УДК 621.362


# ЭДС ХОЛЛА В КОМПЕНСИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ПОЛУМЕТАЛЛАХ

*В. А. Козлов, К. А. Сахаров*

В рамках вариационного принципа построена теория эффекта Холла в многодолинных компенсированных материалах. Установлено, что при наличии междолинных процессов релаксации носителей распределение потенциала носит сильно нелинейный характер. При этом характерным масштабом нелинейности вблизи границы служит диффузионная длина, зависящая от величины приложенного магнитного поля. Получены явные выражения для константы Холла при произвольном соотношении между диффузионной длиной и поперечным размером образца.

Процессы междолинного переброса носителей в ограниченных многодолинных материалах приводят к появлению в системе нового параметра $L$-диффузионной длины [1], характеризующей возникающую пространственную неоднородность концентрации при наличии дрейфа носителей. Например, движение электронов и дырок в скрещенных электрическом и магнитном полях или анизотропия спектра носителей вызывает появление на границе (если время рекомбинации на поверхности отлично от нуля) градиентов неравновесных концентраций, спадающих до объемного значения на расстояниях порядка диффузионной длины $L$. В достаточно чистых и совершенных кристаллах $L$ намного превышает дебаевскую длину, более того, возможна ситуация, когда $L > d$, где $d$ — поперечный размер образца, поскольку $L$ экспоненциально возрастает при $T < \Theta_0$. Таким образом, диффузионно-размерные эффекты могут привести к заметному отклонению от линейного хода потенциала на макроскопических расстояниях $L$ от границы, что необходимо учесть при обработке экспериментальных данных по эффекту Холла.

Рассматривается компенсированный вырожденный узкозонный полупроводник или полуметалл с электронной (индекс $e$) и дырочной (индекс $h$) долинами. Образец произвольно вырезан относительно кристаллографических осей и представляет собой пластинку, ограниченную плоскостями $z = \pm d$. Функцию распределения носителей для каждой долины представим, как обычно, в виде

$$f = f_0(\varepsilon - \xi) - \partial f_0 / \partial \varepsilon \, \psi,$$

где $\xi^e$ и $\xi^h$ отсчитываются от края соответствующей зоны. Система кинетических уравнений для электронов и дырок может быть записана следующим образом:

$$v_z \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{e,h} \mp e(\mathbf{Ev}) \mp \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \frac{\partial \varphi^{e,h}}{\partial \mathbf{k}} = \hat{I}^{e,h}, \tag{1}$$

где $\hat{I}^{e,h}$ соответствует интегралу столкновений с учетом переброса между долинами. Формально данный интеграл столкновений можно представить в виде

$$\hat{I}^e = \sum_{\mathbf{k}'} S^{e,e}(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') \left(\varphi^e_{\mathbf{k}} - \varphi^e_{\mathbf{k}'}\right) + \sum_{\mathbf{k}'} S^{e,h}(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') \left(\varphi^e_{\mathbf{k}} + \varphi^h_{\mathbf{k}'}\right). \tag{2}$$

Здесь $S(\mathbf{k} \to \mathbf{k}')$ — соответствующая вероятность внутри- и междолинного рассеяния носителей. Знак «+» во втором слагаемом учитывает тот факт, что в данной записи функции распределения шкала энергии дырок направлена вниз.

Поскольку рассеяние носителей в области низких температур не является упругим, воспользуемся вариационным методом для решения кинетического уравнения (1). Как это показано в [2], неравновесная добавка к функции распределения, соответствующая стандартному диффузионному приближению, может быть записана следующим образом:

$$\varphi(z, k) = \bar{\varphi}(z) + C_i(z) k_i,$$

где $\bar{\varphi} = \langle\varphi\rangle / \langle 1 \rangle$ имеет смысл взятого с обратным знаком сдвига химического потенциала. Угловые скобки означают усреднение по соответствующей долине:

$$\langle x \rangle = \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} x d^3\mathbf{k}.$$

