УДК 538.65.001

КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТОУПРУГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

В. В. Меньшенин

Способ описания упругой среды с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями на основе теории калибровочных полей обобщен на случай магнитоупругой среды.

В настоящее время для описания магнитоупругих явлений используется разложение свободной энергии системы по так называемым инвариантам — комбинациям динамических переменных и их производных, не меняющихся под действием операций симметрии кристалла [1]. Этот метод хорошо работает для идеальных кристаллов [2] и для кристаллов с одиночными дислокациями и дисклинациями [3]. Попытки его использования при учете полей непрерывно распределенных дислокаций и дисклинаций, насколько нам известно, успеха не имели.

В данной работе для решения таких задач предлагается использовать методы теории калибровочных полей. Недавно они были успешно применены для описания упругих сред с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями [4]. Ниже показано, каким образом удается включить магнитную подсистему магнитоупругого кристалла в схему расчета, предложенную в [4].

1. Лагранжиан среды

Рассмотрим магнитоупорядоченную упругую среду с учетом магнитоупругих взаимодействий. Следуя схеме построения теории, предложенной в [4], нужно записать лагранжиан среды, инвариантный относительно неоднородных (т. е. зависящих от координат) пространственных вращений и трансляций. Для этого необходимо ввести ковариантные производные для эйлеровых координат $\mathbf{x}$ и магнитного момента единицы массы $\boldsymbol{\mu}$. Ковариантная производная для $\mathbf{x}$ получена в [4] и имеет вид

$$D_j x^i = \frac{\partial x^i}{\partial a^j} + \gamma^i_{\alpha k} V^\alpha_j x^k + \varphi^i_j; \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$ — лагранжевы координаты; γ_α — генераторы группы вращений $SO(3)$; V^α_j и φ^i_j — компенсирующие поля, возникающие при неоднородных преобразованиях группы $SO(3)$ и трансляций $T(3)$ соответственно. При этом под действием элементов группы G, описывающих все возможные вращения и трансляции среды, ковариантная производная (1) испытывает следующее преобразование [4]:

$$'D_j \mathbf{x}' = A(\mathbf{a})\, D_j \mathbf{x}, \tag{2}$$

где $A(\mathbf{a})$ — матрица трехмерных вращений.

Аналогично в магнитной подсистеме ковариантная производная для $\boldsymbol{\mu}$ запишется в виде

$$\nabla_k \mu^i = \frac{\partial}{\partial a^k} \mu^i + \gamma^i_{\alpha j} W^\alpha_k \mu^j, \tag{3}$$

где W^α — компенсирующие поля, возникающие при неоднородных поворотах μ. Закон преобразования μ при неоднородных преобразованиях группы вращений такой

$$'\nabla_k \mu' = A(\mathrm{a}) \nabla_k \mu. \tag{4}$$

Сделаем относительно равенства (3) одно замечание. Мы считаем, что неоднородные трансляции не изменяют вакторы μ ни по величине, ни по направлению. Поэтому в (3) нет компенсирующего поля, связанного с зависящим от координат перемещением μ. Неизменность μ по величине следует из того, что деформации, вызванные неоднородными трансляциями среды, не меняют массу. Отсутствие же переориентации μ связано с тем, что в этом случае элементы среды, которыми определяется направление μ, не испытывают вращения. Ясно, однако, что это обоснование справедливо лишь в том случае, если энергия рассматриваемых процессов не превосходит энергию внутриатомных взаимодействий, определяющих величину μ.

Потенциальная энергия U магнетика зависит от величин $D_j\mathbf{x}$, $\nabla_k\mu$, μ. Из условия калибровочной инвариантности U вытекает, что $D_j\mathbf{x}$, $\nabla_k\mu$, μ должны входить в выражение для U в виде комбинаций, инвариантных относительно группы G. Такими инвариантами являются следующие:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} (D_i x^k \delta_{kl} D_j x^l - \delta_{ij}), \quad \mu^*_i = \mu^k \delta_{kl} D_i x^l,$$

$$K_{ij} = \nabla_i \mu^k \delta_{kl} \nabla_j \mu^l. \tag{5}$$

Используя (5), можно записать калибровочно инвариантный лагранжиан ферромагнетика, учитывающий магнитоупругую связь, в виде

$$L = T_{\text{у}} - [\rho_0 U (\eta_{ij}, \mu^*_i, K_{ij}) + L_\varphi + L_V + L_W], \tag{6}$$

