/2}\omega_0$  (в),  $\omega_x \ll \omega_0$  (г). При  $\omega_x \rightarrow 0$  кривая  $\Phi(\omega_{ex})$  превращается в параболу  $\Phi(\omega_{ex}) = (\omega_0 + \omega_{ex})^2$  (штриховая кривая).

Определение закона дисперсии предполагает решение бикубического уравнения (4), т. е. определение  $q_i = q_i(\omega, \kappa)$  и затем подстановки этих значений в уравнение (5) (или (6)). Без приближений программу можно довести до решения трансцендентного уравнения (5) (или (6)). После этого, естественно, придется прибегнуть либо к численным расчетам, либо к использованию малых параметров. Качественное рассмотрение предполагает именно этот (второй) вариант.

3. Качественный анализ спектра начнем с исследования уравнения (4), которое удобно переписать следующим образом:

$$\omega^2 = (\omega_0 + \omega_{ex})^2 + \omega_x^2 + \omega_0 \omega_x^2 / \omega_{ex}, \quad \omega_x^2 = 4\pi (gM)^2 (\kappa l)^2. \quad (12)$$

Правую часть уравнения обозначим  $\Phi(\omega_{ex})$ . Количество экстремумов на кривой  $\Phi = \Phi(\omega_{ex})$  зависит от соотношения между  $\omega_0$  и  $\omega_x$  (рис. 3, а—г). Значения  $\omega_{ex}$ , в которых  $\Phi = \Phi(\omega_{ex})$  имеет экстремумы, и значения самой функции  $\Phi(\omega_{ex})$  в этих точках для предельных случаев таковы: при  $\omega_x \gg \omega_0$  (рис. 3, а)

$$\omega_{\text{ex}}^{\text{min}(1)} \approx (\omega_0 \omega_x^2 / 2)^{1/3}, \quad \Phi_{\text{min}} \approx \omega_x^2 [1 + 3(\omega_0 / 2\omega_x)^{2/3}], \quad (13)$$

при  $\omega_x \ll \omega_0$  (рис. 3, б)

$$\omega_{\text{ex}}^{\text{min}(1)} \approx -\omega_0, \quad \Phi_{\text{min}}^{(1)} \approx -\frac{\omega_x^4}{4\omega_0^2}, \quad \omega_{\text{ex}}^{\text{extr}(2,3)} \approx \pm \frac{\omega_x}{\sqrt{2}},$$

$$\Phi_{\text{extr}}^{(2,3)} \approx \omega_0^2 \left(1 \pm 2\sqrt{2} \frac{\omega_x}{\omega_0}\right). \quad (14)$$

Таким образом, частота  $\omega$  и отношение  $\omega_x / \omega_0$  определяет число действительных корней кубического уравнения (13) относительно  $\omega_{\text{ex}}$ . Положительность  $\omega_{\text{ex}}$  не обязательно означает действительность  $q$  (см. (4)). Согласно рис. 3, а—г, уравнение (12) всегда имеет хотя бы один отрицательный корень и, следовательно, обязательно есть хотя бы одно мнимое значение  $q$ .

Не прибегая к формулам Кардана, корни уравнения (12) как функции частоты  $\omega$  можно получить лишь в предельных случаях.

1) Пусть <sup>2</sup>

$$|\omega - \omega_0| \gg \omega_x, \quad \omega \neq 0. \quad (15)$$

Тогда два корня имеют конечные значения, а один стремится к нулю (либо за счет  $\omega_x \rightarrow 0$ , либо за счет  $\omega \rightarrow \infty$ )

$$\omega_{\text{ex}}^{(1)} \approx \frac{\omega_0 \omega_x^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_{\text{ex}}^{(2,3)} \approx \pm \omega - \omega_0 \mp \frac{\omega_x^2}{2(\omega \mp \omega_0)}. \quad (16)$$

При этом величина  $\omega_x$  может быть как большой (соответствующей рис. 3, а), так и маленькой (рис. 3, б, г). В этом случае (см. (15)) все три корня  $\omega_{\text{ex}}$  действительны. При  $\omega > \omega_0$  два корня положительны, а один отрицателен (рис. 3, а, б); при  $\omega < \omega_0$  (это условие в сочетании с (15) возможно только при  $\omega_x \ll \omega_0$ ) все три корня отрицательны (рис. 3, г).

