

УДК 537.311.33

© 1991

## ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ

В. Г. Григорян, Л. Вендлер

Рассматривается слоистая система, состоящая из двух упругих изотропных симметричных полупространств с упругим изотропным слоем между ними. В явном виде получены дисперсионные уравнения для нахождения спектра акустических граничных волн, поляризованных в сагиттальной плоскости. Проведен аналитический анализ этих уравнений в разных частных случаях. Дана классификация граничных мод. В аналитическом виде выявлены области соотношений между упругими параметрами сред слоистой структуры, где могут существовать различные типы граничных волн. Результаты проиллюстрированы графически. Представляется также численный анализ зависимостей групповых скоростей волн от соотношений между упругими параметрами граничащих сред.

Наличие поверхностей и границ раздела в различных микроструктурах приводит к модификации собственных колебательных мод, что в свою очередь может оказать существенное влияние на термодинамические и электрические характеристики этих структур. Целью настоящей работы является детальный анализ акустических граничных волн, поляризованных в сагиттальной плоскости (плоскости, проходящей через волновой вектор и нормаль к границе раздела) и распространяющихся в слоистой системе, состоящей из двух симметричных упругих изотропных полупространств, с упругим изотропным слоем между ними (структура 2—1—2). Слой ( $\nu=1$ ) и полупространства ( $\nu=2$ ) занимают соответственно области  $-a/2 \leq x_3 \leq a/2$ ,  $x_3 > a/2$ ,  $x_3 < -a/2$  и характеризуются следующими упругими параметрами: плотностью  $\rho$ , и скоростями звука  $c_{t\nu}$  и  $c_{l\nu}$  соответственно для поперечных и продольных объемных акустических волн. Такая структура типа сэндвича важна и в физике полупроводниковых микроструктур известна как двойная гетероструктура. Полученные результаты могут найти также практическое применение в акустоэлектронике в устройствах для обработки сигналов из-за волноводного распространения звука в исследуемой системе.

Спектр длинноволновых оптических фононов и их взаимодействие с электронами в таких структурах были детально исследованы в работах [1, 2]. В работах [3-6] методами теории упругости сэндвич 2—1—2 исследовался для некоторых частных случаев. В работах [7, 8] выявлено существенное влияние границы раздела на релаксацию электронов при рассеянии на акустических фононах.

Граничные волны, которые исследуются в настоящей работе, распространяются вдоль границ раздела, а их поля смещений экспоненциально затухают в глубь обоих полупространств (локализация вблизи слоя). Последнее выполняется, если  $k_{\parallel} > \omega/c_{i2}$ , где  $k_{\parallel}$  — двумерный волновой вектор плоскости  $x_1-x_2$ , а  $\omega$  — частота волны. При этом, как показано в [6], возникают две физически существенно различные ситуации: 1) когда выполняется соотношение  $c_{i2} > c_{i1}$  и 2) когда  $c_{i1} > c_{i2}$ . В [6] дается детальный численный анализ дисперсионных уравнений, как для локализованных волн, поляризованных в вертикальной (сагиттальной) плоскости,

так и для волн, поляризованных горизонтально. Показано, в частности, в случае  $c_{i2} > c_{i1}$  всегда существует бесконечное число дисперсионных кривых в области  $\omega/c_{i2} < k_{\parallel} < \omega/c_{i1}$ , но только при определенных соотношениях между упругими параметрами граничащих сред две энергетически самые нижние дисперсионные кривые переходят при конечных значениях волнового вектора  $k_{\parallel}$  в область  $k_{\parallel} > \omega/c_{i1}$ . Законы дисперсии этих кривых при больших толщинах ( $k_{\parallel} a \gg 1$ ) стремятся к линейному:  $\omega = c_s k_{\parallel}$ , где  $c_s$  — скорость волны Стоунли, распространяющейся в слоистой структуре 1—2 с одной границей раздела.

В случае  $c_{i1} > c_{i2}$  волны существуют только в области  $k_{\parallel} < \omega/c_{i2}$ . Было найдено, что если существует волна Стоунли в структуре 1—2, то тогда в структуре 2—1—2 с двумя границами раздела возникают две моды с вертикальной поляризацией — антисимметричная и симметричная.

В [5] численными расчетами было найдено, что в системе Al—Ni—Al существует только одна антисимметричная мода (заметим, что в системе Ni—Al волна Стоунли не существует). Появление такой моды в [5] никак не объясняется.

В настоящей работе, исходя из дисперсионного уравнения в явном виде, предлагается детальный аналитический анализ проблемы существования различных типов локализованных акустических волн в сэндвиче 2—1—2 в зависимости от упругих параметров граничащих сред. Исследуются свойства этих волн и дана их классификация. Обсуждается также возможность распространения различных типов граничных волн в конкретных слоистых структурах.

## 1. Дисперсионные соотношения

Так как исследуемая система симметрична относительно плоскости  $x_3=0$ , то существующие в ней волны могут быть только симметричными или антисимметричными.

