УДК 537—611.2

ОБЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $SU(2S+1)/SU(2S)\times U(1)$ И ЛЕГКООСНЫЙ МАГНЕТИК СО СПИНОМ $S=3/2$

Х. О. Абдуллоев, А. Т. Максудов, Х. Х. Муминов

Исследована динамика магнетиков со спином $S \geqslant 3/2$. В явном виде получены гамильтоновы уравнения движения на основе спиновых когерентных состояний для произвольной группы или пространств SU $(2S+1)$/SU $(2S)\times U$ (1). В линейном приближении обнаружено существование как НЧ, так и ВЧ ветви колебаний, заполняющей все фазовое пространство.

В последнее время большое внимание уделяется теоретическому изучению и экспериментальному исследованию магнетиков в кристаллической решетке со спином $S=1$, в котором существуют три состояния и все возможные переходы описываются восемью независимыми операторами группы SU (3) [1-4]. Принципиальным вопросом здесь остается правильность построения гамильтоновых уравнений движения в соответствующем пространстве и группы SU $(2S+1)$/SU $(2S)\times U$ (1). В [1, 4] были построены такие уравнения в пространстве SU (3)/SU (2)$\times U$ (1).

Настоящая статья посвящена наиболее общему вопросу, т. е. построению гамильтоновых уравнений движения в пространстве SU $(2S+1)$/SU $(2S)\times$ $\times U$ (1). В качестве конкретного примера исследуется магнетик Гейзенберга со спином $S=3/2$. Попутно отметим, что группа SU (4) впервые в 1937 г. была введена Вигнером [5] в связи с некоторыми вопросами ядерной физики.

Отметим, что в случае $S=3/2$ все возможные переходы между четырьмя состояниями спина в каждом узле описываются 15 независимыми операторами группы SU (4). Эти операторы связаны между собой линейными, квадратичными и кубическими комбинациями по спиновым операторам.

Следуя работе [3], размерность пространства спиновых состояний для спина $S=3/2$ $\mathscr{H}\in\psi$ есть

$$\mathrm{Dim}\,\mathscr{H}=6. \tag{1}$$

Такой же размерностью обладает симметрическое пространство

$$CP^3=\mathrm{SU}\,(4)/\mathrm{SU}\,(3)\times U\,(1). \tag{2}$$

Построим обобщенные спиновые когерентные состояния (ОСКС) по представлениям

$$|\psi\rangle=\exp\left\{\sum_i^{2s}\xi_i\hat{T}_i^+-\bar{\xi}_i\hat{T}_i^-\right\}|0\rangle=\cos|\xi|\,\{|0\rangle+\psi_1|1\rangle+\ldots+\psi_{2s}|2s\rangle\}, \tag{3}$$

где

$$|\xi|^2=\sum_{i=1}^{2s}|\xi_i|^2,\ \ |\xi|<\frac{\pi}{2},\ \ \psi_i=\frac{\xi_i}{|\xi|}\tan|\xi|.$$

Здесь $\hat{T}^{\pm}$ — генераторы фундаментального представления группы SU $(2S+1)/$SU $(2S)+U(1)$, представляющие собой незначительные матрицы с единицами в последнем столбце для $\hat{T}^{+}$ и в последней строке для $\hat{T}^{-}$, $|i\rangle$ — с единицей по $i+1$ строке снизу. Из (3) следует

$$\cos|\xi|=(1+|\psi|^2)^{-1/2}, \tag{4}$$

и окончательно для обобщенных спиновых когерентных состояний группы SU $(2S+1)$ имеем

$$|\psi\rangle=\left(1+\sum_{i=1}^{2s}|\psi_i|^2\right)^{-1/2}\left\{|0\rangle+\sum_{i=1}^{2s}\psi_i|i\rangle\right\}. \tag{5}$$

Система ОСКС (5), построенная с помощью генераторов $\hat{T}^{\pm}$ фундаментального представления группы SU $(2S+1)$, является первой точкой в последовательности систем ОСКС, определяемой более высокими представлениями. В качестве квантомеханических спиновых операторов для спина $S=3/2$ примем операторы $\hat{S}^{+}$, $\hat{S}^{-}$, $\hat{S}^{z}$. Остальные 12 генераторов группы SU (4) состоят из комбинаций квадратичных и кубических корреляторов спиновых операторов.

