ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ВТОРОГО КРИТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

С. А. Ктиторов, Ю. В. Петров, Б. Н. Шалаев, В. С. Шерстинов

Изучено влияние флуктуаций на термодинамику высокотемпературного сверхпроводника вблизи второго критического магнитного поля. Показано, что решеточные эффекты, а именно харперовское расщепление и уширение уровней Ландау, редуцируют задачу к перенормируемой теории поля с q-компонентным комплексным параметром порядка, где $\Phi/\Phi_0=p/q$ — число квантов магнитного потока через плакет; p, q — целые числа. Проанализировано критическое поведение модели при небольших $q=1$, 2, 3, 4, и показано, что имеет место переход второго рода. Найден кроссовер с одномерного на трехмерное поведение флуктуаций.

В настоящее время не существует последовательного описания критического поведения сверхпроводников второго рода вблизи второго критического поля H_{c_2}. В отличие от обычного сверхпроводящего перехода в нулевом магнитном поле флуктуационные поправки к теории среднего поля [1, 2] вблизи H_{c_2} играют важную роль, что является следствием эффективной размерной редукции в магнитном поле [3]. В частности, флуктуационная поправка к теплоемкости имеет вид [2]

$$\Delta C(\tau) \sim \int \frac{d^{d-2}q}{(q^2+\tau^2)^2} \sim \tau^{-(6-d)/2},$$

где $\tau \sim (T-T_c)/T_c$. Это заставляет думать, что флуктуационные эффекты вблизи H_{c_2} могут существенно влиять на критическую термодинамику системы и, в частности, на род фазового перехода. Такая задача была сформулирована для сверхпроводников второго рода в [3]. Однако попытка ренормгруппового анализа критического поведения натолкнулась на серьезные трудности. Дело в том, что последовательные перенормировки эффективного взаимодействия приводят к бесконечному «размножению» инвариантных зарядов, что означает неперенормируемость теории. Физической причиной этого, по-видимому является бесконечное вырождение состояний, присущее задаче об электроне в однородном магнитном поле. Попытка обойти эту трудность, предпринятая в работе [3], на наш взгляд не является удовлетворительной.

1. Функционал Гинзбурга—Ландау

В настоящей работе предпринята попытка обойти эту трудность путем учета решеточных эффектов, снимающих бесконечное вырождение. Точнее, остается лишь конечно-кратное вырождение. Учет решеточных эффектов представляется естественным в случае высокотемпературных сверхпроводников ввиду малости корреляционных длин и сравнительной узости разрешенных зон. Учитывая, что введение эффектов кристаллической решетки является в данной задаче прежде всего приемом, обеспечивающим ее перенормируемость, запишем «решеточный» функционал Гинзбурга—Ландау в виде

$$F=\int d^dx\left[\psi^*(\mathbf{x})\,E\left(-i\nabla-\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\right)\psi(\mathbf{x})-\right.$$

$$\left.-\mu\psi^*(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})-\frac{g}{4!}\,\psi^*(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,\psi^*(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\right], \qquad (1)$$

где $E(k)$ — зонный спектр; в отсутствие решеточных эффектов эта функция переходит в стандартное выражение $E(k)=\hbar^2k^2/2m$; μ — химический потенциал электронных пар; $g>0$ — константа связи; $\Psi(x)$ — комплексный параметр порядка.

Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения

$$E(-i\nabla-(e/c)\,\mathbf{A})\,\psi_{n\alpha k}(\mathbf{x})=\xi_{n\alpha}(\mathbf{k})\,\psi_{n\alpha k}(\mathbf{x}). \qquad (2)$$

Это известное уравнение Харпера [4], описывающее уширение и расщепление электронных уровней Ландау за счет решеточных эффектов,

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\,\mathbf{B}\times\mathbf{r},\quad B=\Phi_0\frac{p}{q}\frac{a_z}{v}, \qquad (3)$$

B — однородное внешнее магнитное поле; $\Phi_0=hc/2e$ — квант магнитного потока; p, q — взаимно простые целые числа; v — объем элементарной ячейки; a_z — основной период решетки; k — квазиволновой вектор, определенный в магнитной зоне Бриллюэна; n — номер магнитной зоны; α пробегает значения $1, 2, \ldots q$ при четном q и $1, 2, \ldots q/2$ при q нечетном. Заметим, что спектр вырожден по квантовому числу α. Собственные функции $\psi_{n\alpha k}(\mathbf{r})$ осуществляют q $(q/2)$-мерное неприводимое проективное представление группы трансляций.

Рассмотрим реализацию уравнения (2) в случае простой тетрагональной решетки с затравочным электронным спектром в приближении сильной связи

$$E(k)=-(\Delta/4)(\cos k_xa-\cos k_ya)-(\Delta_\parallel/2)\cos k_za_z, \qquad (4)$$

где a, a_z — постоянные решетки в плоскости xy и направлении z соответственно; Δ — ширина двумерной зоны; $\Delta_\parallel$ — ширина зоны в продольном направлении (ось c).

Гамильтониан Харпера для (2) имеет вид [4]

$$H=\Delta\left(\sum_k c^+_{k+w}c_ke^{ik_xa}+c^+_{k-w}c_ke^{-ik_xa}+2c^+_kc_k\cos k_ya\right)+\Delta_\parallel\sum_k c^+_kc_k\cos k_za_z, \qquad (5)$$

где c^+_k, c_k — операторы рождения и уничтожения электрона; $\{c_k,\ c^+_{k'}\}=\delta_{kk'}$; $w=(0,\ 2\pi p/qa,\ 0)$ и отражает периодичность решетки.

Имея в виду магнитную симметрию, удобно ввести q-компонентный вектор

$$\Psi_k=\begin{bmatrix} c_{k+2\pi\alpha}\\ c_{k+2\pi\alpha\cdot 2}\\ \vdots\\ c_{k+2\pi\alpha q}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\varphi_1(k)\\ \varphi_2(k)\\ \vdots\\ \varphi_q(k)\end{bmatrix}. \qquad (6)$$

В этом представлении гамильтониан имеет следующий матричный вид:

$$H=\Delta\sum_k\Psi^+_k\mathscr{H}_k\Psi_k=\Delta\sum\varphi^+_{\nu_1}(k)\langle\nu_1|\,\mathscr{H}(k)\,|\nu_2\rangle\,\varphi_{\nu_2}(k). \qquad (7)$$

Суммирование по k осуществляется по приведенной зоне Бриллюэна. Матрица $\mathscr{H}_k$ имеет вид эрмитовой матрицы $q\times q$

$$\mathscr{H}_k=\begin{bmatrix}\cos(k_ya-2\pi p/q) & \exp(-ik_xa) & \ldots & \exp(ik_xa)\\ \exp(ik_xa) & \cos(k_ya-4\pi p/q) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \exp(-ik_xa)\\ \exp(-ik_xa) & 0 & \ldots & \cos(k_ya-2\pi p)\end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Исследованию собственных состояний матрицы $\mathcal{H}_k$ посвящено большое число работ [5-7]. Спектр задачи на собственные значения

$$\mathcal{H}_k \langle k, \alpha' | k, \alpha, n\rangle = E(k, n) \langle k, \alpha' | k, \alpha, n\rangle, \tag{9}$$

где собственные функции можно рассматривать как коэффициенты представления ($\varphi_{\alpha n}(k)$ — новые операторы уничтожения)

$$\varphi_\alpha(k) = \sum_{\alpha' n} \varphi_{\alpha' n}(k) \langle k, \alpha | k, \alpha', n\rangle, \tag{10}$$

$\mathcal{H}_k$ — матрица (8), а $\langle k, \alpha \mid k, \alpha', n\rangle$ — проекция собственной функции на базис (6) представляет собой совокупность полос с законом дисперсии, являющихся функциями от $\cos(qk_x a) + \cos(qk_y a)$. Вид этих функций может быть установлен диагонализацией матрицы $\mathcal{H}_k$, что представляет собой достаточно сложную задачу. Для наших целей достаточно знать следующие общие свойства решений: 1) как было отмечено выше, состояния в зонах q $(q/2)$-кратно вырождено; 2) при целых p и q спектр вблизи края описывается достаточно гладкой дифференцируемой функцией.