где ρ_0 — плотность среды по деформации; $T_{\text{у}}$ — кинетическая энергия упругой подсистемы; L_φ, L_v L_w — лагранжианы калибровочных полей φ^i, V^α, W^α соответственно. В (6) $T_{\text{у}}$, L_φ, L_v имеют вид [4]

$$T_{\text{у}} = \frac{1}{2} \rho_0 D^i_4 \delta_{ij} D^j_4, \quad D^i_4 = \frac{\partial}{\partial t} x^i + \gamma^i_{\alpha j} V^\alpha_4 + \varphi^i_4,$$

$$L_\varphi = \frac{s_1}{2} \xi_{ij} D^i_{cb} r^{cd} r^{cl} D^j_{dl}, \quad L_V = \frac{s_2}{2} c_{\alpha\beta} \Phi^\alpha_{bc} g^{bd} g^{cl} \Phi^\beta_{dl},$$

$$c_{\alpha\beta} = c^\delta_{\alpha\gamma} c^\gamma_{\beta\delta},$$

$$D^i_{bc} = \partial_b \varphi^i_c - \partial_c \varphi^i_b + \gamma^i_{\alpha j} (V^\alpha_b \varphi^j_c - V^j_c \varphi^\alpha_b + \Phi^\alpha_{bc} x^j),$$

$$\Phi^\alpha_{bc} = \partial_b V^\alpha_c - \partial_c V^\alpha_b + c^\alpha_{\beta\gamma} V^\beta_b V^\gamma_c,$$

$$\partial_b = \frac{\partial}{\partial a^b} \quad (b = 1,\ 2,\ 3), \quad \partial_b = \frac{\partial}{\partial t} \quad (b = 4), \tag{7}$$

$s_1 > 0$, $s_2 > 0$ — произвольные постоянные, $c^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные постоянные алгебры Ли группы SO (3). Тензоры r^{bc}, g^{bc} приведены в [4], a ξ_{ij} положим равным единичной матрице $\xi_{ij} = \delta_{ij}$. Наконец,

$$L_W = \frac{s_3}{2} c_{\alpha\beta} F^\alpha_{bc} g^{bd} g^{cl} F^\beta_{dl}, \quad F^\alpha_{bc} = \partial_b W^\alpha_c - \partial_c W^\alpha_b + c^\alpha_{\beta\gamma} W^\beta_b W^\gamma_c, \tag{8}$$

причем s_3 — положительная константа.

Заметим теперь, что в случае, если магнитный момент единицы массы μ не сохраняется в (6), необходимо добавить слагаемые

$$\frac{1}{2}\lambda_0\mu_0^2[\mu\times\nabla_4\mu]+\lambda_1\mu_0^2(\nabla_4\mu)^2+(\lambda_2-\lambda_1)(\mu\nabla_4\mu)^2, \tag{9}$$

задающие кинетическую энергию магнитной подсистемы. В этих выражениях $\Delta_4\mu$ означает временну́ю ковариантную производную

$$\nabla_4\mu^i=\frac{\partial\mu^i}{\partial t}+\gamma^i_{\alpha j}W^\alpha_4\mu^j, \tag{10}$$

$\lambda_{0,\,1,\,2}$ — постоянные, характеризующие динамические свойства среды. Постоянные λ_1, λ_2 описывают инерцию магнитных колебаний [5], а для λ_0 имеем равенство $\lambda_0=-1/\gamma\mu_0^2$, где γ — гиромагнитное отношение, μ_0 — спонтанный магнитный момент единицы массы.

