

УДК 548.541.11/123

© 1991

**К ТЕОРИИ МОДУЛИРОВАННЫХ СТРУКТУР
В КРИСТАЛЛАХ $\text{Me}^{\text{I}}\text{Me}^{\text{II}}\text{BX}_4$**

M. X. Блат, Д. Х. Блат

В рамках предложенной ранее модели структурных фазовых переходов в семействе кристаллов $\text{Me}^{\text{I}}\text{Me}^{\text{II}}\text{BX}_4$ исследуется возможность нахождения температуры T_c и волнового вектора \mathbf{k} , с которыми связана неустойчивость кристаллической структуры к возникновению модулированной фазы. Показано, что учет вклада энергии статических упругих взаимодействий в решетке металлов Me^{I} и Me^{II} и их связь с решеткой упорядочивающихся групп BX_4 могут приводить к неустойчивости системы относительно возникновения модулированной структуры вдоль псевдогексагональной оси при температуре T_c и с волновым вектором \mathbf{k} .

Изучению структурных фазовых переходов (СФП) в большом семействе кристаллов с общей формулой $\text{Me}^{\text{I}}\text{Me}^{\text{II}}\text{BX}_4$ ($\text{Me}^{\text{I}}=\text{NH}_4$, Li , Rb , K , Cs , . . .; $\text{Me}^{\text{II}}=\text{NH}_4$, Li , Rb , K , H , . . .; $\text{BX}_4=\text{SeO}_4$, . . .) посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ [1]. Как показывают многочисленные экспериментальные исследования, изменение физических свойств при СФП в этих кристаллах своеобразно и необычно с точки зрения термодинамической теории ФП. Как правило, кристаллы $\text{Me}^{\text{I}}\text{Me}^{\text{II}}\text{BX}_4$ в паразелектрической фазе принадлежат пространственной группе D_{2h}^{16} ($Z=4$) и по мере понижения температуры испытывают СФП типа порядок— беспорядок, связанные с упорядочением BX_4 -групп.

В работе [1] была предложена и исследована модель СФП в этом семействе кристаллов. В рамках модели получены разнообразные последовательности соразмерных СФП. Однако из экспериментальных данных известно, что в этих кристаллах наблюдаются и СФП в несоразмерные фазы [2]. Для описания в рамках данной модели [1] СФП в несоразмерные фазы необходимо вначале исследовать возможности получения температуры T_c и волнового вектора \mathbf{k} из зоны Бриллюэна группы D_{2h}^{16} ($Z=4$), с которыми связана неустойчивость системы к возникновению модулированной структуры (МС). Исследованию этого вопроса и посвящена настоящая работа.

Большое число работ, как экспериментальных, так и теоретических, посвящено исследованию МС в сплавах типа замещения и внедрения [3, 4]. В этих работах было показано, что учет вклада энергии статических упругих искажений в термодинамический баланс может приводить к неустойчивости системы относительно возникновения периодической концентрационной неоднородности, характеризуемой волновым вектором \mathbf{k} .

В настоящей работе вклад упругих взаимодействий решетки металлов (Me^{I} и Me^{II}) и их связь с разупорядоченными по двум положениям равновесия группами BX_4 учитывались в свободной энергии в паразелектрической фазе D_{2h}^{16} ($Z=4$). Запишем свободную энергию в виде [5]

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}', T, c)(C(\mathbf{r}) - c)(C(\mathbf{r}') - c) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} A_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U_{\mu}(\mathbf{r}) U_{\nu}(\mathbf{r}') + \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} F_{\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U_{\nu}(\mathbf{r})(C(\mathbf{r}') - c), \quad (1)$$

