1992 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 34, № 3
1992 SOLID STATE PHYSICS Vol. 34, N 3

УДК 537.312.8

ВЛИЯНИЕ МЕЖДОЛИННОГО РАССЕЯНИЯ НОСИТЕЛЕЙ НА ПРОДОЛЬНУЮ МАГНИТОПРОВОДИМОСТЬ МНОГОДОЛИННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. А. Козлов, А. Н. Коршак

Изучено влияние междолинного рассеяния носителей в многодолинных анизотропных материалах на продольную магнитопроводимость в малом магнитном поле. Установлено, что в многодолинном полупроводнике с эквивалентными долинами диффузионный размерный эффект наблюдается только в направлениях, совпадающих с направлениями симметрии кристалла, когда диффузионные длины, соответствующие нескольким различным группам носителей, равны между собой. Показано, что в условиях, когда диффузионная длина становится сравнимой с размерами поперечного сечения образца, величина $\Delta\bar{\sigma} = (\Delta\sigma(\mathrm{H}) + \Delta\sigma(-\mathrm{H}))/2$ существенно изменяется. На основе данного факта предложена экспериментальная ситуация для определения диффузионной длины.

Исследование размерных и температурных зависимостей кинетических коэффициентов сильно анизотропных многодолинных материалов выявило ряд закономерностей, принципиально отличных от тех, которые имеют место в классических металлических пленках [1–4]. В частности, оказалось, что размерный эффект имеет место в проводимости не только на длине пробега относительно внутридолинного рассеяния, но и на так называемой диффузионной длине L, характеризующей масштаб спадания неравновесных концентраций от поверхности кристалла [1]. Поскольку расстояние в импульсном пространстве между эквивалентными долинами, например, в висмуте или в его соединениях с сурьмой сравнимо с размерами зоны Бриллюэна, то соответствующие длины пробега относительно междолинного рассеяния в области низких температур могут иметь макроскопические размеры. Последнее обстоятельство позволяет наблюдать диффузионно размерные эффекты (ДРЭ) на достаточно массивных образцах с характерными величинами поперечного сечения порядка 1 см.

В то же время вопрос о величине и температурной зависимости L фактически остается открытым. Так, если обратиться к проводимости, то в указанных условиях соответствующий результат дается формулой

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - K \frac{\operatorname{th}(d/L)}{d/L}\right) . \tag{1}$$

Значение коэффициента K существенно зависит от направления в кристалле и, согласно оценкам В. Я. Кравченко, для висмута не превышает 0.6. Это обстоятельство затрудняет оценку величины L по результатам измерения проводимости. С экспериментальной точки зрения более информативными являются измерения поперечного электрического поля $E_\perp \sim \operatorname{th}(d/L)/d/L$, осуществленные в работе [5]. Здесь удается оценить величину L, однако остается неясным, отвечает она рекомбинационной длине или длине пробега относительно междолинного переброса между эквивалентными электронными эллипсоидами. В то же время оценить эффективность междолинного рассеяния по осцилляционным эффектам, предпринятая в [6], не позволяет установить ее температурную или концентрационную зависимость.

В настоящей работе обращено внимание на иную возможность оценки длины пробега относительно междолинного рассеяния по измерениям продольного магнитосопротивления в слабых полях.

Продольное магнитное поле, откручивая носители от поверхности, ведет к уменьшению влияния ДРЭ, а следовательно, к возрастанию σ. В то же время известно, что проводимость объемных образцов уменьшается в слабом продольном магнитном поле. То, что оба этих эффекта определяются анизотропией, позволяет ожидать существенного изменения зависимости σ(H) при $d \sim L$ и тем самым получить информацию о величине L.

Рассматривается вырожденный многодолинный материал с N эквивалентными электронными долинами, что характерно для полуметаллических сплавов $Bi_{1-x}Sb_x$, в малом продольном магнитном поле. Оразец произвольно вырезан относительно кристаллографических осей и ограничен плоскостями с координатами $x = \pm d$, ось z совпадает с направлением магнитного поля, а направление электрического поля произвольное.