Для случая ориентации магнитного поля по оси $X$ в результате варьирования и нахождения обратной матрицы система уравнений для определения параметров $\bar{\varphi}$ и $C_i$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} D^e_{zz} \frac{d}{dz} C^e_z &= \frac{\bar{\varphi}^e + \bar{\varphi}^h}{T_{eh}}, \\ C^e_i &= \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{m}{\tau}\right)_{yy} e^2 H^2}{c^2 \det G^e}} \left\{ G^{-1}_{ik} - \frac{eH}{c \det G} \begin{bmatrix} 0 \left(\frac{m}{\tau}\right)^e_{yz} & \left(\frac{m}{\tau}\right)^e_{yy} \\ -\left(\frac{m}{\tau}\right)_{yz} - \frac{eH}{c}\left(\frac{m}{\tau}\right)^e_{xy} \\ -\left(\frac{m}{\tau}\right)^1_{yy} - \left(\frac{m}{\tau}\right)^e_{xy} 0 \end{bmatrix}_{ik} \right\} e D^e_{kj} \hat{E}^e_j, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $\hat{E} = \left(E_x, E_y, E_z - \frac{1}{e}\frac{d}{dz}\bar{\varphi}^e\right)$, $D^e_{ij} = \langle v_i k_j \rangle^e$, $m^{-1}$ — главные значения $\varepsilon_{ik}$-тензора обратных эффективных масс, $G$ — матрица, компонентами которой являются величины $\left(\frac{m}{\tau}\right)_{ik}$, а $\det G$ — ее детерминант. Символами $T_{eh}$, $T_{he}$ и $\frac{m}{\tau}$ обозначены интегралы

$$\frac{1}{T_{eh}} = \int\int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} S^{e,h}(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'; \quad T_{eh} = \frac{\langle 1 \rangle^e}{\langle 1 \rangle^h} T_{he}; \quad \left(\frac{m}{\tau}\right)^e_{ik} =$$
$$= \int\int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} S^{e,e}(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') k_i (k_k - k'_k) d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'.$$

В случае внутридолинной релаксации на фононах все компоненты матрицы $(1/\tau)$ могут быть определены численными методами. Соответствующие величины компонент $\tau_{ij}$ для висмута приведены в работе [3]. Для дырочной долины система уравнений аналогична (с учетом знака заряда) и здесь не приводится.

Подставив выражение для $C_z$ в первое уравнение системы (3), получим для дырочной и электронной долин новую систему уравнений для определения $\bar{\varphi}^e$, $\bar{\varphi}^h$:

$$\frac{d^2}{dz^2}\bar{\varphi}^e = \frac{\bar{\varphi}^e + \bar{\varphi}^h}{L^2_e} + e\frac{d}{dz}E_z, \quad \frac{d^2}{dz^2}\bar{\varphi}^h = \frac{\bar{\varphi}^h + \bar{\varphi}^e}{L^2_h} - e\frac{d}{dz}E_z, \quad (4)$$

где $L$ эквивалентна по своему физическому смыслу диффузионной длине электронов и дырок, вводимой в $\tau$-приближении [1]:

$$L^2_e = D^{e\,2}_{zz} (\tau/m)^e_{zz} T_{eh} / (1 + \omega^2\tau^2).$$

Здесь символами $\omega\tau$ обозначено следующее выражение:

$$\omega^2\tau^2 = e^2 H^2 (m/\tau)^e_{yy} / c^2 \det G^e.$$

Данную систему необходимо дополнить уравнением Пуассона для определения поперечного поля:

$$\frac{d}{dz} E_z = -\frac{4\pi}{\varepsilon} (\langle 1 \rangle^e \bar{\varphi}^e - \langle 1 \rangle^h \bar{\varphi}^h). \tag{5}$$

Системы (4), (5) позволяют определить функции $\bar{\varphi}^e$, $\bar{\varphi}^h$ и $E_z$ с учетом граничных условий на поверхности. В наиболее общем случае граничным условием является равенство нулю потока носителей на границе

$$j^{e,\,h}_{z=\pm d} = \langle v_z \varphi^{e,\,h} \rangle = 0. \tag{6}$$

Для решения системы удобно также воспользоваться условием общей квазинейтральности

$$E_z(d) - E_z(-d) = 0, \quad \int\limits_{-d}^{d} (\bar{\varphi}^e - \bar{\varphi}^h)\, dz = 0. \tag{7}$$

В результате для функций $\bar{\varphi}^e$, $\bar{\varphi}^h$ и $E_z$ имеют место выражения

$$\bar{\varphi}^{e,\,h} = 2S_1 \left( \frac{1}{L^2_{e,\,h}} - \frac{1}{l^2_D} \right) \operatorname{sh}(z/L) \pm 2S_2 \operatorname{sh} \varkappa z,$$

$$E_z = -\frac{1}{l^2_D} \left( 2S_1 \left( \frac{1}{L^2_h} - \frac{1}{L^2_e} \right) L \operatorname{ch}(z/L) - \frac{2S_2}{\varkappa} \operatorname{ch} \varkappa z + S_3 \right), \tag{8}$$

где константы $S_1$, $S_2$, $S_3$ находятся из граничных условий (6), (7), $\varkappa^{-1}$ — дебаевский радиус, $\varkappa^2 = 2/l^2_D$, $1/L^2 = 1/L^2_e + 1/L^2_h$ — обратная диффузионная длина системы.