Дисперсионные уравнения в явном виде можно получить из [5, 6], где они получены в виде равенства нулю детерминантов  $4 \times 4$ . Для симметричных волн с вертикальной поляризацией (СВВП) в области  $k_{\parallel} > \omega/c_{i1}$  оно принимает вид

$$\begin{aligned} & \text{th}(\alpha_{i1}x) \{ [\xi(\alpha_{i2}^2 + 1) - (\alpha_{i2}^2 + 1)]^2 - \alpha_{i2}\alpha_{i2} [\xi(\alpha_{i1}^2 + 1) - 2]^2 \} + \\ & + \alpha_{i1}\alpha_{i1} \text{th}(\alpha_{i1}x) \{ 4\alpha_{i2}\alpha_{i2} (\xi - 1)^2 - [2\xi - (\alpha_{i2}^2 + 1)]^2 \} - \\ & - \frac{\xi}{\eta^2} \left(\frac{y}{x}\right)^4 [\alpha_{i1}\alpha_{i2} + \alpha_{i2}\alpha_{i1} \text{th}(\alpha_{i1}x) \text{th}(\alpha_{i1}x)] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены следующие безразмерные параметры:  $\eta = c_{i1}/c_{i2}$ ,  $\xi = \rho_1 c_{i1}^2 / \rho_2 c_{i2}^2$ ,  $x = k_{\parallel} a / 2$ ,  $y = \omega a / 2c_{i2}$ ,  $\alpha_{i1, i2} = (k_{\parallel}^2 - \omega^2 / c_{i1, i2}^2)^{1/2} / k_{\parallel}$ . Введем также безразмерный параметр  $b_v = (c_{i1} / c_{i2})^2$ .

Соответствующее дисперсионное соотношение для антисимметричных волн с вертикальной поляризацией (АВВП) в той же области получается заменой в (1)  $\text{th}$  на  $\text{cth}$ . В области  $\omega/c_{i2} < k_{\parallel} < \omega/c_{i1}$  ( $c_{i2} > c_{i1}$ ) дисперсионное уравнение получается из (1) заменой  $\alpha_{i1}$  на  $i\beta_{i1}$ , а  $\text{th}(\alpha_{i1}x)$  на  $i \text{tg}(\beta_{i1}x)$ . Если же  $c_{i2} > c_{i1}$ , то тогда локализованные моды существуют также в области  $\omega/c_{i1} < k_{\parallel} < \omega/c_{i2}$ . Для получения уравнения в этой области необходимо в (1) заменить  $\alpha_{i1}$  на  $i\beta_{i1}$ ,  $\alpha_{i2}$  на  $i\beta_{i2}$ , а гиперболические функции на тригонометрические.

При  $\rho_1=0$  дисперсионные уравнения превращаются в уравнения для волн Рэлея, а при  $\rho_2=0$  в уравнения для волн Лэмба в пластине [9—13].

## 2. Анализ дисперсионных уравнений

В общем случае полученные дисперсионные уравнения аналитически не решаются. Однако представляется возможным сделать аналитический анализ для ряда частных случаев.

При  $a \rightarrow \infty$  ( $k_{\parallel} a \gg 1$ ) уравнение (1) точно так же, как и уравнение для АВВП, превращается в дисперсионное уравнение для волн Стоунли [9, 12], и, следовательно, оно имеет решение в том случае, если в слоистой структуре 1—2 с одной границей раздела возможно распространение волны Стоунли.

Нетрудно убедиться из (1), что симметричные волны не имеют решений при малых толщинах ( $k_{\parallel} a \ll 1$ ), в то время как для антисимметричной моды существует решение  $\omega \rightarrow 0$  при  $k_{\parallel} a \rightarrow 0$ . Закон дисперсии для этой самой нижней ветви можно получить, подставляя в дисперсионное уравнение для АВВП разложение  $\omega^2$  по степеням  $a$ :  $\omega^2 = c^2 k_{\parallel}^2 [1 - A_1(k_{\parallel} a) - A_2(k_{\parallel} a)^2 + O(a^2)]$ . При этом получается

$$c = c_{i2}, \quad A_1 = 0, \quad \sqrt{A_2} = \frac{\rho_1}{2\rho_2} + \frac{\rho_2 c_{i2}^2}{2\rho_1 c_{i1}^2} - 1. \quad (2)$$

Этот результат при  $\rho_1 = \rho_2$  впервые был получен в [3] для локализованной моды вблизи плоского дефекта, а в общем случае — в [5]; однако в [5] в выражении, аналогичном (2), вместо  $\sqrt{A_2}$  присутствует  $A_2$ .

В случае  $c_{i2} > c_{i1}$  выражение для  $\sqrt{A_2}$  в (2) положительно при любых параметрах слоистой системы и соответствующая мода существует всегда. В случае  $c_{i1} > c_{i2}$  оно уже не при всех параметрах структуры является положительным. Записанное в безразмерных параметрах условие  $\sqrt{A_2} > 0$  принимает вид  $\xi^2 - 2\xi\eta^2 + \eta^2 > 0$ , и, следовательно, энергетически самая нижняя локализованная мода существует при

$$\xi > \xi_1^A \quad \text{или} \quad \xi < \xi_2^A; \quad \xi_{1,2}^A = \eta^2 (1 \pm \sqrt{1 - 1/\eta^2}). \quad (3)$$

При  $\eta \rightarrow \infty$   $\xi_2^A \rightarrow 0.5$ .