Линеаризованное кинетическое уравнение для носителей можно записать в следующем виде:

$$v_x \frac{\partial g^\alpha}{\partial x} + \frac{eH}{c} v_x \frac{\partial g^\alpha}{\partial p_y} - \frac{eH}{c} v_y \frac{\partial g^\alpha}{\partial p_x} - evE - ev_x E_x + \frac{g^\alpha - g^{-\alpha}}{\tau} + \sum_\beta{}' \frac{g^\alpha - g^{-\beta}}{T_{\alpha\beta}} = 0\,, \qquad (2)$$

где τ — время релаксации при внутридолинном рассеянии (одинаковое для всех долин); $T_{\alpha\beta}$ — время релаксации, отвечающее междолинному рассеянию носителей ($T_{\alpha\beta} = T$, $\forall \alpha \neq \beta$); через $\bar{g}^\alpha$ обозначены средние по соответствующим фермиевским эллипсоидам [2]. Уравнение (2) должно быть дополнено граничными условиями, которые в случае диффузного рассеяния на поверхности имеют вид

$$g^> (\mathrm{v}, -d) = B_1\,, \quad g^< (\mathrm{v}, d) = B_2. \qquad (3)$$

Наличие магнитного поля и вызванной им закрутки электронов требует постановки граничных условий для носителей, компонента скорости v_x которых меняет знак при движении электрона в магнитном поле. Эти условия имеют вид

$$g^> (v_x = +0) = g^< (v_x = -0)\,. \qquad (4)$$

Здесь $g^{\gtrless}$ соответствуют функции распределения для электронов с $v_x \gtrless 0$. Константы B_1, B_2 в свою очередь определяются из условий интегрального баланса потоков на поверхности

$$\langle v_x g^{\gtrless} \rangle^\alpha = - \sum_\beta d_{\alpha\beta} \langle v_x g^{\gtrless} \rangle^\beta\,, \quad \sum_\beta d_{\alpha\beta} = 1\,, \qquad (5)$$

где $d_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\alpha}$ характеризуют долю внутри- и междолинного рассеяния носителей на поверхности.

Для нахождения поперечного поля $E_x(x)$ уравнение (2) следует дополнить уравнением Пуассона, которое можно заменить уравнением квазинейтральности, если длина экранирования много меньше размеров образца

$$\sum_\alpha \bar{g}^\alpha (x) = 0\,. \qquad (6)$$

Формальное решение уравнения (2) с граничными условиями (3), (4) выполним, предполагая $\bar{g}(x)$ и $E_x(x)$ известными. Самосогласование полученного решения с учетом (6) позволит найти все $\bar{g}^a(x)$ и $E_x(x)$.

Представим g в виде, предложенном в [7],

$$g = \varphi + \bar{g} - G, \tag{7}$$

где $G = (\tau N / T)\,\bar{g} = \lambda \bar{g}$. Тогда, учитывая (6), из (2) получим

$$\begin{gathered} v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{eH}{c}(\varepsilon_{11} v_y - \varepsilon_{12} v_x)\frac{\partial \varphi}{\partial v_x} - \frac{eH}{c}(\varepsilon_{12} v_y - \varepsilon_{22} v_x)\frac{\partial \varphi}{\partial v_y} - \frac{eH}{c}(\varepsilon_{13} v_y - \varepsilon_{23} v_x)\frac{\partial \varphi}{\partial v_z} = \\ = -\frac{\varphi}{\tau} + evE + ev_x E_x - (1-\lambda)\, v_x \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}. \end{gathered} \tag{8}$$

При решении уравнения (8) удобно перейти от скоростей v_x, v_y, v_z ($\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{p}$) к скоростям α, β, γ

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ 0 & \bar{\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \sqrt{\Delta \varepsilon_{11}}/\bar{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2}$, $\Delta = \det \hat{\varepsilon}$. Преобразование (9) переводит эллипсоиды в сферы, а полупространство $v_x < 0$ в $\beta < 0$. Тогда

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\varepsilon_{11}} = \varepsilon.$$

Для v_z из (9) легко получить

$$v_z = L_\alpha \alpha + L_\beta \beta + L_\gamma \gamma, \tag{10}$$

где

$$L_\alpha = (\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13})/\bar{\varepsilon}\varepsilon_{11}, \quad L_\beta = \varepsilon_{13}/\varepsilon_{11}, \quad L_\gamma = \sqrt{\Delta \varepsilon_{11}}/\bar{\varepsilon}\varepsilon_{11}.$$