2. Уравнения движения

В дальнейшем ограничимся случаем, когда магнитный момент $|\mu|$ сохраняется. Тогда, используя лагранжиан (6), из вариационного принципа стационарного действия получаем уравнения движения для $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$, μ, а также компенсирующих полей V^α, W^α, φ^i. Отметим, что при вариации вследствие того, что $\mu^2=\mathrm{const}$, к вариации действия $\delta\int\limits_{t_0}^{t}dt\int\limits_{v_0}dv_0L$, где v_0 — объем тела до деформации, нужно добавить следующие члены [6]:

$$\int\limits_{t_0}^{t}dt\int\limits_{v_0}dv_0[r\mu\delta\mu+R_m(\mu\delta\nabla_m\mu+\nabla_m\mu\delta\mu)-\gamma^{-1}\rho_0\mu_0^{-2}\nabla_4\mu[\mu\times\delta\mu]], \tag{11}$$

причем в (11) r, R_m — произвольные постоянные.

Для того чтобы записать уравнения более компактно, введем необходимые нам обозначения

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_b x^i)}=Z^b_i,\quad \frac{\partial L}{\partial(\nabla_k\mu^i)}=Z^{(M)k}_i,\quad \Xi_k=\frac{\partial L}{\partial\mu^k}-\frac{1}{\mu_0^2}\frac{\partial L}{\partial\mu^r}\mu^r\delta_{kl}\mu^l,$$
$$R^{bc}_i=\frac{\partial L}{\partial D^i_{bc}},\quad G^{bc}_\alpha=-\frac{\partial L_v}{\partial\Phi^\alpha_{bc}},\quad Q^{bc}_\alpha=-\frac{\partial L_w}{\partial F^\alpha_{bc}}, \tag{12}$$

а также учтем, что при изменениях φ^i, V^α, W^α, равных $\delta\varphi^i=\varepsilon\zeta^i$, $\delta V^\alpha=\varepsilon\xi^\alpha$, $\delta W^\alpha=\varepsilon\nu^\alpha$, индуцируются вариации [4]

$$\delta D^i=\varepsilon(d\zeta^i+\Gamma^i_j\wedge\zeta^j),\quad \delta\Phi^\alpha=\varepsilon(d\xi^\alpha+c^\alpha_{\beta\gamma}V^\beta\wedge\xi^\gamma),$$
$$\delta F^\alpha=\varepsilon(d\nu^\alpha+c^\alpha_{\beta\gamma}W^\beta\wedge\nu^\gamma). \tag{13}$$

В (13) знак $\wedge$ означает внешнее произведение, $\Gamma^i_j=V^\alpha_b\gamma^i_{\alpha j}da^b$. Используя теперь обозначения (12) и равенства (13), уравнения для динамических переменных и компенсирующих полей можно представить так

$$\partial_b Z^b_i-Z^b_j V^\alpha_b\gamma^j_{\alpha i}-\gamma^j_{\alpha i}\Phi^\alpha_{bc}R^{bc}_j=0,$$
$$\partial_b R^{bc}_j-\gamma^i_{\alpha j}V^\alpha_b R^{bc}_i={}^1\!/_2\,Z^c_j,$$
$$\partial_b G^{bc}_\alpha-c^\beta_{\gamma\alpha}V^\gamma_b G^{bc}_\beta={}^1\!/_2\,J^c_\alpha,$$
$$\varepsilon^{kpi}\delta_{pr}\mu^r\left[Z^{(M)s}_j\gamma^j_{\alpha k}W^\alpha_s-\partial_l Z^{(M)l}_k+\Xi_k\right]+\gamma^{-1}\rho_0^{-1}\nabla_4\mu^i=0,$$
$$\partial_b Q^{bc}_\alpha-c^\beta_{\gamma\alpha}W^\gamma_b Q^{bc}_\beta={}^1\!/_2\,J^{(M)c}_\alpha,$$
$$J^b_\alpha=2\gamma^i_{\alpha j}R^{bc}_i D^j_b,\quad (D^j_b=D_b x^j),\quad J^{(M)b}_\alpha=\frac{\partial L}{\partial W^\alpha_b}. \tag{14}$$

В (14) индексы bc изменяются от 1 до 4, все остальные — латинские и греческие — от 1 до 3, ε^{jik} — антисимметричный тензор.