При самых низких частотах ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$\omega_{\text{ex}}^{(1)} \approx -\omega_0, \quad \omega_{\text{ex}}^{(2,3)} \approx 1/2 \left(-\omega_0 \mp \sqrt{\omega_0^2 - 4\omega_x^2}\right). \quad (17)$$

Из (17) видно, что корни  $\omega_{\text{ex}}^{(2,3)}$  могут быть как действительными (рис. 3, б, г), так и комплексными (рис. 3, а, в).

2) Интересна, кроме того, ситуация, когда  $\omega \approx \omega_0$  при  $\omega_x \ll \omega_0$  (рис. 3, г). В этом случае имеем

$$\omega_{\text{ex}}^{(1)} \approx -\omega - \omega_0 \approx -2\omega_0, \quad (18a)$$

$$\omega_{\text{ex}}^{(2,3)} \approx (1/4\omega_0) \left\{ \omega^2 - \omega_0^2 \mp \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 8\omega_0^2 \omega_x^2} \right\}. \quad (18б)$$

В согласии с рис. 3, г при значении  $\omega^2$ , лежащем между  $\Phi_{\text{extr}}^{(2)}$  и  $\Phi_{\text{extr}}^{(3)}$  (см. (15)), корни  $\omega_{\text{ex}}^{(2,3)}$  комплексны.

3) При  $\omega_x \gg \omega_0$  можно найти решения в области  $\omega^2 \approx \Phi_{\text{min}}$  (см. (14))

$$\omega_{\text{ex}}^{(1,2)} \approx \left(\frac{\omega_0 \omega_x^2}{2}\right)^{1/3} \left(1 \pm \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \Phi_{\text{min}}}}{\sqrt{3}(\omega_0 \omega_x^2 / 2)^{1/3}}\right), \quad \omega_{\text{ex}}^{(3)} \approx -2 \left(\frac{\omega_0 \omega_x^2}{2}\right)^{1/3}. \quad (19)$$

Видно (рис. 3, а), что при  $\omega^2 < \Phi_{\text{min}}$  два корня комплексны.

4. Дальнейший путь решения таков: по  $\omega_{\text{ex}}^{(i)}$  находим  $q_i$ , подставляем в уравнения (5), (6) и определяем закон дисперсии. Знак  $q_i$  неважен, так как функции, входящие в уравнения (5), (6), четные. Если мы используем приближенные значения  $q_i$ , то, найдя значения частот  $\omega_*$  ( $\chi$ ), мы должны оставить те из них, которые удовлетворяют использованным при определении  $\omega_{\text{ex}}$  ( $\omega$ ,  $\chi$ ) предположениям.

Знание  $q_i = q_i(\omega, \chi)$  имеет самостоятельный интерес, определяя структуру магнитного момента и магнитного поля при фиксированных частоте  $\omega$

<sup>2</sup> К неравенству (15) надо добавить условие: при  $\omega_x \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \omega_0$  (случай  $\omega \rightarrow \omega_0$  будет рассмотрен ниже).

в волновом векторе  $x$  (например, при решении задачи о вынужденных колебаниях магнитного момента).

Начнем со случаев, описываемых формулами (16). Когда  $\omega_x$  мало, пользуясь выражениями (7) для  $F_i$  и пренебрегая величинами  $\omega_x$  по сравнению с  $|\omega - \omega_0|$ , можно переписать уравнение (5) для симметричных мод в следующем виде: при  $\omega < \omega_0$  ( $q_i \equiv i\gamma_i$ )

$$\left\{ 1 + \frac{x}{\gamma_1 \operatorname{th} \frac{\gamma_1 d}{2}} \right\} \times \frac{\operatorname{th} (\gamma_2 d/2)}{\left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} \left[ \operatorname{th} \frac{\gamma_2 d}{2} + \frac{x}{\gamma_2} \right] + \frac{\operatorname{th} (\gamma_2 d/2)}{(\omega + \omega_0)^2} \left[ 1 + \frac{x}{\gamma_3 \operatorname{th} \frac{\gamma_3 d}{2}} \right] \right\}} = \frac{\omega_x^2}{2}, \quad (20a)$$