где Φ_0 — свободная энергия однородного состояния системы (фаза D_{2h}^{16} ($Z=4$)); $c=1/2$; $C(\mathbf{r})$ — вероятность группы BX_4 находится в состоянии, например, 1 на узле \mathbf{r} ; $U(\mathbf{r})$ — вектор смещения иона металла из своего положения равновесия; $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}', T, c)$ — потенциал парного взаимодействия между группами BX_4 ; $A_{\mu\nu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — тензор упругости; $F(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — вектор силы, характеризующий влияние неоднородностей в заселенности $C(\mathbf{r})$ — c BX_4 -группы на узле \mathbf{r} на статические искажения $U(\mathbf{r})$ в решетке металлов. (В теории МС в сплавах $F(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ выражается через тензор дилатации). Таким образом, выражение (1) есть разложение свободной энергии в ряд Тейлора по малым отклонениям. Используя свойства периодичности кристаллической решетки, перейдем от суммирования по узлам \mathbf{r} к суммированию по волновым векторам обратной решетки \mathbf{k}

$$V(\mathbf{k}, T, c) = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}, T, c) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad C(\mathbf{k}) = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{r}} (C(\mathbf{r}) - c) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$C(\mathbf{r}) - c = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} C(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \sum_{\mathbf{r}'} A_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathcal{E}_s^{\mu}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} =$$

$$= mW_s^2(\mathbf{k}) \mathcal{E}_s^{\nu}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad U_{\mu}(\mathbf{r}) = N^{-1/2} \sum_{s, \mathbf{k}} (Q(\mathbf{k}) \mathcal{E}_s^{\mu}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \text{к. с.}), \quad (2)$$

$W_s(\mathbf{k})$ — частота нормальных мод колебаний, m — масса иона, $\mathcal{E}_s(\mathbf{k})$ — вектор поляризации.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} V(\mathbf{k}, T, c) C^*(\mathbf{k}) C(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, s} mW_s^2(\mathbf{k}) Q_s^*(\mathbf{k}) Q_s(\mathbf{k}) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{k}, s} F_s(\mathbf{k}) \mathcal{E}_s^{\nu}(\mathbf{k}) Q_s(\mathbf{k}) C^*(\mathbf{k}). \quad (3)$$

Минимизируя $\Delta\Phi$ по переменным $Q_s(\mathbf{k})$: $\delta\Delta\Phi/\delta Q_s(\mathbf{k}) = 0$, получим соотношения, связывающие $Q_s(\mathbf{k})$ и $C(\mathbf{k})$

$$Q_s(\mathbf{k}) = - \frac{(F_s(\mathbf{k}), \mathcal{E}_s(\mathbf{k}))}{mW_s^2(\mathbf{k})} C(\mathbf{k}). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}, T, c) C^*(\mathbf{k}) C(\mathbf{k}), \quad (5)$$

$$A(\mathbf{k}, T, c) = V(\mathbf{k}, T, c) - \sum_s \frac{|F_s(\mathbf{k}), \mathcal{E}_s(\mathbf{k})|^2}{mW_s^2(\mathbf{k})}. \quad (6)$$

Нас будут интересовать те значения \mathbf{k} и T , для которых

$$A(\mathbf{k}, T, c) = 0. \quad (7)$$

Это условие потери устойчивости системы относительно образования модуляционной волны с волновым вектором \mathbf{k} , а температура потери устойчивости — решение (7) относительно T . Температура же фазового перехода $T_0 = \max T(\mathbf{k}) = T(\mathbf{k}_0)$; \mathbf{k}_0 — волновой вектор, для которого решение уравнения (7) $T(\mathbf{k}_0)$ максимально определяет период модуляции. Так как \mathbf{k}_0 определяется из условия экстремальности $T(\mathbf{k})$, то

$$\nabla_{\mathbf{k}} T(\mathbf{k}) = 0. \quad (8)$$

Произведя неявное дифференцирование, получим

$$\nabla_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}, T, c) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, для нахождения \mathbf{k}_0 и T_0 имеем систему уравнений

$$\nabla_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}, T, c) = 0, \quad A(\mathbf{k}, T, c) = 0. \quad (10)$$

Для высокосимметричных точек зоны Бриллюэна уравнение (9) выполняется за счет симметрии структуры [6]. В общем случае величина k_0 определяется термодинамическими параметрами T и c .

Как правило, МС возникает вдоль направлений симметрии параэлектрической фазы [5]. Для этих направлений выражение (6) упрощается

$$A(\mathbf{k}, T, c) = V(\mathbf{k}, T, c) - |F(\mathbf{k})|^2/mW_{s=1}^2(\mathbf{k}). \quad (11)$$

В структуре K_2SeO_4 в фазе D_{2h}^{16} ($Z=4$) таким направлением является псевдогексагональная ось c (рис. 1). Элементарная ячейка включает четыре группы SeO_4 , каждая из которых разупорядочена по двум положениям равновесия вокруг своего центра тяжести на узле \mathbf{r} . Расчет $V(\mathbf{k}, T, c)$ и $F(\mathbf{k})$ был произведен с использованием экспериментальных данных по структуре K_2SeO_4 [2].