Первые интегралы уравнения (8) запишутся в виде

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 = C_1, \\ \alpha - \omega x = C_2, \\ \gamma = C_3, \end{gathered}$$

$$g = (1-\lambda)\,\bar{g} + \varphi_0 C_4 + \varphi_0 \int \frac{evE + ev_x E_x - (1-\lambda)\, v_x \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial x}}{v_x \varphi_0}\, dx', \tag{11}$$

где

$$\varphi_0^{\mp} = \exp\left(\mp \frac{1}{\omega \tau} \arcsin \frac{C_2 + \omega x}{\sqrt{C_1}}\right), \quad \omega = \frac{eH}{c}\bar{\varepsilon}.$$

В подынтегральном выражении все скорости выражены через C_1, C_2, C_3 из (11) и x. Учитывая граничные условия, получим

$$g_1^{>} = B_1 \frac{\varphi_0^{>}(x)}{\varphi_0^{>}(-d)} + \varphi_0^{>}(x) \int_{-d}^{x} \frac{e\tau v E + e\tau v_x E_x + (1-\lambda)\bar{g}}{\tau v_x \varphi_0^{>}(x')} dx' ,$$

$$g_1^{<} = B_1 e^{-\pi/\omega\tau} \frac{\varphi_0^{<}(x)}{\varphi_0^{>}(-d)} + \varphi_0^{<}(x) \int_{(\sqrt{C_1}-C_2)/\omega}^{x} \frac{e\tau v E + e\tau v_x E_x + (1-\lambda)\bar{g}}{\tau v_x \varphi_0^{<}(x')} dx' +$$

$$+ e^{-\pi/\omega\tau} \varphi_0^{<}(x) \int_{-d}^{(\sqrt{C_1}-C_2)/\omega} \frac{e\tau v E + e\tau v_x E_x + (1-\lambda)\bar{g}}{\tau v_x \varphi_0^{>}(x')} dx' ,$$

$$g_2^{<} = B_2 \frac{\varphi_0^{<}(x)}{\varphi_0^{<}(d)} + \varphi_0^{<}(x) \int_{d}^{x} \frac{e\tau v E + e\tau v_x E_x + (1-\lambda)\bar{g}}{\tau v_x \varphi_0^{<}(x')} dx' ,$$

$$g_2^{>} = B_2 e^{-\pi/\omega\tau} \frac{\varphi_0^{>}(x)}{\varphi_0^{<}(d)} + \varphi_0^{>}(x) \int_{(-\sqrt{C_1}-C_2)/\omega}^{x} \frac{e\tau v E + e\tau v_x E_x + (1-\lambda)\bar{g}}{\tau v_x \varphi_0^{>}(x')} dx' +$$

$$+ e^{-\pi/\omega\tau} + \varphi_0^{>}(x) \int_{d}^{(-\sqrt{C_1}-C_2)/\omega} \frac{e\tau v E + e\tau v_x E_x + (1-\lambda)\bar{g}}{\tau v_x \varphi_0^{<}(x')} dx' . \quad (12)$$

Здесь все интегралы понимаются в указанном выше смысле. Для области определения функций $g_{1,2}^{\gtrless}$ из (12) имеем

$$W_1^{>} : \left\{ -d < x < -d + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{\omega} \right\} ,$$

$$W_1^{<} : \left\{ -d < x < -d + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{\omega} \right\} \cap \left\{ -d < x < d - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\omega} \right\} ,$$

$$W_2^{<} : \left\{ d - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\omega} < x < d \right\} ,$$

$$W_2^{>} : \left\{ d - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\omega} < x < d \right\} \cap \left\{ -d + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{\omega} < x < d \right\} . \quad (13)$$

При решении (8) $\bar{g}^{\alpha}$ и E_x считались известными. Теперь необходимо самосогласовать решение (12), потребовав, чтобы среднее от g, даваемого выражениями (12), фактически равнялось $\bar{g}$. Раскладывая известные функции в ряд по степеням ω при $\omega\tau \ll 1$ и усредняя по соответствующим фермиевским эллипсоидам, получим интегральное уравнение, которое из-за громоздкости здесь не приводим. Это уравнение можно решить методом преобразования Фурье. При этом важно заметить, что, так как оно содержит функции с особенностями при $x = d$, $x = -d$ [2], полученное решение будет справедливо во внутренней области пластины. Приповерхностные слои толщиной порядка 1 для толстых пластин $d \gg 1$ не окажут существенного влияния на проводимость и поперечное поле, измеряемое в эксперименте. В указанной области решение можно представить в виде

$$\bar{g}^{i}(x) = A_{+}^{i} \exp\left(-+\frac{x}{L^{i}}\right) + A_{-}^{i} \exp\left(--\frac{x}{L^{i}}\right) ,$$

$$E_x = \text{const} , \quad (14)$$

где

$$L^i = l_i \sqrt{(1-\omega_i^2\tau^2)/3\lambda}\,, \quad l_i = \tau\sqrt{2\varepsilon_F\varepsilon_{11}^i}\,.$$