Второе слагаемое в выражениях (8) представляет собой обычное экспоненциальное падение поля и градиентов концентраций на расстояниях порядка дебаевского радиуса от границы образца. Для чистых, совершенных материалов диффузионная длина $L \gg \varkappa^{-1}$, и тем самым наибольший интерес представляет первый член в решении (8).

В случае произвольной ориентации кристаллографических осей относительно плоскостей, ограничивающих поверхность образца, в анизотропном законе дисперсии носителей выражения для констант $S_1$, $S_2$ и $S_3$ имеют слишком громоздкий вид. Поэтому проанализируем полученные решения для изотропного закона дисперсии электронов и дырок. При этом выражение для разности потенциалов $\Delta U$, возникающей на противоположных плоскостях пластины, имеет наиболее простой вид. В данном случае зависимость потенциала от поперечной координаты $z$, описывающая влияние диффузионных эффектов, определяется выражением

$$U(z) = \frac{HE_x}{c} \left( \frac{\left(\frac{\tau}{m}\right)^h L^2_h - \left(\frac{\tau}{m}\right)^e L^2_e}{L^2_h + L^2_e} z - \frac{L^3 \left( \frac{1}{L^2_h} - \frac{1}{L^2_e} \right) \left( \left(\frac{\tau}{m}\right)^h + \left(\frac{\tau}{m}\right)^e \right)}{l^2_D (1/L^2 - \varkappa^2) \operatorname{ch}(d/L)} \operatorname{sh}(z/L) \right) \tag{9}$$

Во избежание недоразумений отметим, что полное выражение для $U(z)$ остается конечным и при $1/L = \varkappa$, так что резонанса не возникает. В формуле (9) обращает на себя внимание наличие нелинейного слагаемого в координатной зависимости потенциала, обусловленного возникновением неравновесных концентраций вблизи поверхности. Как следует из (9), результаты измерений холловского поля могут зависеть от способа расположения контактных зондов. Особенно это существенно для чистых многодолинных материалов в области температур, когда диффузионная длина $L$ имеет макроскопические размеры.

Нелинейная зависимость потенциала от координаты $z$ была экспериментально обнаружена в образцах висмута в магнитном поле [4]. Однако предложенная в указанной работе интерпретация эффекта (нелинейный по скорости дрейфа режим), по-видимому, не реализуется в висмуте.

В свою очередь выражение для разности потенциалов имеет вид

$$\Delta U = \frac{HE_x}{c}\,\frac{d\left(\left(\frac{\tau}{m}\right)^h L_h^2 - \left(\frac{\tau}{m}\right)^e L_e^2\right)}{L_h^2 + L_e^2}\left\{1 - \frac{(L_h^2 - L_e^2)\left(\left(\frac{\tau}{m}\right)^e + \left(\frac{\tau}{m}\right)^h\right)}{\left(\left(\frac{\tau}{m}\right)^h L_h^2 - \left(\frac{\tau}{m}\right)^e L_e^2\right)}\,\frac{\operatorname{th}(d/L)}{d/L}\right\}. \tag{10}$$

Следует отметить, что для $L_e = L_h$ вклад диффузионно-размерных эффектов в холловское поле отсутствует, и $\Delta U$ определяется стандартным выражением для компенсированного материала с различными подвижностями электронов и дырок.

Для сверхчистых материалов возможна ситуация, когда $L > d$, тогда $\operatorname{th}\frac{d}{L}$ можно разложить, и при совпадении подвижностей $\left(\frac{\tau}{m}\right)^e$ и $\left(\frac{\tau}{m}\right)^h$ возможно проявление кубической зависимости $\Delta U$ от поперечного размера образца:

$$\Delta U \sim \frac{HE_x}{c}\,\frac{(L_h^2 - L_e^2)}{(L_h^2 + L_e^2)}\left(\frac{\tau}{m}\right)\frac{d^3}{L^2}. \tag{11}$$

В противоположном пределе $L < d$, но $L \gg \varkappa^{-1}$, что возможно осуществить увеличивая магнитное поле $H$ $\left(\text{так как } L^2 \sim \frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\right)$, либо ухудшая качество образца, разность потенциалов $\Delta U$ будет определяться следующим выражением:

$$\Delta U \approx \frac{HE_x}{c}\left\{\frac{\left(\frac{\tau}{m}\right)^h L_h^2 - \left(\frac{\tau}{m}\right)^e L_e^2}{L_h^2 + L_e^2}\,d - \frac{(L_h^2 - L_e^2)\left(\left(\frac{\tau}{m}\right)^e + \left(\frac{\tau}{m}\right)^h\right)}{L_h^2 + L_e^2}\,L\right\}. \tag{12}$$

В случае $L < \varkappa$ поведение потенциала определяется первым членом в выражении (8), характеризующим обычное дебаевское экранирование. Холловское поле при этом приблизительно однородно, и можно считать, что заряды, создающие его, расположены на поверхности образца.

Зная поперечное распределение потенциала в образце, можно определить значение постоянной Холла $R$. Общее выражение для $R$ слишком громоздко, поэтому приведем его лишь для двух предельных случаев: $\omega\tau < 1$

$$R = R_0\,\frac{\left(\left(\frac{\tau}{m}\right)^h L_h^2 - \left(\frac{\tau}{m}\right)^e L_e^2\right)}{(\mu^e - \mu^h)(L_h^2 + L_e^2)}\left(1 - \frac{(L_h^2 - L_e^2)\left(\left(\frac{\tau}{m}\right)^e + \left(\frac{\tau}{m}\right)^h\right)}{\left(\frac{\tau}{m}\right)^h L_h^2 - \left(\frac{\tau}{m}\right)^e L_e^2}\,\frac{\operatorname{th} d/L}{d/L}\right) \tag{13}$$

и $\omega\tau > 1$

$$R = R_0\,\frac{\left(\frac{\left(\frac{\tau}{m}\right)^h L_h^2 - \left(\frac{\tau}{m}\right)^e L_e^2}{(\mu^e - \mu^h)(L_e^2 + L_h^2)} - \frac{(L_h^2 - L_e^2)\left(\left(\frac{\tau}{m}\right)^e + \left(\frac{\tau}{m}\right)^h\right)}{(\mu^e - \mu^h)(L_e^2 + L_h^2)}\,\frac{\operatorname{th} d/L}{d/L}\right)}{\left(1 - \frac{\left(\frac{\tau}{m}\right)^e + \left(\frac{\tau}{m}\right)^h}{\mu^e + \mu^h}\,\frac{\operatorname{th} d/L}{d/L}\right)}, \tag{14}$$

где $\mu = (\tau/m)/(1+\omega^2\tau^2)$, $R_0 = \frac{1}{nec}\,\frac{\mu^e - \mu^h}{\mu^e + \mu^h}$ — константа Холла массивного образца.

Следует отметить, что при условии $\omega^2\tau^2 \operatorname{th}(d/L)/d/L \gg 1$ из выражения (14) следует известный результат работы [5].

Таким образом, наличие процессов рекомбинации (или переброса в многодолинных материалах) носителей в объеме приводит к нелинейной зависимости потенциала в эффекте Холла на расстояниях порядка диффузионной длины от границы. При этом распределение поля неоднородно, и наличие объемного заряда необходимо учитывать при обработке результатов по эффекту Холла.

Авторы выражают благодарность В. С. Егорову за предоставленные экспериментальные результаты и полезные дискуссии.

### Список литературы


[1] Рашба Э. И. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 1427—1432.
[2] Козлов В. А., Сахаров К. А. // ФТТ. 1989. Т. 31. № 1. С. 235—242.
[3] Козлов В. А., Сахаров К. А. // ФТТ. 1984. Т. 26. № 6. С. 1823—1829.
[4] Егоров В. С. // Материалы XXV конф. по физ. низ. температур. Л., 1988. С. 37—38.
[5] Бабкин Г. И., Кравченко В. Я. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 2. С. 695—711.



Всесоюзный научно-исследовательский проектно-конструкторский и технологический институт источников тока



Поступило в Редакцию
7 марта 1990 г.
В окончательной редакции
8 октября 1990 г.