3. Условия интегрируемости

Уравнения (14) не могут решаться для произвольных величин z_i^b, R_i^{bc}, G_α^{bc}, Q_α^{bc}, J_α^b, $J_\alpha^{(M)\,b}$. Они должны удовлетворять определенным соотношениям, называемым условиями интегрируемости. Для получения этих условий удобно (14) записать в компактном виде через дифференциальные формы. Введем для этого 3-формы $Z_i = Z_i^b \pi_b$, $J_\alpha = J_\alpha^b \pi_b$, $J_\alpha^{(M)} = J_\alpha^{(M)\,b}\pi_b$, а также 2-формы $R_j = {}^1\!/_2 R_j^{bc}\pi_{bc}$, $G_\alpha = {}^1\!/_2 G_\alpha^{bc}\pi_{bc}$, $Q_\alpha = {}^1\!/_2 Q_\alpha^{bc}\pi_{bc}$, где $\pi_b = (1/3\,!)\,\varepsilon_{bcdf}\,da^c \wedge \wedge\, da^d \wedge da^f$, ε_{bcdf} — антисимметричный тензор $\pi_{bc} = \partial_b \rfloor \pi_c$, символ $\rfloor$ означает [14] операцию внутреннего произведения. В этом случае аналогично [4] можно показать, что второе, третье и пятое уравнения в (14) имеют вид

$$D\mathbf{R} = {}^1\!/_2\,\mathbf{Z}, \quad D\mathbf{G} = {}^1\!/_2\,\mathbf{J}, \quad D\mathbf{Q} = {}^1\!/_2\,\mathbf{J}^{(M)}. \tag{15}$$

В (15) D есть ковариантный оператор внешнего дифференцирования. Его явный вид для форм $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{Q}$ есть [4]

$$D\rho = d\rho - \rho \wedge \Gamma. \tag{16}$$

Выражение для 1-форма Γ приведено выше. Дифференцируя внешним образом еще раз уравнения (16), получим условия интегрируемости

$$DD\mathbf{R} = {}^1\!/_2\,D\mathbf{Z}, \quad DD\mathbf{G} = {}^1\!/_2\,D\mathbf{J}, \quad DD\mathbf{Q} = {}^1\!/_2\,D\mathbf{J}^{(M)}. \tag{17}$$

Обратим внимание на то, что первое и четвертое уравнения в (14) не дают дополнительных соотношений, поскольку они должны выражаться через 4-формы, а внешняя производная от 4-форм в четырехмерном пространстве обращается в нуль.

Первое равенство в (17) сводится к первому уравнению в (14), а из двух последних в (17) соотношений имеем

$$D\mathbf{J} = 2(\Theta \wedge \mathbf{G} - \mathbf{G} \wedge \Theta), \quad D\mathbf{J}^{(M)} = 2(\Theta \wedge \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \wedge \Theta). \tag{18}$$

где $\Theta = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ — 2-форма кривизны. Уравнения (18) представляют собой в окончательной форме условия интегрируемости, которым должны удовлетворять величины $\mathbf{G}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}^{(M)}$.

4. Магнитоупругие волны при наличии полей дислокаций

Попытаемся применить теперь наши уравнения (14) к изучению распространения магнитоупругих волн в среде с учетом дислокационных полей. Будем считать для простоты, что дисклинации в системе отсутствуют, т. е. $V^\alpha = W^\alpha = 0$. В этом случае условия (18) оказываются несущественными. Рассмотрим конкретный пример распространения волн вдоль легкой оси одноосного ферромагнетика.

При решении задачи пренебрежем статическими деформациями, а также статическими полями дислокаций. Предположим, кроме того, что в равновесном состоянии μ_0 ориентирован вдоль легкой оси, в дальнейшем принимаемой за ось 3.

Запишем прежде всего явно потенциальную энергию единицы объема ферромагнетика:

$$\rho_0 U = \frac{1}{2}\alpha_{ij}\frac{\partial\mu^s}{\partial a^i}\frac{\partial\mu^s}{\partial a^j} + B_{ij}\mu_i^*\mu_j^* + B_{ijkl}\mu_i^*\mu_j^*\mu_k^*\mu_l^* + P_{ijkl}\eta_{ij}\mu_k^*\mu_l^* + \frac{1}{2}c_{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl}. \tag{19}$$

В (19) первое слагаемое представляет собой обменное взаимодействие, два следующих члена есть энергия анизотропии, затем энергия магнитоупругого взаимодействия, наконец, последний член описывает упругую энергию. Отметим, что в (19) все слагаемые, кроме первого, содержат вклад от полей дислокаций.