при  $\omega > \omega_0$

$$\left\{ 1 - \frac{x}{q_1 \operatorname{tg} \frac{q_1 d}{2}} \right\} \times \frac{\operatorname{tg} (q_2 d/2)}{\left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2} \left[ \operatorname{tg} \frac{q_2 d}{2} - \frac{x}{q_2} \right] + \frac{\operatorname{tg} (q_2 d/2)}{(\omega + \omega_0)^2} \left[ 1 + \frac{x}{\gamma_3 \operatorname{th} \frac{\gamma_3 d}{2}} \right] \right\}} = \frac{\omega_x^2}{2}. \quad (20b)$$

Малость  $\omega_x$  обусловлена малостью  $xl$ , но при  $d \gg l$  это не означает малости  $x d$ . В пределе  $\omega_x^2 \rightarrow 0$  уравнение (20a) не имеет решения, а уравнение (20b) разбивается на два

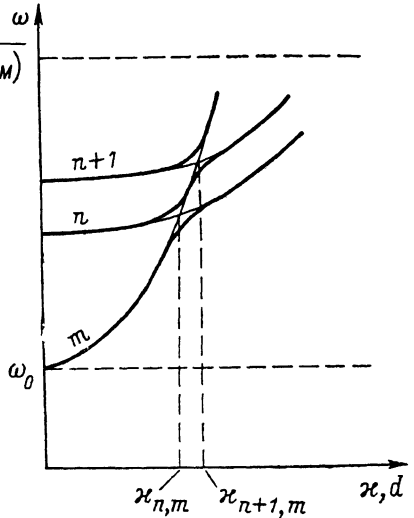
$$1 - x/q_1 \operatorname{tg} (q_1 d/2) = 0, \quad \operatorname{tg} (q_2 d/2) = 0. \quad (21) \quad \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)}$$

Первое из них соответствует чисто дипольному спектру (9), а второе — обменному (8). Т. е. спектр пластины является «наложением» двух спектров.<sup>3</sup>

Формулы (8), (9) показывают, что при  $d \gg l$

$$xl \approx (2\pi)^{3/2} mn (l/d)^2 \equiv x_{nm} l \quad (22)$$

Рис. 4. Пересечение двух ветвей обменного спектра  $\omega_n^{\text{обм}}(x)$  и  $\omega_{n+1}^{\text{обм}}(x)$  вблизи точек  $x = x_{nm}$  и  $x = x_{n+1, m}$  с одной из ветвей магнитодипольного спектра  $\omega_m^{\text{дип}}(x)$  (см. (23)).



ветви разных спектров пересекаются (рис. 4, 5). При этом рассматриваемые  $m$  и  $n$  не должны быть слишком велики, чтобы не нарушать малости  $\omega_x$  (ср. (22) и (15)). Вблизи  $x = x_{nm}$  ветви «расталкиваются»

$$\Delta\omega_{nm} = \omega_{x_{nm}} \frac{\omega + \omega_0}{\sqrt{\pi\omega_0\omega}} \frac{l}{d}, \quad \omega = \omega_m^{\text{дип}} = \omega_n^{\text{обм}}. \quad (23)$$

Для вычисления поправок к значениям частот (8) и (9) вдали от точек пересечения надо учесть не только правую часть уравнения (20b), но и уточнить значения  $q_i$  и  $F_i$ . Эти поправки таковы: к дипольным частотам

<sup>3</sup> Напомним, что мы рассматриваем случай, когда  $\omega \neq \omega_0$  (см. (15)). Поэтому в формулах (8), (9)  $n \neq 0$ ,  $m \neq 0$ .

$$\Delta\omega_m^{\text{дип}} = -\frac{\omega_x^2}{\omega_m^{\text{дип}}} \frac{[(\omega_m^{\text{дип}})^2 + \omega_0^2]}{\omega_0\omega_m} \frac{X_m^2}{(\kappa d)^2 [1 + \kappa d + X_m^2]} + \frac{\omega_x^3}{\omega_m^{\text{дип}}\omega_0\omega_M^2} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\pi g M} X_m^2}{(\kappa d)^2 [1 + \kappa d + X_m^2]} \left\{ \frac{(\omega_m^{\text{дип}} + \omega_0)^2}{\sqrt{\omega_m^{\text{дип}} - \omega_0} \operatorname{tg}(q_2(\omega_m^{\text{дип}}) d/2)} - \frac{(\omega_m^{\text{дип}} - \omega_0)^2}{\sqrt{\omega_m^{\text{дип}} + \omega_0} \operatorname{th}(\gamma_3(\omega_m^{\text{дип}}) d/2)} \right\}, \quad (24)$$

к обменным частотам

$$\Delta\omega_n^{\text{обм}}(\kappa) = \frac{\omega_x^2}{\omega_M} \left[ \frac{\omega_M}{2(\omega_n^{\text{обм}} - \omega_0)} + 1 \right] + \sqrt{\pi} n \frac{l}{d} \frac{\omega_x^3}{(\omega_n^{\text{обм}} - \omega_0)^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\left\{ \frac{\kappa}{q_1(\omega_n^{\text{обм}}) \operatorname{tg}(q_1(\omega_n^{\text{обм}}) d/2)} - 1 \right\}}. \quad (25)$$

Хотя главные поправки квадратичны по  $\omega_x$ , мы сохраняем в формулах (24) и (25) члены, кубические по  $\omega_x$ , так как они осциллируют при изме-

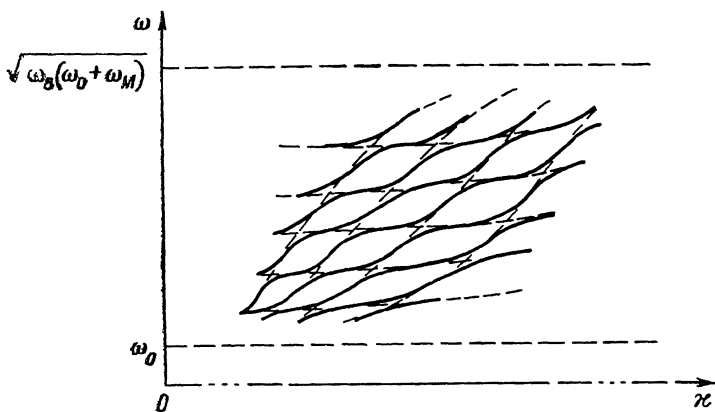


Рис. 5. Участок спектра при пересечении магнитодипольных и обменных ветвей.

нении  $\kappa$  за счет  $\operatorname{tg}(q_1(\omega_n^{\text{обм}}) d/2)$  и  $\operatorname{tg}(q_2(\omega_n^{\text{обм}}) d/2)$ . Напомним, что эти формулы справедливы только вдали от точек пересечения спектров.

В случае больших  $\omega_x$ , но ограниченных условием (15), частоты близки к обменным. Поправки обязаны дипольному взаимодействию

$$\omega = \omega_n^{\text{обм}}(\kappa) + \omega_M/2 [1 + \pi n^2 (\omega_M/\omega_x)^2 (l/d)^2]. \quad (26)$$

В формулах (20)–(26) мы рассматривали только решения уравнения (5). В антисимметричном случае соответствующие формулы справедливы, если в них заменить  $n$  на  $n-1/2$  и  $m$  на  $m-1/2$ .

Используя формулы (17) при  $\omega_x \rightarrow 0$  (рис. 3, з), легко показать, что при  $\omega \rightarrow 0$  решений уравнений (5), (6) нет.

Специального рассмотрения требует случай  $\omega \rightarrow \omega_0$  при  $\omega_x \ll \omega_0$  (рис. 3, з). Если частота попадает в интервал между  $\Phi_{\text{extr}}^{(2)}$  и  $\Phi_{\text{extr}}^{(4)}$  (см. (14)), то уравнения (5), (6) не имеют решений. Если  $\omega > \omega_0 [1 + \sqrt{2} (\omega_x/\omega_0)]$ , то уравнение (5) имеет решение, а уравнение (6) не имеет. Согласно (18), (5) и (7), при  $\omega \rightarrow \omega_0$

$$\omega = \omega_s(\kappa) = \omega_0 + (\omega_M/8) \kappa d [1 + \sqrt{1 + (16/\pi)(l/d)^2}]. \quad (27)$$

Индекс «s» указывает, что потенциал магнитного поля симметричен. Формула (27) показывает, что за счет обменного взаимодействия перенормируется нижняя ветвь спектра. Отметим, что в чисто дипольном спектре

линейная (при  $x \rightarrow 0$ ) ветвь — верхняя, а в спектре, учитывающем обмен, — нижняя.

Наконец, требует рассмотрения случай, описываемый формулами (13), (19) (рис. 3, а). Когда  $\omega^2 = \Phi_{\min}$ , а следовательно,  $\omega_{\text{ex}}^{(1)} = \omega_{\text{ex}}^{(2)} = (\omega_0 \omega_x^2 / 2)^{1/2}$ , уравнения (5), (6) тождественно выполняются. Всегда, когда два корня  $\omega_{\text{ex}}$  равны, т. е. при  $\omega^2 = \Phi_{\text{extr}}(\omega_{\text{ex}})$ , уравнения (5) и (6) удовлетворяются автоматически. Однако эти частоты не являются собственными частотами рассматриваемой системы, так как при равенстве корней  $\omega_{\text{ex}}$  магнитное поле и магнитный момент тождественно равны нулю. Тем не менее эти частоты являются «особыми» для магнетика в поле, перпендикулярном поверхности, в том смысле, что при этих значениях частоты и волнового вектора должны существовать особенности высокочастотных характеристик магнетика. Эти значения частот  $\omega = \omega_{\text{oc}}(\omega_x)$  как функций  $\omega_x$  изображены на рис. 6. При  $x \rightarrow 0$

$$\omega_{\text{oc}}(x) \approx \omega_0 (1 \pm \sqrt{2} (\omega_x / \omega_0)), \quad (28)$$

при  $\omega_x \gg \omega_0$

$$\omega_{\text{oc}}(x) \approx \omega_x [1 + (3/2) (\omega_0 / 2\omega_x)^{2/3}]. \quad (29)$$

Нижняя ветвь при  $\omega_x \rightarrow \omega_0/2$  корневым образом обращается в нуль

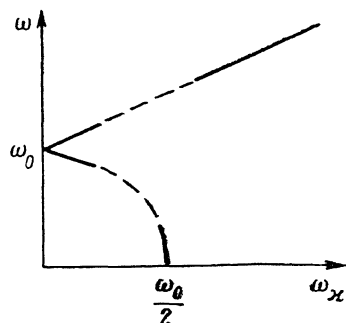


Рис. 6. Особые частоты как функции волнового вектора, при которых высокочастотные характеристики магнетика имеют особенности.

$$\omega_{\text{oc}}(x) \approx \sqrt{\omega_0 (\omega_0/2 - \omega_x)}, \quad \omega_x \leq \omega_0/2. \quad (30)$$

Особые частоты характерны для неограниченного магнетика. Они не зависят от толщины образца  $d$ .

5. Качественный анализ спектра пластины, намагниченной перпендикулярно поверхности показал следующее.

1) При  $d \gg l$  спектр спиновых волн в определенном интервале волновых векторов  $x$  является пересечением дипольного и обменного спектров (формулы (8), (9), (23)—(27), рис. 4, 5). Из-за большого значения отношения  $d/l$  незначительное изменение параметров (толщины пластины  $d$ , величины магнитного поля  $H$  и др.) существенно перестраивает зависимость  $\omega = \omega_n(x)$ . Т. е. рассматриваемый спектр похож на квазислучайный, характерный, например, для магнитного пробоя [15]. Существование очень маленьких расстояний между ветвями спектра в точках  $x = x_{nm}$  (см. (22)) означает возможность низкочастотного поглощения электромагнитной и (или) звуковой энергии.

2) Из-за наличия точек сгущения в чисто дипольном спектре (9) в дипольном приближении нельзя вычислить термодинамические характеристики пластины при  $T \neq 0$ . Наш анализ показывает, что при сравнительно высоких температурах ( $T > \hbar \sqrt{\omega_0 (\omega_0 + \omega_M)}$ ), но, конечно,  $T \ll \Theta_c$  величина термодинамических характеристик определяется зависимостью частот спиновых волн от  $\omega_x \gg \omega_0$ . Вычисление намагниченности и других термодинамических характеристик пластины будет предметом отдельного сообщения. Здесь мы только отметим, что при  $T \rightarrow 0$  множитель перед  $\text{exr}(-\hbar \omega_0 / T)$  определяется линейной (при  $x \rightarrow 0$ ) ветвью спектра (см. (27)). Например, число спиновых волн на единицу площади поверхности пластины равно

$$N_{\text{св}} \approx \frac{e^{-\hbar \omega_0 / T}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty e^{-\hbar v x / T} 2\pi x dx, \quad v = \frac{\omega_M d}{8} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16}{\pi} \left( \frac{l}{d} \right)^2} \right] \quad (31)$$

ИЛИ

$$N_{\text{св}} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{T}{\hbar v} \right)^2 e^{-\hbar \omega_0 / T}, \quad T \rightarrow 0.$$



3) Все рассмотрение велось без учета диссипативных процессов, что, конечно, накладывает ограничение на применимость выведенных формул. По-видимому, самое жесткое условие возникает из требования возможности наблюдения расщепления в спектре (см. (23)): для этого должно быть  $\Delta\omega_m\tau \gg 1$ , где  $\tau$  — время жизни спиновой волны.

4) Хотя мы использовали только киттелевское граничное условие ( $dm/dz$  ( $d/2$ )=0), обобщение граничных условий, по нашему мнению, не должно существенно изменить качественной картины спектра.

Мы благодарны Л. П. Питаевскому за обсуждение полученных результатов.

#### Список литературы

- [1] Jin B. Y., Ketterson J. B. // *Adv. in Phys.* 1989. V. 38. N 3. P. 189—368.
- [2] Wolfram T., De Wames R. E. // *Phys. Rev.* 1970. V. B1. N 11. P. 4358—4360.
- [3] Wolfram T., De Wames R. E. // *Prog. Surf. Sci.* 1972. V. 2. P. 233—239.
- [4] Барьяхтар В. Г., Каганов М. И. // *Ферромагнитный резонанс и спиновые волны*. М., 1961. 266 с.
- [5] Гани В. В. // *ФТТ*. 1966. Т. 8. № 11. С. 3167—3172.
- [6] Damon R. W., Esbach J. R. // *J. Phys. Chem. Solids*. 1961. V. 19. N 4. P. 308—329.
- [7] Walker L. // *Phys. Rev.* 1957. V. 105. N 2. P. 310—316.
- [8] Kittel C. // *Phys. Rev.* 1958. V. 110. N 5. P. 1295—1301.
- [9] Trait Z. // *Phys. St. Sol.* 1962. V. 2. N 9. P. 1417—1421.
- [10] Каганов М. И. // *ЖЭТФ*. 1960. Т. 39. № 1. С. 158—162.
- [11] Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е. // *РЭ*. 1978. Т. 23. № 5. С. 897—917.
- [12] Grünberg P. // *J. Appl. Phys.* 1985. V. 57. N 8. P. 3673—3677.
- [13] Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. *Спиновые волны*. М., 1967. С. 368.
- [14] Pincus P. // *Phys. Rev.* 1960. V. 118. N 3. P. 658—664.
- [15] Каганов М. И., Слуцкий А. А. // *Электроны проводимости*. М., 1985. С. 101—197.

Институт физических проблем  
им. С. И. Вавилова  
АН СССР  
Москва

Поступило в Редакцию  
1 августа 1990 г.