Это позволяет воспользоваться своеобразным приближением эффективной массы, разложив спектр вблизи минимумов до $k_\perp^2 \equiv (k_x^2 + k_y^2)$ включительно; $\Delta_н/4\cos qka \sim (qka)^2/2m^*$, $\Delta_н$ — ширина низшей электронной зоны в магнитном поле, m^* — эффективная масса на дне зоны. Разложим параметр порядка $\Psi(r)$ по собственным функциям $\psi_{n\alpha k}(r)$ (2)

$$\Psi(r) = \sum u_{n\alpha k} \psi_{n\alpha k}(r), \tag{11}$$

где функции $\psi_{n\alpha k}(r)$ связаны с собственными векторами задачи Харпера преобразованием Фурье. Подставив разложение (11) в функционал Гинзбурга—Ландау, получим эффективное действие, являющееся отправной точкой дальнейшей работы

$$F = \int\limits_{-\pi/qa}^{\pi/qa} \frac{dk_x}{2\pi} \int\limits_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk_y}{2\pi} \int\limits_{-\pi/a_z}^{\pi/a_z} \frac{dk_z}{2\pi} \sum_{n\alpha} \left(\frac{k_\perp^2}{2m^*} - \mu \right) |u_{n\alpha k}|^2 +$$

$$+ \sum_{n\alpha} \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^{1/3}} u^*_{n_1\alpha_1 k_1} u_{n_2\alpha_2 k_2} u^*_{n_3\alpha_3 k_3} u_{n_4\alpha_4 k_4} g^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{k_1 k_2 k_3 k_4}. \tag{12}$$

Коэффициенты $g^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ определяются собственными векторами задачи

$$g^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \int d^3x \psi^*_{n_1\alpha_1 k_1} \psi_{n_2\alpha_2 k_2} \psi^*_{n_3\alpha_3 k_3} \psi_{n_4\alpha_4 k_4}. \tag{13}$$

В приближении эффективной массы, справедливом в критической области $(\tau \to 0)$, можно пренебречь зависимостью g от k. Собственные векторы, а значит и все $g^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, могут быть найдены в некоторых простейших случаях $q=2, 3, 4$. Возможные инварианты четвертого порядка определяются группой магнитных трансляций. При $q=1$ или 2 имеется одна единственная компонента комплексного параметра порядка и, следовательно, единственный инвариант $g \mid \Psi \mid^4$. При $q=3$ имеются трехкомпонентный комплексный параметр порядка и, как нетрудно показать, два отличных от нуля инварианта

$$g_1 \sum_{\alpha=1}^{n} |\psi_\alpha|^4 + g_2 \left(\sum_{\alpha=1}^{n} |\psi_\alpha|^2 \right)^2, \tag{14}$$

где $n=3$. При $q=4$ имеем двухкомпонентный параметр порядка и снова два инварианта (14) с $n=2$. Число инвариантов N в общем случае определяется четностью числа компонент параметра порядка n

$$N = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ (n-2)/2 & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

причем

$$n = \begin{cases} q & \text{при } q \text{ нечетном,} \\ q/2 & \text{при } q \text{ четном.} \end{cases}$$

2. Критическое поведение вблизи H_{c_2}

Выше было показано, что в окрестности второго критического поля H_{c_2}, сверхпроводник описывается комплексным n-компонентным параметром порядка. Исследование критического поведения рассматриваемой системы в трехмерном пространстве удается аккуратно провести лишь для небольших значений n и соответственно в области сильных магнитных полей. С ростом n растет и число допустимых инвариантов четвертого порядка, т. е. количество инвариантных зарядов, поэтому стандартный ренормгрупповой подход малоэффективен.