Усредняя спиновые операторы по ОСКС) (5), получим

$$\langle\hat{S}^{+}\rangle=\frac{\sqrt{3}\,\psi_2\bar{\psi}_3+2\psi_1\bar{\psi}_2+\sqrt{3}\,\bar{\psi}_1}{1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2},$$

$$\langle\hat{S}^{-}\rangle=\frac{\sqrt{3}\,\bar{\psi}_2\psi_3+2\bar{\psi}_1\psi_2+\sqrt{3}\,\psi_1}{1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2},$$

$$\langle\hat{S}^{z}\rangle=\frac{1}{2}\,\frac{3|\psi_3|^2+|\psi_2|^2-|\psi_1|^2-3}{1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2}. \tag{6}$$

Отсюда можем написать оператор, подобный оператору Казимира

$$\langle\hat{C}\rangle=\frac{1}{2}(\langle\hat{S}^{+}\rangle\langle\hat{S}^{-}\rangle+\langle\hat{S}^{-}\rangle\langle\hat{S}^{+}\rangle)+\langle\hat{S}^{z}\rangle\langle\hat{S}^{z}\rangle=\frac{15}{4}. \tag{7}$$

В отличие от SU (3) ОКС здесь не только не имеет места закон сохранения квадрата классического спина, но и не сохраняется сумма

$$S^2+q^2=1.$$

В данном случае имеет место тождество

$$S^2+q^2+f^2=1, \tag{8}$$

где q^2 и f^2 — соответственно сумма двойных и тройных корреляторов

$$q^2=\frac{1}{4}(\langle\hat{S}^{+}\hat{S}^{-}\rangle-\langle\hat{S}^{-}\hat{S}^{+}\rangle)^2-5(\langle\hat{S}^{+}\hat{S}^{z}\rangle\langle\hat{S}^{z}\hat{S}^{-}\rangle+$$
$$+\langle\hat{S}^{+}\hat{S}^{z}\rangle\langle\hat{S}^{-}\hat{S}^{z}\rangle+\langle\hat{S}^{z}\hat{S}^{+}\rangle\langle\hat{S}^{z}\hat{S}^{-}\rangle+\langle\hat{S}^{z}\hat{S}^{+}\rangle\langle\hat{S}^{-}\hat{S}^{z}\rangle),$$
$$f^2=\langle\hat{S}^{z}\hat{S}^{z}\hat{S}^{+}\rangle\langle\hat{S}^{-}\hat{S}^{z}S^{z}\rangle+\langle\hat{S}^{+}\hat{S}^{z}\hat{S}^{z}\rangle\langle(\hat{S}^{z})^2\hat{S}^{-}\rangle-(\langle(\hat{S}^{z})^2\hat{S}^{+}\rangle\langle(\hat{S}^{z})^2\hat{S}^{-}\rangle+$$
$$+\langle\hat{S}^{+}(\hat{S}^{z})^2\rangle\langle\hat{S}^{-}(\hat{S}^{z})^2\rangle)+\langle\hat{S}^{+}(\hat{S}^{-})^2\rangle\langle(\hat{S}^{+})^2\hat{S}^{-}\rangle+\langle(\hat{S}^{-})^2\hat{S}^{+}\rangle\langle\hat{S}^{-}(\hat{S}^{+})^2\rangle-$$
$$-(\langle(\hat{S}^{-})^2\hat{S}^{z}\rangle\langle(\hat{S}^{+})^2\hat{S}^{-}\rangle+\langle\hat{S}^{+}(\hat{S}^{-})^2\rangle\langle\hat{S}^{-}(\hat{S}^{+})^2\rangle). \tag{9}$$