Представим K_2SeO_4 как систему, состоящую из двух взаимодействующих подрешеток (SeO_4 -групп и ионов калия). В этом случае второе слагаемое в выражении (1) определяет вклад парного взаимодействия.

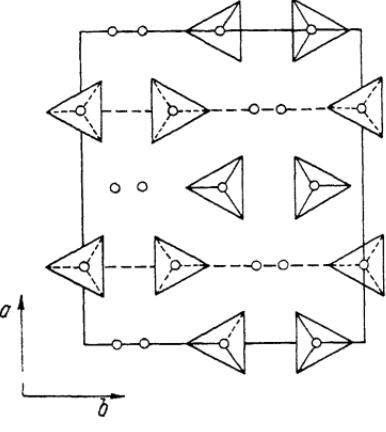


Рис. 1. Проекция структуры кристалла K_2SeO_4 в фазе D_{2h}^{16} ($Z=4$) на плоскость, перпендикулярную псевдогексагональной оси c .

модействия SeO_4 -групп. Представляя $C(\mathbf{r})-c$ в виде волны модуляции вдоль псевдогексагональной оси c с выбранным $\mathbf{k}=\mu\mathbf{b}_3$ из зоны Бриллюэна

$$C(\mathbf{r})-c = C(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + C^*(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (12)$$

и подставляя (12) в выражение (1), получим

$$V(\mathbf{k}, T, c) = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C(\mathbf{r}) \partial C(\mathbf{r}')} \cos(\mathbf{k}\rho), \quad (13)$$

где $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Перейдем от суммирования по узлам \mathbf{r}' к суммированию по подрешеткам. Для этого воспользуемся методом, предложенным в [4]. С учетом структуры кристалла K_2SeO_4 в фазе D_{2h}^{16} ($Z=4$) разобъем решетку из SeO_4 -групп на 16 простых вложенных друг в друга подрешеток. Схематическое изображение проекции новой решетки на плоскость, перпендикулярную псевдогексагональной оси, представлено на рис. 1. Параметры новой ячейки вдоль осей a и c удвоены по сравнению с элементарной ячейкой группы D_{2h}^{16} ($Z=4$).

Таким образом,

$$V(\mathbf{k}, T, c) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_1^2} + \sum_{\gamma=2}^{16} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_1 \partial C_\gamma} \frac{1}{n} \sum_{\rho=1}^n \cos(\mathbf{k}\rho), \quad (14)$$

где n — число узлов в подрешетке γ , ближайших к узлу выбранной нами подрешетки $\gamma=1$; C_γ — средняя заселенность в подрешетке γ (вероятность группам BX_4 -подрешетки γ находиться в положении 1). Свободная энергия с учетом только парного взаимодействия BX_4 -групп в приближении молекуларного поля имеет вид [7]

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{\gamma, \gamma'=1}^{16} C_\gamma C_{\gamma'} \omega_{\gamma\gamma'}(\rho) + k_B T \sum_{\gamma=1}^{16} [C_\gamma \ln C_\gamma + (1 - C_\gamma) \ln (1 - C_\gamma)],$$

$$\omega_{\gamma\gamma'}(\rho=0)=0, \quad \omega_{\gamma\gamma'}(\rho)=2\omega_{\gamma\gamma}^{12}(\rho)-\omega_{\gamma\gamma}^{11}(\rho)-\omega_{\gamma\gamma}^{22}(\rho)=2(\omega_{\gamma\gamma}^{12}-\omega_{\gamma\gamma}^{11}), \quad (15)$$

$\omega_{\gamma\gamma}'(\rho)$ — константа взаимодействия BX_4 -групп, находящихся на расстоянии ρ и принадлежащих подрешеткам $\gamma\gamma'$. Индексы 1, 2 указывают положения равновесия BX_4 -группы на узле.