Дело в том, что в трехмерном случае надежные результаты можно получить, лишь применяя различные способы пересуммирования рядов теории возмущений с использованием преобразования Бореля. При этом необходимые ренормгрупповые функции должны быть рассчитаны в достаточно высоком порядке по константам связи. Ясно, что эта программа может быть реализована в полной мере в моделях с небольшим числом инвариантных зарядов. К сожалению, в настоящее время имеются вычисления лишь для одно- и двухзарядных моделей.

Пусть $q=1$, 2, следовательно, $n=1$. Таким образом, мы имеем дело со стандартной моделью ψ^4 для комплексного скалярного поля. В этой модели при $d=3$ происходит фазовый переход второго рода, такой же, как и в обычных сверхпроводниках. Наиболее точные на сегодняшний день значения критических индексов были получены в работе [8]

$$\alpha = -0.007,\ \beta = 0.346,\ \gamma = 1.315,\ \nu = 0.669,\ \delta = 0.48,\ \eta = 0.033. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь случай $q=3$, 4, соответственно $n=3$, 2. Гамильтониан Ландау для этих моделей имеет вид

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} |\nabla\psi_\alpha|^2 + \frac{1}{2} \varkappa_0^2 |\psi_\alpha|^2 + \frac{g_1}{4!} \sum_{\alpha=1}^{n} |\psi_\alpha|^4 + \frac{g_2}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} |\psi_\alpha|^2 \right)^2 \right\}, \quad (16)$$

где $\varkappa_0^2 \sim (T-T_c)/T_c$. Детальное исследование этой системы, использующее трехпетлевые вычисления перенормированной теории возмущений и рафинированные методы пересуммирования, было выполнено в работе [9]. Согласно [9], если затравочные значения g_1, $g_2 > 0$, то вершина g_2 несущественна, поэтому критическое поведение модели (16) характеризуется критическими индексами двухкомпонентной изотропной гейзенберговской модели.

Таким образом, для $q=1$, 2, 3, 4 кривая $H_{c_2}=f(T)$ является линией переходов второго рода. Возникает вопрос: что происходит при реалистических значениях $q \gg 1$, что соответствует реально достижимым полям? К сожалению, изменение рода перехода является тонким эффектом, который не может быть надежно установлен путем вычислений в «небольшом» (1—4) числе петель. При этом требуется провести суммирование по Паде—Борелю, которое реально не выполнимо при числе инвариантных зарядов больше двух. Есть, правда, один асимптотически точно решаемый случай, когда можно пренебречь всеми затравочными вершинами, кроме сферической. В этом случае $(1/q)$-разложение дает асимптотически точный результат — переход второго рода. Разумеется, учет несферических вершин может существенно повлиять на результат [10].

3. Одномеризация флуктуаций вдали от точки перехода

Рассмотрим пропагатор решеточной модели в магнитном поле

$$G(k) = 1\Big/\left[\tau + \frac{\Delta_н}{4}(\cos k_x qa + \cos k_y qa) + \frac{\Delta_\parallel}{2}\cos k_z a_z\right], \tag{17}$$