Отсюда для получения уравнений динамики построим лагранжиан. Следуя методу, изложенному в работе [6], получаем

$$L=i\hbar\,\frac{\dot{\psi}_1\bar{\psi}_1-\psi_1\dot{\bar{\psi}}_1+\dot{\psi}_2\bar{\psi}_2-\psi_2\dot{\bar{\psi}}_2+\dot{\psi}_3\bar{\psi}_3-\psi_3\dot{\bar{\psi}}_3}{1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2}-\mathscr{H}(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3). \tag{10}$$

Проварьировав лагранжиан (10), получим следующее уравнение движения в пространстве SU (4)/SU (3)$\times U$ (1):

$$i\dot{\psi}_1=(1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2)\left[(1+|\psi_1|^2)\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_1}+\psi_1\bar{\psi}_2\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_2}+\psi_1\bar{\psi}_3\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_3}\right],$$

$$i\dot{\psi}_2=(1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2)\left[(1+|\psi_2|^2)\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_2}+\psi_2\bar{\psi}_1\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_1}+\psi_2\bar{\psi}_3\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_3}\right],$$

$$i\dot{\psi}_3=(1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2)\left[(1+|\psi_3|^2)\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_3}+\psi_3\bar{\psi}_1\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_1}+\psi_3\bar{\psi}_2\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_2}\right]. \quad (11)$$

Аналогичные уравнения можно выписать и для сопряженных функций $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_2$, $\bar{\psi}_3$. Обобщая уравнения (11) на случай произвольного спина S и соответственно пространств SU $(2S+1)$/SU $(2S)\times U$ (1), получим

$$i\dot{\psi}_l=\left(1+\sum_{k=1}^{l}|\psi_k|^2\right)\left[(1+|\psi_l|^2)\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_l}+\sum_{k=1}^{n}\psi_l\bar{\psi}_k\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\psi}_k}\alpha_{lk}\right], \quad (12)$$

где

$$\alpha_{lk}=\begin{cases}0, & l=k,\\ 1, & l\neq k.\end{cases}$$

Теперь сравним когерентные состояния для спина $S=3/2$ в SU (4) и SU (2) версии.

ОКС в SU (2) версии [7] имела вид

$$|\eta\rangle=(1+|\eta|^2)^{-3/2}\{|0\rangle+\sqrt{3}\,\eta\,|1\rangle+\sqrt{3}\,\eta^2|2\rangle+\eta^3|3\rangle\}, \quad (13)$$

в SU (4) версии

$$|\psi\rangle=(1+|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2)^{-1/2}\{|0\rangle+\psi_1|1\rangle+\psi_2|2\rangle+\psi_3|3\rangle\}.$$

Состояния $|\eta\rangle$ определяются точками сферы S^2, состояние $|\psi\rangle$ — точками S^6. Квантовая система со спином $S=3/2$ живет в 6-мерном пространстве состояний, а гамильтониан усреднений по спиновым когерентным состояниям группы SU (2) описывает ее поведение в некотором 2-мерном сечении этого пространства. Нетрудно проверить, что это сечение есть

$$\psi_3=\frac{\psi_1^3}{3\sqrt{3}},\quad \psi_2=\frac{\psi_1^2}{\sqrt{3}},\quad \psi_1=\sqrt{3}\,\eta. \quad (14)$$

Ниже мы исследуем цепочку спинов $S=3/2$, описывающую ферромагнетик с одноосной обменной анизотропией. Как обычно, гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}=-J\sum_j\hat{\mathbf{S}}_j\hat{\mathbf{S}}_{j+1}-\delta\sum_j\hat{S}^z_j\hat{S}^z_{j+1}. \quad (15)$$