Для структуры K_2SeO_4 из выражения (14) с учетом (15) получим

$$\begin{aligned} V(k, T, c) = & 2k_B T - \omega_{11}(a) - 2\omega_{12}(a) + [2\omega_{13}(\sqrt{c^2/4 + (4a/3)^2}) + \\ & + 4\omega_{14}(\sqrt{c^2/4 + a^2/9}) + 2\omega_{15}(\sqrt{c^2/4 + a^2/9})] \cos(kc/2) - \\ & - [\omega_{11}(c) + \omega_{11}(\sqrt{a^2 + c^2}) + 2\omega_{12}(\sqrt{a^2 + c^2})] \cos(kc), \end{aligned} \quad (16)$$

где a, c — параметры ячейки фазы D_{2h}^{16} ($Z=4$) вдоль осей a и c .

Для нахождения второго слагаемого в выражении (11) необходимо вычислить $F(k)$ [^{3, 4, 9}]

$$F(k) = i \sum_r F_r(r) \exp(-ikr). \quad (17)$$

Согласно положениям равновесия группы SeO_4 в фазе D_{2h}^{16} ($Z=4$), можно ограничиться только рассмотрением движения трех ионов кислорода, принадлежащих разупорядоченной группе SeO_4 и лежащих в плоскости, перпендикулярной оси c , по сравнению с остальными ионами группы SeO_4 . Поэтому в (17) будем учитывать только взаимодействия этих трех ионов кислорода с ближайшим окружением из пяти ионов калия для каждого иона кислорода. С учетом координат ионов калия и кислорода [⁸] и наличия в фазе D_{2h}^{16} ($Z=4$) центра инверсии получим следующее выражение для $F(k)$:

$$\begin{aligned} F_z(k) = & F_1^z \sin(0.0271kc) + F_2^z \sin(0.1919kc) + F_3^z \sin(0.3081kc) + \\ & + F_4^z \sin(0.3726kc) + F_5^z \sin(0.6319kc), \end{aligned} \quad (18)$$

где F_i^z — константы (параметры модели), характеризующие влияние неоднородности в заселенности группы SeO_4 на ионы калия K_i . Аргументы функции синуса определяют проекцию радиус-вектора между ионами О и K_i на ось c (k и c см. в (16)).

Подставляем (18) и (16) в выражении (11) и из уравнения (7) находим $T=T(k)$

$$\begin{aligned} t(k) = & \frac{2k_B T(k)}{\omega_{11}(a) + 2\omega_{12}(a)} = A \cos(0.5kc) + B \cos(kc) + \frac{1}{W^2(k)} [f_1 \sin(0.0271kc) + \\ & + f_2 \sin(0.1919kc) + f_3 \sin(0.3081kc) + f_4 \sin(0.3726kc) + f_5 \sin(0.6319kc)]^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A = & \left[2\omega_{13}\left(\sqrt{\frac{c^2}{4} + \left(\frac{4}{3}a\right)^2}\right) + 2\omega_{15}\left(\sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{9}}\right) + \right. \\ & \left. + 4\omega_{14}\left(\sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{9}}\right) \right] (\omega_{11}(a) + 2\omega_{12}(a))^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & [\omega_{11}(c) + \omega_{11}(\sqrt{a^2 + c^2}) + 2\omega_{12}(\sqrt{a^2 + c^2})] (\omega_{11}(a) + 2\omega_{12}(a))^{-1}, \\ f_i = & \left(\frac{F_i^z}{m}\right) (\omega_{11}(a) + 2\omega_{12}(a))^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, температура неустойчивости фазы D_{2h}^{16} является функцией k и параметров A, B, f_i . Исследование выражения (19) было проведено численно на ЭВМ для различных наборов параметров A, B, f_i . Для $W(k)$ были взяты экспериментальные значения [²] при $T=250$ К. Результаты приведены на рис. 2, а. Для набора параметров $A=16, B=3, f_1=6, f_2=5.7, f_3=4.5, f_4=4.2, f_5=3$ (рис. 2, а, кривая 3) волновой вектор $q=0.31$ дает максимальное значение T_c , что соответствует экспериментальному значению для K_2SeO_4 при переходе из фазы D_{2h}^{16} ($Z=4$) в несоразмерную фазу. На рис. 2, а для различных наборов параметров A, B, f_i приведены

зависимости $t(k)$, из которых видно, что в структуре типа K_2SeO_4 вдоль псевдогексагональной оси c могут реализовываться МС только с волновыми векторами $q=0$, $0.25 \leq q \leq 0.4$, $q=0.5$. На рис. 2, б приведены результаты исследования выражения (19) с $W(k)=3=\text{const}$. Из этого рисунка видно, что МС вдоль направления c могут реализовываться с любым q ($0 \leq q \leq 1/2$), так как максимальная температура неустойчивой фазы D_{2h}^{16} ($Z=4$) может быть найдена для любого q в зависимости от набора параметров A , B , f_i .

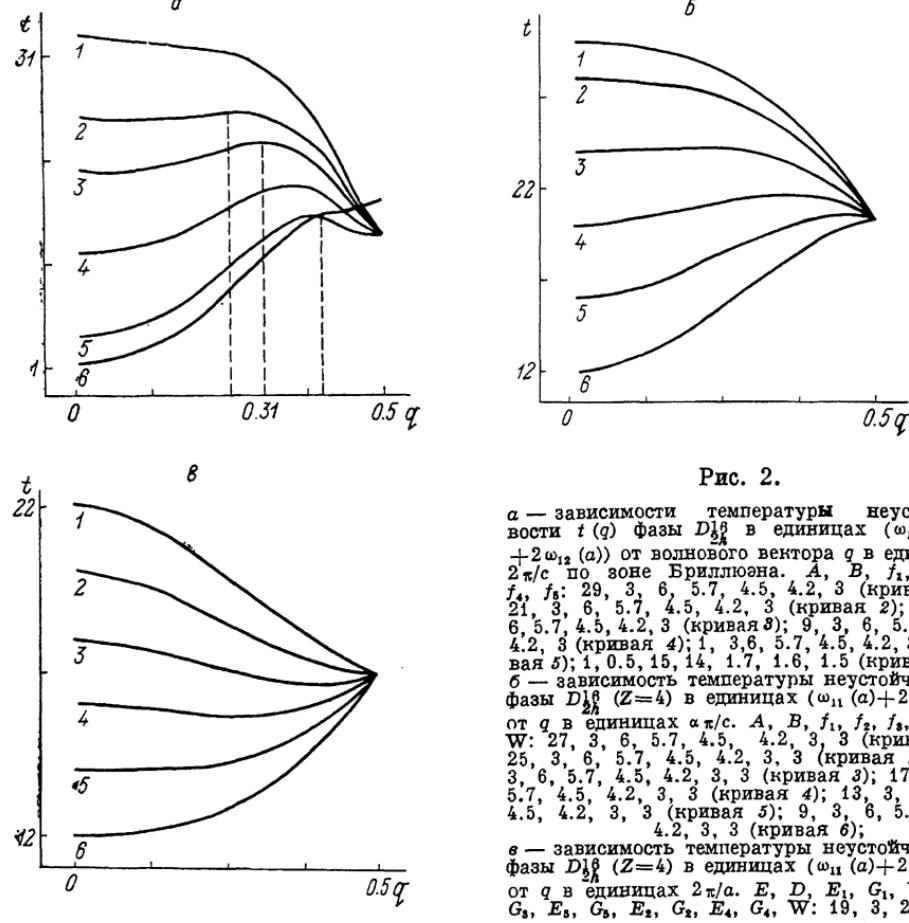


Рис. 2.

α — зависимости температуры неустойчивости $t(g)$ фазы $D_{2h}^{(2)}$ в единицах $(\omega_1(a) + 2\omega_{12}(a))$ от волнового вектора q в единицах $2\pi/c$ по зоне Бриллюзона. $A, B, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$: 29, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3 (кривая 1); 21, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3 (кривая 2); 16, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3 (кривая 3); 9, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3 (кривая 4); 1, 3.6, 5.7, 4.5, 4.2, 3 (кривая 5); 1, 0.5, 15, 14, 1.7, 1.6, 1.5 (кривая 6); β — зависимости температуры неустойчивости фазы $D_{2h}^{(2)}$ ($Z=4$) в единицах $(\omega_1(a) + 2\omega_{12}(a))$ от q в единицах α/c . $A, B, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, W$: 27, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3, 3 (кривая 1); 25, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3, 3 (кривая 2); 21, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3, 3 (кривая 3); 17, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3, 3 (кривая 4); 13, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3, 3 (кривая 5); 9, 3, 6, 5.7, 4.5, 4.2, 3, 3 (кривая 6).

— зависимость температуры неустойчивости фазы D_{16}^{II} ($Z=4$) в единицах $(\omega_{11}(a) + 2\omega_{12}(a))$ от q в единицах $2\pi/a$. E , D , E_1 , G_1 , V_1 , E_2 , G_2 , E_3 , G_3 , E_4 , G_4 , W : 19, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1.9, 1.9, 1.9, 1.9, 1.2, 1.2, 3 (кривая 3); 13, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1.9, 1.9, 1.2, 1.2, 1, 1.9, 1.9, 1.2, 1.2, 3 (кривая 6).

$$t(k) = E \cos(0.5ka) + D \cos(ka) + (1/W^2ck)[V \sin(0.5ka) + H \sin(0.2771ka) + R \sin(0.2229ka)]^2, \\ H = E_1 + E_2 + E_4 + G_2 + G_4, \quad R = G_1 + E_3 + G_3 + E_5 + G_5. \quad (20)$$

Исследование выражения (20) проводилось также численно с помощью ЭВМ. На рис. 2, в с учетом $W(k)=\text{const}=3$ приведены зависимости $t(k)$ по зоне Бриллюэна, построенные для тех же наборов констант взаимодействий. Полученный результат показывает, что в структуре типа K_2SeO_4 в направлениях, перпендикулярных оси с, функции $t(k)$ не имеют максимума внутри зоны Бриллюэна. Максимальное значение температуры неустойчивости фазы D_{2h}^{16} попадает либо на центр, либо на границу зоны

Бриллюэна, что говорит о невозможности возникновения МС в направлениях, перпендикулярных псевдогексагональной оси. Степень доказанности данного утверждения связана с приближением, в рамках которого получено выражение (20). Уточнение результата состоит в учете взаимодействий в следующих координационных сферах.

Таким образом, учет вклада энергии статистических упругих иска-
жений и их связь с упорядочивающимися группами BX_4 в семействе кри-
сталлов $Me^I Me^{II} BX_4$ могут приводить к неустойчивости системы относи-
тельно возникновения МС вдоль псевдогексагональной оси. На феномено-
логическом языке эта неустойчивость возникает вследствие учета членов
типа $d\eta/dx$, u_{ij} , где η — параметр порядка, u_{ij} — деформация [9].

В заключение авторы выражают благодарность В. И. Зиненко за по-
стоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] Зиненко В. И., Блат Д. Х., Александров К. С. // ФТТ. 1980. Т. 22. № 1. С. 184—195.
- [2] Iizumi M., Axe J. D., Shirane G., Shimaoka K. // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. N 9. P. 4392—4411.
- [3] Кривоглаз М. А. Дифракция рентгеновских лучей и нейтронов в неидеальных кристаллах. Киев: Наукова думка, 1983. 408 с.
- [4] Кривоглаз М. А. Диффузионное рассеяние рентгеновских лучей и нейтронов на флуктуационных неоднородностях в неидеальных кристаллах. Киев: Наукова думка, 1984. 228 с.
- [5] Хачатуриян А. Г. // Кристаллография. 1965. Т. 10. № 3. С. 303—310.
- [6] Хачатуриян А. Г. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов. М.: Наука, 1974. 384 с.
- [7] Керзон Хуанг. Статистическая механика. М.: Мир, 1966. 520 с.
- [8] Kalman A., Stephens J. S., Cruickshank D. W. J. // Acta Cryst. 1970. V. B 26. N 7. P. 1451—1454.
- [9] Aslanyan T. A., Levanyuk A. P., Vallade M., Lajzerowiz J. // J. Phys. 1983. V. 16. P. 6705.

Институт физики им. Л. В. Киренского
СО АН СССР
Красноярск

Поступило в Редакцию
12 июня 1990 г.
В окончательной редакции
19 сентября 1990 г.