Константы анизотропии B_{ij}, B_{ijkl}, магнитоупругости P_{ijkl}, а также упругих модулей c_{ijkl} в матричном виде приведены в [7].

Подставим теперь равенство (19) в уравнения (14). Учтем, кроме того, что можно достигнуть упрощения полевых уравнений, используя определенную калибровку [4]. В нашем случае такой калибровкой является

$$\partial_3\varphi_3^i=(1/y)\,\partial_4\varphi_4^i,\quad y>0.$$

Тогда уравнения, описывающие распространение магнитоупругих волн при наличии полей дислокаций, запишутся так

$$i\lambda\mu^+ + \alpha\frac{\partial^2\mu^+}{\partial a_3^2}-A_1\mu^+ - A_2\frac{\partial u^+}{\partial a_3}-A_2\varphi_3^+ - A_3\varphi_+^3=0,$$

$$-\rho_0\frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2}+\frac{1}{4}c_{44}\frac{\partial^2 u^+}{\partial^2 a_3^2}+A_2\frac{\partial\mu^+}{\partial a_3}+P_2\frac{\partial\varphi_3^+}{\partial a_3}+2P_1\frac{\partial\varphi_+^3}{\partial a_3}=0,$$

$$\frac{s_1}{y}\left[\frac{\partial^2\varphi_3^+}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2\varphi_3^+}{\partial a_3^2}\right]+P_1\varphi_3^+ + P_1\frac{\partial u^+}{\partial a_3}+\frac{A_2}{2}\mu^+ + P_1\varphi_+^3=0,$$

$$\frac{s_1}{y}\left[\frac{\partial^2\varphi_+^3}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2\varphi_+^3}{\partial a_3^2}\right]+P_1\varphi_+^3+P_1\varphi_3^+ + A_4\mu^+ + P_1\frac{\partial u^+}{\partial a_3}=0. \tag{20}$$

В уравнениях (20) $\lambda=\rho_0/\gamma\mu_0$, α — обменная константа,

$$A_1=2B_1-2B_2+12B_{1133}\mu_0^2-8B_{3333}\mu_0^2,\quad P_1={}^1/_8\,c_{44},$$

$$A_2=2B_2\mu_0^2+4B_{3333}\mu_0^3+P_{2323}\mu_0^2,\quad P_2={}^1/_4\,c_{44}-y\rho_0,$$

$$A_3=P_{2323}\mu_0^2,\quad A_4=2B_1\mu_0+2B_2\mu_0+8B_{1133}\mu_0^3+P_{2323}\mu_0,$$

$$\mu^+=\mu^1+i\mu^2,\quad \varphi_3^+=\varphi_3^1+i\varphi_3^2,\quad \varphi_+^3=\varphi_1^3+i\varphi_2^3,\quad u^+=u^1+iu^2. \tag{21}$$

Будем искать решения системы (20) в виде

$$\mu^+=\mu_0^+e^{i(\omega t-ka_3)},\quad \varphi_3^+=\varphi_{30}^+e^{i(\omega t-ka_3)},\quad \varphi_+^3=\varphi_{+0}^3e^{i(\omega t-ka_3)},\quad u^+=u_0^+e^{i(\omega t-ka_3)}. \tag{22}$$

Подставляя теперь (22) в (20), получим дисперсионные соотношения для волн, распространяющихся в среде

$$\frac{s_1}{y}(\lambda\omega-\alpha k^2-A_1)\rho_0\left[(\omega^2-c^2k^2)\frac{s_1}{y}(-\omega^2+yk^2)+2P_1(\omega^2-yk^2)\right]-$$

$$-\left[\frac{s_1}{y}\right]^2(\omega^2-yk^2)A_2^2k^2+\rho_0(\omega^2-c^2k^2)\frac{s_1}{y}\left(\frac{A_2}{2}+A_3A_4\right)+$$

$$+k^2\frac{s_1}{y}A_2\left[A_3P_1+2P_1A_4-y\rho_0\frac{A_2}{2}\right]+\rho_0P_1\left[\frac{A_2}{2}-A_4\right][A_3-A_2]=0,$$

$$c^2=c_{44}/4\rho_0. \tag{23}$$

Это уравнение является кубическим относительно k^2. Для кубического уравнения известны точные аналитические решения. Одним из следствий анализа этих решений является утверждение о том, что при определенных условиях существуют три действительных по k^2 корня. Это означает возможность распространения в среде трех связанных мод магнитоупругих волн при $\psi\neq 0$. Точные решения (23) ввиду их громоздкости здесь приводить не будем.

Положим в уравнении (23) $A_2=A_3=A_4=0$, т. е. будем считать, что магнитоупругая связь отсутствует. В этом случае равенство (23) переходит в следующее:

$$\frac{s_1}{y}(\lambda\omega-\alpha k^2-A_1)\rho_0\left[(\omega^2-c^2k^2)\frac{s_1}{y}(\omega^2-yk^2)-2P_1\left(\omega^2-\frac{y}{2}k^2\right)\right]=0. \tag{24}$$

Из уравнения (24) найдем, что в среде имеется мода с законом дисперсии

$$\omega^2=\frac{1}{2}\left[k^2(c^2+y)+\frac{y}{s_1}c^2\rho_0\right]+\left\{\frac{1}{4}\left(k^2(y-c^2)+\frac{y}{s_1}c^2\rho_0\right)^2+\frac{1}{2}\frac{y}{s_1}\frac{c^2}{\rho_0}k^2\right\}^{1/2},$$

описывающая распространение дислокаций [4]. Отсюда можно сделать вывод о том, что появление в системе дополнительной по сравнению с идеальным кристаллом моды, полученной в (23), обусловлено возникновением связанных колебаний поля дислокаций и магнитного момента.

Выше было показано, что наличие в среде дислокаций и дисклинаций приводит к необходимости рассматривать не только упругие, но и магнитные степени свободы среды на основе калибровочной теории. Дело в том, что компенсирующие поля, описывающие дислокации и дисклинации, обеспечивают инвариантность лагранжиана упругой подсистемы среды относительно локальных вращений и трансляций решетки. Однако в магнетиках смещения атомов сопровождаются изменением ориентации магнитного момента [1]. Это означает, что лагранжиан среды не должен изменяться при совместных локальных вращениях и трансляциях решетки и спинов.

Построенная теория в случае отсутствия в среде дислокаций и дисклинаций переходит в обычную теорию МУ взаимодействия.

В работе вариационным методом получены уравнения движения для $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\mu}$, V^α, W^α, φ^i в предположении, что модуль $\boldsymbol{\mu}$ сохраняется. Найдены дисперсионные уравнения магнитоупругих волн при наличии в среде полей дислокаций. Показано, что в этом случае возможно появление дополнительных по сравнению с идеальным кристаллом мод связанных колебаний магнитной и упругой подсистем. Они возникают из-за взаимодействия $\boldsymbol{\mu}$ с дислокационными полями. По-видимому, представляет интерес более детально исследовать природу этих мод.

Эффекты МУ связи между спиновыми и упругими волнами ярко проявляются вблизи ориентационных фазовых переходов в магнетиках. Поэтому одним из возможных приложений полученных уравнений является изучение распространения МУ волн при наличии дефектов решетки вблизи ориентационных фазовых переходов.

Выражаю благодарность Е. А. Турову, М. И. Куркину, В. В. Николаеву за обсуждение работы и полезные замечания.

Список литературы

[1] Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. М., 1967. 368 с.
[2] Барьяхтар В. Г., Туров Е. А. // Электронная структура и электронные свойства металлов и сплавов / Под ред. В. Г. Барьяхтара. Киев, 1988. С. 39.
[3] Диченко А. Б., Николаев В. В. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. № 4. С. 1230—1233.
[4] Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М., 1967. 168 с.
[5] Дзялошинский И. Е., Кухаренко Б. Г. // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. № 1. С. 2360—2373.
[6] Tiersten H. F. // J. Math. Phys. 1965. V. 6. № 5. P. 779—787.
[7] Физика магнитных диэлектриков / Под ред. Г. А. Смоленского. Л., 1974. 454 с.

Институт физики металлов
УрО АН СССР
Свердловск

Поступило в Редакцию
7 августа 1990 г.
В окончательной редакции
5 декабря 1990 г.