Так как прямая  $\omega = c_{i2} k_{\parallel}$  является границей области, где существуют локализованные волны, то, очевидно, все они берут свое начало или исчезают на этой прямой. Подставляя в дисперсионные уравнения разложение в виде  $\omega = c_{i2} k_{\parallel}^{(n)} + \gamma_n (k_{\parallel} - k_{\parallel}^{(n)}) + O(k_{\parallel} - k_{\parallel}^{(n)})$ , легко определить значение групповой скорости  $\gamma_n = c_{i2}$  вблизи точек  $k_{\parallel}^{(n)}$  — рождения или исчезновения локализованных мод.

Дальнейший анализ удобно проводить отдельно для случаев  $c_{i2} > c_{i1}$  и  $c_{i1} > c_{i2}$ .

1)  $c_{i2} > c_{i1}$ . Рассмотрим вначале локализованные волны в области  $\omega/c_{i2} < k_{\parallel} < \omega/c_{i1}$ . Критические значения волновых векторов, при которых появляются граничные волны, определяются из решения дисперсионных уравнений на прямой  $\alpha_{i2} = 0$ . Это уравнение для СВВП имеет вид ( $x_n = k_{\parallel}^{(n)} a/2$ )

$$\text{tg}(\beta_{i1} x_n) = \frac{\beta_{i1} \left[ \frac{\xi}{\eta^2} \alpha_{i2} + \alpha_{i1} (2\xi - 1)^2 \text{th}(\alpha_{i1} x_n) \right]}{[\xi(1 - \beta_{i1}^2) - 1]^2}. \quad (4)$$

Уравнение для АВВП получается из (4) заменой тангенсов на соответствующие котангенсы. Как показывает простой графический анализ, уравнения имеют бесконечное число решений при любых параметрах слоистой системы. В случае больших толщин слоя ( $x_n \gg 1$ ) гиперболический тангенс (контангенс) можно заменить единицей и решения для критических точек получаются в аналитическом виде.

При больших толщинах слоя ( $k_{\parallel} a \gg 1$ ) в вышеуказанной области значений волновых векторов существует класс решений дисперсионных уравнений, связанный с тем, что при  $a \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_{i1} \rightarrow 0$ , но так, что  $\alpha_{i1} a = \text{const}$ . Эти решения соответственно для симметричных и антисимметричных волн имеют вид

$$\omega_n^S = c_{i1} \left( k_{\parallel}^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} \right)^{1/2}, \quad \omega_n^A = c_{i1} \left( k_{\parallel}^2 + \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{a^2} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где  $n$  — целое число. Итак, в пределе больших толщин слоя в области  $\omega/c_{i2} < k_{\parallel} < \omega/c_{i1}$  моды ведут себя подобно волнам Лэмба в толстой сво-

бодной пластине [9-12], асимптотически стремясь к предельной частоте  $\omega = c_{i1}k_{\parallel}$  сверху. Этот класс граничных волн можно классифицировать как обобщенные волны Лэмба (по аналогии с классификацией волн в системе полупространство—слой [9, 14]).

Нетрудно убедиться, что в случае  $c_{i2} > c_{i1}$  прямая  $\alpha_{i1} = 0$  не является асимптотикой решений. Решения при  $x \gg 1$  по-прежнему определяются формулами (5) с асимптотикой  $\alpha_{i1} = 0$ .

Теперь перейдем к исследованию решений в области  $k_{\parallel} > \omega/c_{i1}$ . Если моды появляются в этой области, то они должны иметь точки пересечения с прямой  $\omega = c_{i1}k_{\parallel}$ . Дисперсионное уравнение (1) на этой линии принимает вид  $f^S(x) = 0$ , где

$$f^S(x) = x \{ [\xi - (\alpha_{i2}^2 + 1)]^2 - \alpha_{i2}\alpha_{i2}(\xi - 2)^2 \} + \alpha_{i1} \operatorname{th}(\alpha_{i1}x) \{ 4\alpha_{i2}\alpha_{i2}(\xi - 1)^2 - [2\xi - (\alpha_{i2}^2 + 1)]^2 - \xi\eta^2[\alpha_{i2} + \alpha_{i2}\alpha_{i1}x \operatorname{th}(\alpha_{i1}x)] \}. \quad (6)$$

Аналитически можно показать, что  $f^S(x)$  в области своих положительных значений является монотонно возрастающей и, следовательно, уравнение  $f^S(x) = 0$  имеет либо одно решение, либо ни одного. При  $x \rightarrow 0$

$$f^S(x)|_{x \rightarrow 0} \equiv f_0^S = -\alpha_{i2}\xi\eta^2 < 0$$

и, следовательно,  $f^S(x)$  имеет корень, если при  $x \rightarrow \infty$  значение этой функции положительно. Последнее эквивалентно условию положительности следующего, квадратного относительно  $\xi$ , трехчлена

$$f^S(x)|_{x \rightarrow \infty} \equiv f_{\infty}^S = A\xi^2 + B\xi + C, \quad (7)$$