Константы $A_\pm^i$ и E_x выражаются через B_1^i и B_2^i.

Как видно из соотношений (14), $\bar{g}^i(x)$ определяется диффузионной длиной L^i, соответствующей i-й группе носителей. Независимость $\bar{g}^i(x)$ от других диффузионных длин следует из того, что система (2) расщепляется с помощью уравнения квазинейтральности (6). Выражения (14) удовлетворяют уравнению (6) только в двух случаях.

1) Если все L^i, определяемые в (14), различны, т. е. $L^i \neq L^j \ \forall\, i \neq j$, тогда $A^i = 0$.

2) Если существуют долины с одинаковыми L^i, т. е. $\exists \ \ i \neq j:\ L^i = L^j = L$, тогда $\sum_i^{n}{}'' A^i = 0$, где $\sum_i^{n}{}''$ означает суммирование по долинам, для которых $L^i = L$; n — число таких долин.

Случаи «1» и «2» соответствуют различным направлениям оси z в кристалле. Как следует из нашего рассмотрения, ДРЭ может быть обнаружен только в направлениях симметрии, соответствующих второму случаю.

Вообще говоря, в сильно анизотропных материалах необходимо пользоваться тензором времени релаксации. Однако, с точки зрения размерных эффектов, учет анизотропии внутридолинного рассеяния приводит лишь к тому, что в выражениях для длин L_i переопределяются величины $\omega_i^2\tau^2$ и l_i, соответствующие формулы для которых приведены в работе [8].

Константы A^i и E_x определим из соотношений (5), (6). Так как в приповерхностном слое можно пренебречь междолинным рассеянием, то уравнения (5) остаются справедливыми и на границе применимости формулы (14). Тогда, пренебрегая поверхностным междолинным рассеянием и учитывая (6), получим

$$\bar{g}^i = 3eEL\left\{L_\beta^i - \omega_i\tau L_\alpha^i - \frac{1}{n}\sum_j^{n}{}''\,(L_\beta^j - \omega_j\tau L_\alpha^j)\right\}\frac{\operatorname{sh}(x/L)}{\operatorname{ch}(d/L)}\,, \tag{15}$$

$$E_x = -\frac{3E}{N}\sum_i^N (L_\beta^i - \omega_i\tau L_\alpha^i)\,. \tag{16}$$

Используя выражения (15), (16), можно вычислить проводимость по стандартной формуле

$$\sigma = \frac{1}{2d}\int_{-d}^{d} dx \int\!\!\int\!\!\int evg\,\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\,d^3k\,. \tag{17}$$

После соответствующих вычислений для продольной проводимости получим при $d \gg 1$

$$\begin{aligned}\sigma_i = e^2\tau n\varepsilon_{11}^i \Biggl\{ & L_\gamma^{i^2} + \frac{L_\alpha^{i^2} + L_\beta^{i^2}}{1+\omega_i^2\tau^2} - (L_\beta^i + L_\alpha^i\omega_i\tau - L_\beta^i\omega_i^2\tau^2)\times \\ & \times\left(L_\beta^i - \omega_i\tau L_\alpha^i - \frac{1}{n}\sum_j^{n}{}''\,(L_\beta^j - \omega_j\tau L_\alpha^j)\right)\frac{\operatorname{th}(d/L)}{d/L} - \\ & - \frac{1}{N}(L_\beta^i + \omega_i\tau L_\alpha^i - \omega_i^2\tau^2 L_\beta^i)\sum_j^N (L_\beta^j - \omega_j\tau L_\alpha^j)\Biggr\}\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Тогда для суммарной проводимости получим

$$\sigma_\Sigma = \sigma_v (H = 0) + \sigma_b (H = 0) + \Delta\sigma (H) , \tag{19}$$