где $\tau = \alpha\,(T-T_c)$; α — безразмерный параметр, в нормальных металлах эта величина порядка 10^{-1}. Вдали от линии переходов $\tau \gg \Delta_н/4$. В этом случае можно пренебречь харперовским уширением уровней ($\Delta_н/4 \to 0$). При этом мы имеем дело с квазиодномерными флуктуациями параметра порядка. Вдали от перехода применима теория самосогласованного поля, но флуктуационные поправки быстро нарастают по мере приближения к точке перехода благодаря эффективной размерной редукции (d—2) (одномеризация). При $\tau \sim \Delta_н/4$ имеет место кроссовер к трехмерному поведению флуктуаций. Действительно, при $\tau \ll \Delta_н/4$ для корреляционной длины можно написать равенство

$$\hbar^2/\xi m^* = \alpha\,(T - T_c), \tag{18}$$

где $m^{*-1} = \Delta_н(qa)^2/\hbar^2$, a — постоянная решетки. Мы разложили $\cos qka$, что можно сделать при $\xi \gg a$. Оценим условия кроссовера. Характерная ширина зоны Ландау может быть оценена как [11]

$$\Delta_н = 8\Delta\exp(-2\pi\Phi_0/4\Phi) \equiv 8\Delta\exp(-2\pi q/4p). \tag{19}$$

Для величины магнитного поля в точке кроссовера получаем

$$H_{\text{cross}} = (2\pi\hbar c/8a^2 e)\ln(\Delta/T - T_c)). \tag{20}$$

При реалистических значениях магнитного поля (до 10^7 Э) интервал температур, в котором флуктуации имеют трехмерный характер, экспоненциально мал

$$T - T_c = \alpha^{-1} 8\Delta\exp(2\pi q/4p). \tag{21}$$

Тем не менее нам представляется важным исследовать поведение сверхпроводников в этой области, так как именно оно определяет возможный род перехода. Кроме того, можно предположить, что учет примесей и прочих дефектов может существенно изменить оценки, сделав их более реалистическими.

Итак, мы можем сделать следующие выводы.

1. Теория Гинзбурга—Ландау, неперенормируемая в магнитном поле, становится перенормируемой с учетом харперовского уширения уровней в решетке.

2. Возникает q-компонентный комплексный параметр порядка, где $\Phi/\Phi_0 = p/q$, p и q — целые. Удается проанализировать критическое поведение при малых значениях q ($q=1, 2, 3, 4$), что соответствует $H > 10^6$ Э. При этом происходит переход второго рода.

3. При больших q в общем случае количественный анализ практически не возможен; однако имеется общая тенденция к потере фиксированной точки, соответствующей переходу второго рода. Исключение составляет особый случай, когда среди многочисленных членов взаимодействия преобладает сферический инвариант вида $\left(\sum_\alpha |\psi_\alpha|^2\right)^2$. В этом случае задача решается асимптотически точно методом ($1/q$)-разложения.

4. На диаграмме состояний в плоскости H—T имеет место линия кроссовера с одномерного на трехмерное поведение флуктуаций.

Авторы благодарны В. В. Брыксину и С. Н. Дороговцеву за обсуждение работы.

Список литературы

[1] Schmid A., Schön G. // J. Low Temp. Phys. 1975. V. 20. N 1/2. P. 207—227.
[2] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1980. 447 с.
[3] Brézin E., Nelson D. R., Thivaille A. // Phys. Rev. 1985. V. 31. N 11. P. 7124—7131.
[4] Wen X. G., Zee A. // Nucl. Phys. B. 1989. V. 316. P. 641—662.
[5] Hofstadter D. // Phys. Rev. 1976. V. B14. N 6. P. 2239—2243.
[6] Wannier G. H. // Phys. St. Sol. 1978. V. B48. P. 757—769.
[7] Азбель М. Я. // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. № 5. С. 929—948.
[8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[9] Shpot N. A. // Phys. Lett. A. 1988. V. 133. N 3. P. 125—127.
[10] Ктиторов С. А., Петров Ю. В., Шалаев Б. Н. // ФТТ. 1987. Т. 29. № 11. С. 3357—3361.
[11] Rauh A. // Phys. St. Sol. 1974. V. B65. N 2. P. K131—K135; 1975. V. B69. N 1. P. K9—K13.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
4 сентября 1990 г.