где  $A = 1 - \alpha_{i2}\alpha_{i2}$ ;  $B = 4\alpha_{i2}\alpha_{i2} - 2(\alpha_{i2}^2 + 1) - \eta^2\alpha_{i2}\alpha_{i1}$ ;  $C = (\alpha_{i2}^2 + 1)^2 - 4\alpha_{i2}\alpha_{i2}$ . Легко убедиться, что коэффициенты  $A > 0$  и  $B < 0$  при всех параметрах системы. Что касается коэффициента  $C$ , то он может быть как положительным, так и отрицательным.  $C > 0$  при  $0.932 < \eta \leq 1$  ( $b_{\nu} = 0.25$ ) и  $C < 0$  при  $\eta < 0.932$ . Корни квадратного трехчлена (7) равны

$$\xi_{1,2}^S = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}. \quad (8)$$

Итак, при  $C > 0$  существуют два положительных корня  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ( $\xi_1 > \xi_2$ ) и  $f^S > 0$  при

$$\xi > \xi_1^S \quad \text{или} \quad \xi < \xi_2^S. \quad (9)$$

При  $C < 0$  корень  $\xi_2$  становится отрицательным и условие существования локализованных мод выполняется при

$$\xi > \xi_1^S. \quad (10)$$

При  $\eta \rightarrow 0$   $\xi_1 \rightarrow 2.989$  при  $b_{\nu} = 0.25$ .

Перейдем теперь к исследованию дисперсионного уравнения на прямой  $\omega = c_{i1}k_{\parallel}$  для АВВП. Оно принимает вид  $f^A(x) = 0$ , где

$$f^A(x) = [\xi - (\alpha_{i2}^2 + 1)]^2 - \alpha_{i2}\alpha_{i2}(\xi - 2)^2 - \alpha_{i2}\alpha_{i1}\xi\eta^2 \operatorname{cth}(\alpha_{i1}x). \quad (11)$$

Простым графическим анализом можно убедиться, что это уравнение либо не имеет решений, либо таких решений только одно и, следовательно, антисимметричная и симметричная ветви могут пересекать прямую  $\alpha_{i1} = 0$  не более одного раза. Для двух предельных случаев  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$  получаются следующие выражения:  $f_0^A = -\infty$ ,  $f_{\infty}^A = A\xi^2 + B\xi + C$  с теми же самыми коэффициентами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что и для симметричных волн. Очевидно, и условия существования антисимметричных волн в области  $k_{\parallel} > \omega/c_{i1}$  будут идентичны условиям существования симметричных волн (9), (10) ( $\xi_{1,2}^S \equiv \xi_{1,2}^A$ ). Неравенства  $\xi > \xi_1^S$  или  $\xi < \xi_2^S$  идентичны в свою очередь условиям существования волн Стоунли в структуре 1—2 с одной границей раздела (см., например, [15]). Последнее можно понять физи-

чески, так как при  $a \rightarrow \infty$  и  $k_{\parallel} > \omega/c_{t1}$  локализованные моды в рассматриваемой системе должны стремиться к волне Стоунли из-за того, что при экспоненциальном спаде амплитуды смещений влиянием второй границы при больших толщинах слоя можно пренебречь. Отсюда должны быть эквивалентны и области существования этих типов волн, а также законы дисперсий при  $a \rightarrow \infty$ . Эти две нижние моды естественно классифицировать как обобщенные волны Стоунли. В отличие от волн Стоунли они являются дисперсионными, а энергетически более высокая симметричная мода обладает нижним критическим значением параметра  $x$  ( $x_{\min}$ ), при котором она появляется. Значение  $x_{\min} = (k_{\parallel} a)_{\min}/2$  сильно зависит от параметров структуры и рассчитывается численно.

2)  $c_{t1} > c_{t2}$ . В этом случае локализованные акустические волны существуют в области  $k_{\parallel} > \omega/c_{t2}$ . Исследуем дисперсионные уравнения на прямой  $\omega = c_{t2}k_{\parallel}$ . В случае СВВП оно принимает вид  $g^S(x) = 0$  с

$$g^S(x) = [\xi(\alpha_{t1}^2 + 1) - 1]^2 \text{th}(\alpha_{t1}x) - \alpha_{t1}\alpha_{t1}(2\xi - 1)^2 \text{th}(\alpha_{t1}x) - \frac{\xi}{\eta^2} \alpha_{t1}\alpha_{t2}. \quad (12)$$