где

$$\sigma_v (H = 0) = e^2 \tau n \sum_i^N \varepsilon_{33}^i ,$$

$$\sigma_b (H = 0) = - e^2 \tau n \left\{ \varepsilon_{11} \left(\sum_i^{n\ \prime\prime} L_\beta^{i^2} - \frac{1}{n} \left(\sum_i^{n\ \prime\prime} L_\beta^i \right)^2 \right) \frac{\text{th}\,(d/L)}{d/L} + \frac{1}{N} \sum_i^N \varepsilon_{11}^i L_\beta^i \sum_j^N L_\beta^j \right\} .$$

$$\Delta\sigma (H) = - e^2 \tau n \left\{ \varepsilon_{11} \omega^2 \tau^2 \left[\sum_i^{n\ \prime\prime} (L_\beta^{i^2} + L_\alpha^{i^2}) - \frac{1}{n} \left(\sum_i^{n\ \prime\prime} L_\beta^{i^2} \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_i^{n\ \prime\prime} L_\alpha^i \right)^2 \right] \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\text{th}\,(d/L)}{d/L} + \left[\sum_i^N \omega_i^2 \tau^2 \varepsilon_{11}^i (L_\beta^{i^2} + L_\alpha^{i^2}) - \frac{1}{N} \left(\sum_i^N \omega_i^2 \tau^2 \varepsilon_{11}^i \left(L_\alpha^i \sum_j^N L_\alpha^j + L_\beta^i \sum_j^N L_\beta^j \right) \right) \right] \right\} .$$

Формула (19) записана для магнитопроводимости толстой ($d \gg l$) пленки с учетом междолинного рассеяния носителей. Здесь опущены привычные фуксовские слагаемые, так как при наличии ДРЭ они заведомо меньше оставленных членов. Рассмотрим несколько случаев.

1) Все междолинные длины L^i, определяемые в (14), одинаковы $L^i = L$, т. е. $\varepsilon_{11}^i = \varepsilon_{11}$, $\omega_i = \omega$. Для сплавов $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ эти условия выполняются, когда ось C_3 направлена вдоль нормали к поверхности, по оси x. Тогда, как видно из (19), в проводимости σ_Σ имеет место размерный эффект на длине L. Усреднение результата по формуле $\Delta\bar{\sigma} = (\Delta\sigma (H) + \Delta\sigma (-H))/2$ позволяет исключить из рассмотрения umkehreffect. Тогда размерная зависимость $\Delta\bar{\sigma}$ определяется величиной

$$\delta \backsim - 1 + k \frac{\text{th}\,(d/L)}{d/L} , \quad k = 1 . \tag{20}$$

Таким образом, при изменении d/L, чего можно добиться как путем варьирования L, так и d, δ меняется в пределах $-1 < \delta < 0$. Столь существенное изменение $\Delta\bar{\sigma}$ при $d \sim L$ позволяет в независимом эксперименте измерять междолинное время релаксации.

2) Пусть не для всех долин выполнено равенство $L^i = L$, но существуют по крайней мере две долины, для которых $L^i = L^j = L$. Для сплавов висмута с сурьмой это означает, что или ось C_1, или оси C_2 лежит в плоскости XOZ. Тогда выводы относительно размерного эффекта в σ_Σ и $\Delta\bar{\sigma}$ остаются справедливыми, однако изменение этих величин при $d \sim L$ будет меньше, чем в случае «1», так как в формуле (20) $k < 1$.

3) Если все L^i разные, то ДРЭ отсутствует и формула (19) отвечает проводимости бесконечного образца.

Таким образом, междолинное рассеяние носителей существенно влияет на проводимость многодолинных полупроводников только в тех направлениях, когда диффузионные длины двух или более долин равны между собой.

В заключение отметим, что в изложенном подходе не требуется конкретизации механизма междолинного рассеяния. Поэтому предложенная экспериментальная ситуация может быть осуществлена как в особо чистых монокристаллах висмута, так и его сплавах с сурьмой.

Список литературы

[1] Рашба Э. И. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. № 5. С. 1427—1432.
[2] Рашба Э. И., Грибников З. С., Кравченко В. Я. // УФН. 1976. Т. 119. № 1. С. 1—47.
[3] Межов-Деглин Л. П. // