УДК 533.951

К ВОПРОСУ О СВЯЗАННЫХ УПРУГОЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ

А. А. Рухадзе, М. Е. Чоговадзе

Исследуется спектр связанной упругоэлектромагнитной поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы раздела пьезоэлектрик-вакуум. Рассмотрен случай связи медленной упругой поверхностной волны (волны Рэлея) с электромагнитной объемной H-волной. Показано, что наличие пьезоэффекта приводит к появлению связанной упругоэлектромагнитной поверхностной волны со спектром, близким к спектру частот волны Рэлея, причем пьезоэлектрическая поправка к спектру частот обусловлена релятивистским эффектом.

1. Известно, что на границе раздела пьезоэлектрика с вакуумом может распространяться связанная упругоэлектромагнитная поверхностная волна, так называемая волна Блюштейна—Гуляева [1]. Механизм возникновения этой волны следующий: на границе раздела двух диэлектрических сред существует поверхностная электромагнитная волна, являющаяся волной E-типа [2] (с отличными от нуля компонентами полей E_x, E_y, H_z, если поверхностью раздела является плоскость XOZ). В случае, когда одной из сред является пьезокристалл, благодаря пьезосвязи электромагнитных и упругих свойств поверхностная электромагнитная волна вызывает упругие колебания кристаллической решетки, которые, так же как поле электромагнитной волны, оказываются затухающими в глубь пьезокристалла. Приведем здесь дисперсионное уравнение для такой волны на поверхности гексагонально-симметричного пьезодиэлектрика с главной осью симметрии вдоль OZ и тензором модуля упругости λ_{iklm}, аппроксимируемым изотропным тензором с двумя отличными от нуля компонентами [1] $\lambda_{\text{tr}}=\lambda_2$ и $\lambda_l=\lambda_1+2\lambda_2$. Тогда в плоскости XOY, перпендикулярной к гексагональной оси, упругие свойства кристалла изотропны и можно его считать изотропной средой. Ограничимся рассмотрением волн, распространяющихся строго поперек главной оси симметрии, и представим все величины в виде $A(y)\,e^{-i\omega t+ik_x x}$. При пренебрежении пространственной дисперсией, когда продольная диэлектрическая проницаемость зависит только от частоты колебаний, т. е. $\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k})=\varepsilon(\omega)$, дисперсионное уравнение для связанных упругоэлектромагнитных поверхностных волн E-типа на границе раздела пьезополупроводник—вакуум в отсутствие внешних полей имеет вид [2]

$$\omega^2\rho^{(m)}=k_x^2\left(\lambda_{\text{tr}}+\frac{4\pi\beta_1^2}{\varepsilon(\omega)}\right)\left[1-\left(\frac{4\pi\beta_1^2}{[1+\varepsilon(\omega)]\,[\lambda_{\text{tr}}\varepsilon(\omega)+4\pi\beta_1^2]}\right)\right]^2. \tag{1}$$

Здесь $\rho^{(m)}$ — плотность вещества пьезокристалла, k_x — волновое число, $\beta_1=\beta_{x,\,xz}=\beta_{x,\,zx}=\beta_{y,\,yz}=\beta_{y,\,zy}$ — компоненты пьезоэлектрического тензора $\beta_{i,\,kl}$ среды.

В условиях, когда $\varepsilon(\omega) = \mathrm{const}$, уравнение (1) описывает закон дисперсии поверхностной волны — волны Блюштейна—Гуляева [1]. Эта волна в действительности является квазиповерхностной упругой волной, поскольку при $\beta_1 \longrightarrow 0$, т. е. в отсутствие пьезоэффекта в кристалле, она существовать не может и переходит в объемную упругую волну, однородную вдоль оси OY (т. е. вдоль этой оси она не затухает).

2. Известно, кроме того, что в кристалле существуют также упругие поверхностные волны — волны Рэлея [3]. Электромагнитная же волна H-типа (с компонентами H_x, H_y, E_z, если поверхностью раздела является плоскость XOZ) в немагнитной плазменной среде не может быть поверхностной, она всегда объемная. Наличие пьезоэффекта в среде, однако, может привести к связи такой волны с волной Рэлея и появлению упругоэлектромагнитной поверхностной волны.

В уравнениях теории упругости, описывающих колебания решетки при наличии пьезоэффекта, в рассматриваемом случае уравнение для u_z-компоненты смещения элементов кристаллической решетки относительно равновесного состояния отщепляется и вообще не содержит электромагнитного поля, т. е. описывает чисто упругие колебания. Остальные два уравнения для компонент u_x и u_y имеют следующий вид:

$$-\omega^2\rho^{(m)}u_x = ik_x\left[\lambda_1\left(ik_xu_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + 2\lambda_2 ik_xu_x + \beta_3E_z\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_2\left(ik_xu_y + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right], \quad (2)$$

$$-\omega^2\rho^{(m)}u_y = ik_x\left[\lambda_2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + ik_xu_y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_1\left(ik_xu_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + 2\lambda_2\frac{\partial u_y}{\partial y} + \beta_3E_z\right]. \quad (3)$$

Здесь $\beta_3 = \beta_{z,\,xx} = \beta_{z,\,yy}$. Уравнения же Максвелла для H-волны в пьезокристалле в отсутствие внешних полей сводятся к виду

$$\Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon E_z = 4\pi\beta_3\frac{\omega^2}{c^2}\left(ik_xu_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right). \quad (4)$$

Систему уравнений (2)—(4) следует дополнить граничными условиями, получающимися путем интегрирования уравнений теории упругости и уравнения поля по тонкому переходному слою вдоль границы раздела двух сред

$$\left\{\frac{\partial E_z}{\partial y}\right\}_{y=0} = \left(\frac{\partial E_{z1}}{\partial y}\right)_{y=0} - \left(\frac{\partial E_{z2}}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\omega^2}{c^2}\,4\pi\beta_3u_y\,\Big|_{y=0}, \quad (5)$$

$$\left\{E_z\right\}_{y=0} = E_{z1}\,\Big|_{y=0} - E_{z2}\,\Big|_{y=0} = 0, \quad (6)$$

$$\left\{\sigma_{xy}\right\}_{y=0} = \lambda_2\left(ik_xu_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad (7)$$

$$\left\{\sigma_{yy}\right\}_{y=0} = \left[\lambda_1\left(ik_xu_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + 2\lambda_2\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]_{y=0} + \beta_3E_{z1}\,\Big|_{y=0} = 0. \quad (8)$$

Здесь σ_{ik} — тензор упругих напряжений.

Условие разрешимости системы уравнений (2)—(4) дает следующее характеристическое уравнение для определения $\varkappa_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$:

$$[\omega^2\rho^{(m)} - \lambda_2 (k_x^2 - \varkappa_i^2)]\left\{ [\omega^2\rho^{(m)} - (\lambda_1 + 2\lambda_2)(k_x^2 - \varkappa_i^2)](k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa_i^2) + \right.$$

$$\left. + 4\pi\beta_3^2 \frac{\omega^2}{c^2}(k_x^2 - \varkappa_i^2)\right\} = 0. \quad (9)$$

При $\beta_3 = 0$, т. е. в отсутствие пьезоэффекта, уравнение (9) распадается на три уравнения, из которых находим

$$\varkappa_{01}^2 = k_x^2 - \omega^2/v_l^2,$$

$$\varkappa_{02}^2 = k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon,$$

$$\varkappa_{03}^2 = \varkappa_{0t}^2 = k_x^2 - \frac{\omega^2}{v_{\text{tr}}^2}. \quad (10)$$

Здесь

$$v_{\text{tr}}^2 = \frac{\lambda_2}{\rho^{(m)}} = \frac{\lambda_{\text{tr}}}{\rho^{(m)}}, \quad v_l^2 = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{\rho^{(m)}} = \frac{\lambda_l}{\rho^{(m)}},$$

причем $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, а $v_l^2 \geqslant 2v_{\text{tr}}^2$.

При наличии же пьезоэффекта считаем β_3 малой величиной, так что

$$D(\beta_3) = \frac{4\pi\beta_3^2}{\lambda_l}\frac{v_l^2}{c^2}\frac{1}{1 - v_l^2\varepsilon/c^2} << 1. \quad (11)$$

При этом

$$\varkappa_1^2 \approx k_x^2 - \frac{\omega^2}{v_l^2}[1 + D(\beta_3)],$$

$$\varkappa_2^2 \approx k_x^2 - \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}[1 - D(\beta_3)],$$

$$\varkappa_3^2 = \varkappa_t^2 = k_x^2 - \omega^2/v_{tr}^2. \quad (12)$$

Используя граничные условия (5)—(8), получаем дисперсионное уравнение для связанной упругоэлектромагнитной поверхностной волны

$$(k_x^2 + \varkappa_t^2)^2 - 4\varkappa_t\varkappa_1 k_x^2 = D(\beta_3)\frac{\kappa_2}{\kappa_2 + k_x}\left\{\left[\frac{4\kappa_t k_x^2(\kappa_1 + k_x)}{\kappa_1\left(1 - \frac{v_l^2\varepsilon}{c^2}\right)} - \frac{2(k_x^2 + \kappa_t^2)(k_x^2 - \kappa_t^2)k_x}{\kappa_1\kappa_2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{4\kappa_t k_x^2(k_x^2 - \kappa_t^2)}{k_x^2 + \kappa_t^2}\right](\varkappa_2 - \varkappa_1) + 2(k_x^2 - \varkappa_t^2)^2\left\{\left(1 - \frac{v_l^2\varepsilon}{c^2}\right)\right\}\right\}. \quad (13)$$

3. Из уравнения (13) при $\beta_3 = 0$ получаем известное дисперсионное уравнение для волны Рэлея, решение которого можно записать в виде [3]

$$\omega_0 = k_x v_{\text{tr}}\xi_0, \quad (14)$$

где $\xi_0 < 1$. Полагая $\xi_0 = 1 - x$, в пределе $x << 1$ находим

$$x = \frac{1}{8[3 - 4(v_{\text{tr}}^2/v_l^2]}. \quad (15)$$

При этом

$$\varkappa_{0t}^2 \approx 2k_x^2 x < k_x^2. \tag{16}$$

Минимальное значение поперечного коэффициента затухания волны (а соответственно максимальные значения $\varkappa_{01} = \varkappa_l$, $\varkappa_{02}$ и ω_0) достигается в среде с

$$\lambda_1 \gg 2\lambda_2. \tag{17}$$

В такой среде $v_{tr}^2 \ll v_l^2$ и

$$x_{\min}^2 = \frac{1}{24}, \quad \omega_{0\max} = \frac{23}{24} k_x v_{\mathrm{tr}},$$

$$(\varkappa_{0t}^2)_{\min} = \frac{k_x^2}{12}, \quad (\varkappa_l^2)_{\max} \approx (\varkappa_{02}^2)_{\max} \approx k_x^2. \tag{18}$$

Если в среде выполняется обратное условие

$$\lambda_1 \ll 2\lambda_2, \tag{19}$$

получаем

$$\left(\frac{v_{\mathrm{tr}}^2}{v_l^2}\right)_{\max} = \frac{1}{2}, \quad x_{\max} = \frac{1}{8}, \quad \omega_{0\min} = \frac{7}{8} k_x v_{\mathrm{tr}}, \quad (\varkappa_{0t}^2)_{\max} \approx \frac{k_x^2}{4},$$

$$(\varkappa_l^2)_{\min} \approx \frac{5}{8} k_x^2, \quad \varkappa_{02}^2 = k_x^2 \left(1 - \frac{49}{64} \frac{v_{\mathrm{tr}}^2 \varepsilon}{c^2}\right) \approx k_x^2. \tag{20}$$

4. При наличии пьезоэффекта ($\beta_3 \neq 0$) в уравнении (13) правая часть отлична от нуля. Решение вновь ищем в виде

$$\omega = k_x v_{\mathrm{tr}} \xi, \tag{21}$$

где $\xi = \xi_0 + \delta$, $\delta \ll \xi_0$. Разлагая левую часть уравнения (13) по степеням малого параметра δ, находим

$$\delta = D(\beta_3)\, \xi_0 \alpha(\xi_0), \tag{22}$$

где $|\alpha(\xi_0)| \ll 1$ в общем случае довольно сложно зависит от ξ_0. При $v_l^2 \varepsilon / c^2 \ll 1$ с учетом $\xi_0 \leq 1$ эта зависимость упрощается и принимает вид

$$\alpha(\xi_0) \approx -\frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{2\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_{\mathrm{tr}}^2}{v_l^2}\right)\xi_0^2}} \left[\frac{\xi_0^2}{2}\left(1 + \frac{v_{\mathrm{tr}}^2}{v_l^2}\right) - \frac{v_{\mathrm{tr}}^2}{v_l^2}\right] \approx$$

$$\approx -\begin{cases} \dfrac{\xi_0^2\sqrt{1-\xi_0^2}}{4} \approx 0.07, & \lambda_1 \gg 2\lambda_2, \\ \dfrac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{4\sqrt{1-\xi_0^2/2}}\left(\dfrac{3}{2}\xi_0^2 - 1\right) \approx 0.022, & \lambda_1 \ll 2\lambda_2. \end{cases} \tag{23}$$

Если же выполняется условие $1 - v_l^2 \varepsilon(\omega)/c^2 \ll 1$ (осуществление которого для реальных сред весьма трудно), то $\alpha(\xi_0)$ не является бесконечно малой величиной лишь при $\lambda_1 \ll 2\lambda_2$. В этом случае

$$\alpha(\xi_0) \approx -(1 - \xi_0) = -0.125. \tag{24}$$

Соответственно

$$\varkappa_t^2 = \varkappa_{0t}^2 - 2k_x^2\delta ,$$

$$\varkappa_1^2 = k_x^2 \left\{ 1 - \frac{v_{tr}^2}{v_l^2} \left(1 - \frac{\kappa_{0t}^2}{k_x^2} + 2\delta \right) [1 + D(\beta_3)] \right\} , \tag{25}$$

$$\varkappa_2^2 = k_x^2 \left\{ 1 - \frac{v_{tr}^2 \varepsilon}{c^2} \left(1 - \frac{\kappa_{0t}^2}{k_x^2} + 2\delta \right) [1 - D(\beta_3)] \right\} .$$

Для частоты связанной упругоэлектромагнитной волны окончательно находим

$$\omega \approx k_x v_{tr} \xi_0 \, [1 + D(\beta_3) \, \alpha(\xi_0)] \leq \omega_0 . \tag{26}$$

Таким образом, полученный спектр частот мало отличается от спектра частот волны Рэлея. Это означает, что пьезоэффект, хотя и связывает электромагнитную объемную H-волну с поверхностной упругой волной Рэлея и тем самым превращает ее в поверхностную упругоэлектромагнитную волну, не изменяет характера волны. Следует отметить, что этот эффект является также и релятивистским. Именно релятивизм приводит к малой модификации спектра волн Рэлея. Как видно из (11), при $c \longrightarrow \infty$ $D(\beta_3) \longrightarrow 0$ и полученный спектр (26) в точности совпадает с релеевским.

Список литературы

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.

[2] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Колебания и волны в плазменных средах. М.: Изд-во МГУ, 1990. 272 с.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

Институт общей физики
РАН
Москва

Поступило в Редакцию
4 февраля 1991 г.
В окончательной редакции
14 октября 1991 г.