Легко убедиться, что и это уравнение может иметь не более одного корня. Как и в случае предыдущего пункта, условие существования единственного корня уравнения сводится к условию положительности квадратного относительно  $\xi$  трехчлена:  $g_{\infty}^S = \bar{A} \xi^2 + \bar{B} \xi + \bar{C}$ , где  $\bar{A} = (\alpha_{t1}^2 + 1)^2 - 4\alpha_{t1}\alpha_{t1}$ ,  $\bar{B} = 4\alpha_{t1}\alpha_{t1} - 2(\alpha_{t1}^2 + 1) - \alpha_{t1}\alpha_{t2}/\eta^2$ ,  $\bar{C} = 1 - \alpha_{t1}\alpha_{t1}$ . Нетрудно убедиться, что коэффициенты  $\bar{C} > 0$  и  $\bar{B} < 0$  при всех параметрах слоистой структуры точно так же, как дискриминант квадратного трехчлена, всегда больше нуля. Что касается коэффициента  $\bar{A}$ , то его знак зависит от параметра  $\eta$  (зависимость от параметров  $b$ , слабая).  $\bar{A} > 0$  при  $1.073 > \eta \geq 1$  ( $b_v = 0.25$ ) и  $\bar{A} < 0$  при  $\eta > 1.073$ . При  $\bar{A} > 0$  имеем два положительных корня  $\xi_1^S$  и  $\xi_2^S$ , которые получаются из (8) заменой коэффициентов  $A, B, C$  на  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .  $g_{\infty}^S > 0$  при

$$\xi > \xi_1^S \quad \text{или} \quad \xi < \xi_2^S. \quad (13)$$

При  $\bar{A} < 0$  корень  $\xi_1^S < 0$  и условие существования граничных мод выполняется при

$$\xi < \xi_2^S. \quad (14)$$

Если  $\eta \rightarrow \infty$ , то  $\xi_2^S \rightarrow 0.335$  ( $b_v = 0.25$ ).

Условия существования СВВП в сэндвиче (13), (14) в случае  $c_{t1} > c_{t2}$  ( $\eta > 1$ ) эквивалентны условиям существования СВВП и АВВП (9), (10) в случае  $c_{t2} > c_{t1}$  ( $\eta < 1$ ). В этом можно убедиться, заменяя в (13) и (14)  $\eta$  на  $1/\eta$ ,  $\xi$  на  $1/\xi$ , индексы «1» на «2», и наоборот, и сравнивая полученные неравенства с (9) и (10). Следовательно, СВВП существуют в сэндвиче 2—1—2, если существуют волны Стоунли в структуре 1—2 с одной границей раздела.

Дисперсионное уравнение для АВВП на прямой  $\omega = c_{t2}k_{\parallel}$  принимает вид  $g^A(x) = 0$ , где

$$g^A(x) = [\xi(\alpha_{t1}^2 + 1) - 1]^2 \text{cth}(\alpha_{t1}x) - \alpha_{t1}\alpha_{t1}(2\xi - 1)^2 \text{cth}(\alpha_{t1}x) - \frac{\xi}{\eta^2} \alpha_{t1}\alpha_{t2}. \quad (15)$$

Анализ для этого случая будет несколько отличаться от предыдущих случаев. В начале раздела 3 было указано, что в случае  $c_{t1} > c_{t2}$  самая нижняя, антисимметричная, ветвь, берущая начало из точек  $k_{\parallel} = 0$ ,  $\omega = 0$ , существует только при значениях параметров системы, удовлетворяющих соотношениям (3), которые, как нетрудно заметить, отличаются от соотношений (13), (14), определяющих область существования СВВП.

Из вида функции (15) следует, что при  $x > 0$  уравнение  $g^A(x) = 0$  имеет либо одно решение, либо ни одного. Если решение отсутствует, то возможно следующее: а) самая нижняя АВВП существует, б) она не существует. Для того чтобы осуществилась бы ситуация «а», необходимо

совместить условия (3) с условиями отсутствия решения дисперсионного уравнения для АВВП на прямой  $\omega = c_{i2}k_{\parallel}$ . Если  $g_{\infty}^A > 0$ , то  $g^A(x) > 0$  при всех значениях аргумента из-за того, что гиперболический котангенс является монотонно убывающей функцией. Но условие  $g_{\infty}^A > 0$  эквивалентно условиям существования СВВП:  $\xi > \xi_1^S$  или  $\xi < \xi_2^S$ . Так как для фиксированного  $\eta$  справедливо неравенство  $\xi_2^S < \xi_2^A < \xi_1^A < \xi_1^S$ , то ситуация «а» осуществляется, если  $\xi < \xi_2^S$  или  $\xi > \xi_1^S$ , которое совпадает с условием существования волн Стоунли в слоистых структурах с одной плоской границей раздела. Антисимметричная граничная мода вместе с симметричной в этом случае является обобщенной волной Стоунли, законы дисперсии которой стремятся при больших значениях параметра  $k_{\parallel}a$  к закону дисперсии соответствующей волны Стоунли. АВВП не имеет при этом критической частоты и существует во всей области изменения параметра  $k_{\parallel}a$ . В области  $\xi_1^A < \xi < \xi_2^A$  локализованные моды отсутствуют.

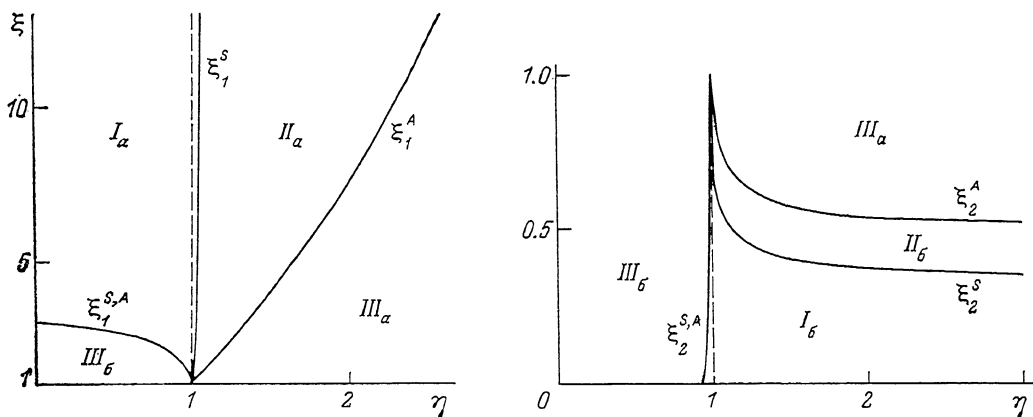


Рис. 1. Области существования различных типов граничных волн.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение  $g^A(x) = 0$ , имеет один корень при  $x > 0$ . Это возможно, если одновременно  $g_{\infty}^A < 0$  (что эквивалентно условию  $\xi_2^S < \xi < \xi_1^S$ ) и  $g_0^A > 0$ . Последнее неравенство приводит к следующему результату:  $\xi > \xi_1^A$  или  $\xi < \xi_2^A$  с  $\xi_{1,2}^A$  из соотношения (3). Следовательно, при  $\xi_2^S < \xi < \xi_2^A$  или  $\xi_1^A < \xi < \xi_1^S$  существует только одна АВВП. Эта мода берет свое начало из точки  $\omega = 0$  и существует только в конечной области значений параметра  $k_{\parallel}a$ ,  $0 \leq k_{\parallel}a \leq (k_{\parallel}a)_{\max}$ , обладая верхней критической частотой  $\omega_{\max} = c_{i2}k_{\parallel \max}$  (насколько известно авторам, обычно локализованные моды обладают нижней критической частотой и существуют в бесконечной области изменения параметра  $k_{\parallel}a$ ,  $(k_{\parallel}a)_{\min} \leq k_{\parallel}a < \infty$ ). При  $k_{\parallel}a = (k_{\parallel}a)_{\max}$  дисперсионная кривая для этой моды пересекает прямую  $\omega = c_{i2}k_{\parallel}$ . Значение групповой скорости этой моды в точке пересечения, как было показано в начале раздела 2, равно  $c_{i2}$ . Значение критической частоты  $\omega_{\max}$  сильно зависит от упругих параметров слоистой структуры  $\eta$ ,  $\xi$  и толщины среднего слоя и очень слабо от параметров  $b_{\nu}$ . Значение  $\omega_{\max}$  рассчитывается численно.

На рис. 1 в плоскости  $\eta$ — $\xi$  изображены области существования различных типов локализованных волн в исследуемой слоистой структуре. В областях  $I_a$  и  $I_b$  существуют две обобщенные волны Стоунли — одна антисимметричная и одна симметричная. В областях  $II_a$  и  $II_b$  существует только одна антисимметричная граничная мода с верхней критической частотой. В области  $III_a$  локализованные моды отсутствуют, в области  $III_b$  отсутствуют обобщенные волны Стоунли. Обобщенные волны Лэмба существуют во всей области  $\eta < 1$ .

Рассматриваемая теория применима также в случае кубических сред, когда граница раздела — плоскость (001), а волна распространяется вдоль

направления [100]. Кроме того, в работе [16] указано, что если в кубических кристаллах фактор анизотропии отличается от единицы не более чем на 15—20 %, то для таких кристаллов свойства поверхностных волн аналогичны случаю изотропных сред. Кристаллы W (0.995), Al (1.22), C (1.21), BaF<sub>2</sub> (1.01), BaTiO<sub>3</sub> (1.15), SrTiO<sub>3</sub> (1.15), Bi<sub>4</sub>(GeO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> (0.98), Y<sub>3</sub>Al<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (1.03), Y<sub>3</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (0.96), Y<sub>3</sub>Ga<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (1.1) удовлетворяют этому условию. В скобках указаны значения факторов анизотропии [16, 17].

Упругие параметры некоторых слоистых структур

Номер структуры	Сэндвич	$\eta$	$\xi$	Область
1	W—Al—W	1.114	0.176	$I_b$
2	Al—W—Al	0.898	5.696	$I_a$
3	Al—Ni—Al	1.035	3.559	$II_a$
4	Ni—Al—Ni	0.966	0.281	$III_b$
5	SrTiO <sub>3</sub> —Y <sub>3</sub> Al <sub>5</sub> O <sub>12</sub> —SrTiO <sub>3</sub>	1.087	0.171	$I_b^6$
6	Y <sub>3</sub> Al <sub>5</sub> O <sub>12</sub> —SrTiO <sub>3</sub> —Y <sub>3</sub> Al <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	0.920	5.862	$I_a$
7	Y <sub>3</sub> Ga <sub>5</sub> O <sub>12</sub> —Bi <sub>4</sub> (GeO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> —Y <sub>3</sub> Ga <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	1.930	0.457	$II_b$
8	Bi <sub>4</sub> (GeO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> —Y <sub>3</sub> Ga <sub>5</sub> O <sub>12</sub> —Bi <sub>4</sub> (GeO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub>	0.518	2.188	$III_b$

В таблице приведены значения параметров  $\eta$  и  $\xi$ , а также указаны соответствующие области на рис. 1 для конкретных слоистых структур. Как видно из этой таблицы, проведенный нами аналитический анализ позволяет объяснить результаты, полученные численно в [5] для структур № 1—4.

### 3. Численные расчеты

Из-за явного вида дисперсионных уравнений оказалось возможным провести численный анализ на мини-ЭВМ М6000.

Для проведения численных расчетов вводились безразмерные параметры  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha_l$ ,  $t_v$  и  $b_v$ . Как видно из дисперсионного уравнения (1), зависимость его от параметров  $b_1$  и  $b_2$  является слабой (эти параметры входят под корнем) и основная зависимость обусловлена параметрами  $\eta$  и  $\xi$ . Точный численный счет показал, что изменение параметров  $b_1$  и  $b_2$  во всем теоретическом диапазоне от 0 до 0.5 приводит к изменениям значений частоты до 6 %. В дальнейшем нами использовались значения  $b_v = 0.25$ . Именно вблизи этого значения сгруппированы квадраты отношений поперечной скорости к продольной для большинства материалов. Некоторые из численных расчетов представлены на рис. 2, 3 (случай  $\eta < 1$  исследовался численно в [6]).

На рис. 2 представлены зависимости групповых скоростей обобщенных волн Стоунли от волнового числа (в безразмерных величинах). С увеличением  $x$  скорости вначале достаточно резко уменьшается — при  $\xi = 0.1$  это изменение скорости порядка 5 %, для  $\xi = 0.5$  соответственно на порядок меньше, а при  $\xi = 15$  изменение скорости достигает 40 %. При дальнейшем увеличении параметра  $x$  скорости как антисимметричных, так и симметричных волн медленно увеличиваются, причем в случае антисимметричных волн обнаруживается пологий максимум. При больших значениях параметра  $k_{||}a$  симметричные и антисимметричные ветви асимптотически стремятся друг к другу, а обе вместе — к скорости соответствующей волны Стоунли ( $c_s = 0.957 c_{t2}$  для  $\xi = 0.1$  и  $c_s = 0.999 c_{t2}$  для  $\xi = 0.5$ ). Значения параметра  $x$ , которые соответствуют появлению симметричной моды, при стремлении  $\xi$  к границам I и II областей стремятся к бесконечности. Особенностью кривых, которым соответствуют значения параметров  $\eta$  и  $\xi$  в области  $I_a$ , является то, то значение скорости волны

в пологом максимуме достигает величины, большей, чем  $c_{t2}$ , но меньшей, чем  $c_{t1}$ . В области  $I_6$  скорость волны всегда меньше, чем  $c_{t2}$ .

На рис. 3 представлены два графика, иллюстрирующие зависимости групповых скоростей АВП с верхней критической частотой от волнового числа. Как видно, эти моды существуют в ограниченной области изменения параметра  $x$ . Характерной чертой этих графиков, как и в случае обобщенных волн Стоунли, является существование минимума. При

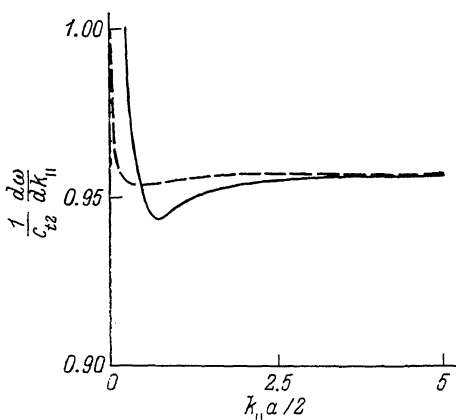


Рис. 2. Зависимости групповых скоростей обобщенных волн Стоунли от волнового числа (в безразмерных параметрах).

Сплошная кривая соответствует симметричной моде, прерывистая — антисимметричной.  $\eta=1.05$ ,  $\xi=0.1$ .

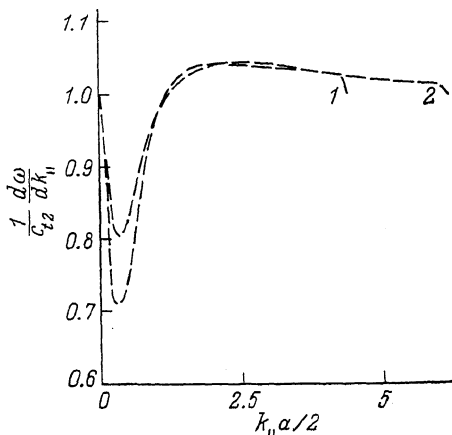


Рис. 3. Зависимости групповых скоростей антисимметричных граничных волн с верхней критической частотой от волнового числа (в безразмерных параметрах).

1 —  $\eta=1.05$ ,  $\xi=5.0$ ; 2 —  $\eta=1.05$ ,  $\xi=7.5$ .

больших значениях параметра  $x$  значения скорости выходят на пологий максимум, величина которого всегда больше, чем  $c_{t2}$ , но меньше, чем  $c_{t1}$ . Далее значение скорости медленно уменьшается, а вблизи значения  $x_{\max}=(k_{||} a)_{\max}/2$  резко уменьшается до величины, равной поперечной скорости звука во второй среде. При увеличении  $\xi$  в области  $II_a$  и уменьшении в области  $II_6$  глубина минимума и, следовательно, дисперсионность кривых возрастает. Точно так же при этом возрастает и величина параметра  $(k_{||} a)_{\max}$ , при котором дисперсионная кривая пересекается с прямой  $\alpha_{t2}=0$ .

#### 4. Обсуждение результатов

В работе подробно исследуются граничные акустические волны с вертикальной поляризацией в слоистой структуре типа сэндвича. Получены в явном виде дисперсионные уравнения для антисимметричных и симметричных волн, что позволило провести в ряде случаев аналитический анализ и существенно облегчить численное решение уравнений.

В случае  $c_{t2} > c_{t1}$  возможно бесконечное число локализованных мод, которые можно классифицировать как обобщенные волны Лэмба. Если в слоистой системе 1—2, состоящей из двух полупространств, существуют волны Стоунли, то две самые нижние моды (антисимметричная, стартующая из начала координат, и следующая симметричная) классифицируются как обобщенные волны Стоунли. У всех этих мод, кроме самой нижней, существуют нижние критические частоты.

В случае  $c_{t1} > c_{t2}$  возможны три ситуации.

а) При  $\xi < \xi_2^s$  и  $\xi > \xi_1^s$  ( $I$  область; рис. 1) существуют одна антисимметричная и одна симметричная моды, которые являются обобщенными волнами Стоунли.

б) При  $\xi_2^A > \xi > \xi_2^s$  и  $\xi_1^s > \xi > \xi_1^A$  ( $II$  область) существует только одна граничная антисимметричная мода, особенностью которой является то, что она существует в ограниченной области изменения параметра



$k_{\parallel} a$ ,  $0 \leq k_{\parallel} a \leq (k_{\parallel} a)_{\max}$ , где  $(k_{\parallel} a)_{\max} \rightarrow \infty$  при  $\xi \rightarrow \xi_1^S$ ,  $\xi_2^S$  и  $(k_{\parallel} a)_{\max} \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \xi_1^A$ ,  $\xi_2^A$ . Подобная волна может распространяться, например, в сэндвиче  $Y_3Ga_5O_{12}-Bi_4(GeO_4)_3-Y_3Ga_5O_{12}$ .

в) При  $\xi_2^A < \xi < \xi_1^A$  (область III<sub>a</sub>) локализованные моды отсутствуют.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность М. И. Каганову за полезные обсуждения и ценные замечания.

#### Список литературы

- [1] Wendler L., Pechstedt R. // Phys. Rev. 1987. V. B35. N 10. P. 5887—5890.
- [2] Wendler L. // Phys. St. Sol. 1985. V. B129. N 2. P. 513—530.
- [3] Косевич А. М., Хохлов В. И. // ФТТ. 1968. Т. 10. № 1. С. 56—61.
- [4] Velasco V. R., Garcia-Meliner F. // Phys. Scripta. 1979. V. 20. N 2. P. 111—120.
- [5] Velasco V. R., Djafari-Rouhani B. // Phys. Rev. 1982. V. B26. N 3. P. 1929—1941.
- [6] Wendler L., Grigoryan V. G. // Surf. Sci. 1988. V. 206. N 1. P. 203—224.
- [7] Бадалян С. М., Левинсон И. Б. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 9. С. 2764—2772.
- [8] Вартанян А. А., Киракосян А. А. // Тез. докл. XIII Всес. совещ. по теории полупроводников. Ереван, 1987. С. 70.
- [9] Maradudin A. A. // Advan. Solid. State. Phys. 1981. V. 21. P. 25—115.
- [10] Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973. 343 с.
- [11] Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. М., 1984. 400 с.
- [12] Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М., 1981. 288 с.
- [13] Лавдау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., 1987. 248 с.
- [14] Auld B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. V. 2. N. Y., 1973. 414 p.
- [15] Djafari-Rouhani B., Dobrzynski L., Marsi P. // Ann. Phys. Fr. 1981. V. 6. P. 259—294.
- [16] Фарнелл Дж. Физическая акустика. Т. 6. М., 1973. С. 139—181.
- [17] Акустические кристаллы. Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской М., 1982. 632 с.

Политехнический институт им. К. Маркса  
Ереван

Поступило в Редакцию  
6 марта 1990 г.  
В окончательной редакции  
13 февраля 1991 г.