Переходя к континуальному пределу, имеем классический гамильтониан

$$\mathcal{H}=-J\int\left\{\hat{S}^+\hat{S}^-+(\delta+1)\hat{S}^z\hat{S}^z-\frac{a_0^2}{2}(\hat{S}^+_x\hat{S}^-_x+(\delta+1)(\hat{S}^z_x)^2)\right\}dx. \quad (16)$$

Вычислим классические вакуумные состояния этого гамильтониана. В случае, когда $\delta>0$, что соответствует модели ферромагнетика с «легкой осью», основным вакуумным состоянием является

$$\psi_1=\psi_2=\psi_3=0$$

или в терминах ОКС $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, что соответствует основному состоянию в SU (2) и SU (3) версиях [3]. Когда $\delta < 0$, что соответствует модели с «легкой плоскостью», минимум гамильтониана будет при $\psi_1 = \psi_2 = \sqrt{3}$ и $\psi_3 = 1$. Тогда ОКС примет вид $|\psi_0\rangle = \sqrt{8}\left(|0\rangle + \sqrt{3}|1\rangle + \sqrt{3}|2\rangle + |3\rangle\right)$, что также соответствует SU (2) и SU (3) версии для спина $S = 3/2$.

Приступим теперь к получению дисперсионных соотношений. Для этого разложим гамильтониан (16) вблизи легкоосного основного состояния. Ограничившись членами второго порядка, получим

$$\mathscr{H} = -\frac{3}{2} J \int \{3|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - 3|\psi_3|^2 + \delta(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - 3|\psi_3|^2) - $$

$$- a_0^2 |\psi_{1x}|^2\} \frac{dx}{a_0}. \tag{17}$$

Тогда линеаризованные уравнения имеют вид

$$i\dot{\psi}_1 = -(3+\delta)\psi_1 - \psi_{1xx},$$

$$i\dot{\psi}_2 = (\delta + 1)\psi_2,$$

$$i\dot{\psi}_3 = 3(\delta + 1)\psi_3,$$

откуда следуют дисперсионные соотношения

$$\omega_1 = k^2 - (3 + \delta), \tag{18}$$

$$\omega_2 = \delta + 1, \tag{19}$$

$$\omega_3 = 3(\delta + 1). \tag{20}$$

Таким образом, в линейном приближении в легкоосном вакууме магнетика со спином $S=3/2$ существует низкочастотная волна с дисперсией (18), совпадающей с дисперсией для SU (2) модели [3], и в отличие от магнетика со спином $S=1$ имеются две добавочные высокочастотные волны (19) и (20). В пространстве спиновых состояний НЧ ветвь лежит в SU (2) сечении полного 6-мерного фазового спинового пространства, а ВЧ ветви занимают все остальное фазовое пространство.

Авторы выражают благодарность В. Г. Маханькову за стимулирующие обсуждения полученных результатов.

Список литературы

[1] Островский В. С. // ЖЭТФ. 1986. Т. 96. № 11. С. 1690—1701.

[2] Китаев В. Н., Кашенко М. П., Курбатов Л. В. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 2334—2342.

[3] Abbuloev Kh. O. et al. // Proceedings of the IV International Workshop «Solitons and Applications». W. S. Singapore, 1990. P. 222—246.

[4] Абдуллоев Х. О., Максудов А. Т., Муминов Х. Х. // ДАН Тадж. ССР. 1991. Т. 34. № 2. С. 142—145.

[5] Wigner E. // Phys. Rev. 1937. V. 51. P. 106—111.

[6] Kuratsuji K., Suzuki T. // J. Math. Phys. 1980. V. 21. N 3. P. 472—476.

[7] Абдуллоев Х. О., Маханьков А. В., Хакимов Ф. Х. Классические нелинейные модели в теории конденсированных сред. Душанбе: Дониш, 1989. 180 с.

Таджикский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в Редакцию
12 февраля 1991 г.
В окончательной редакции
16 июля 1991 г.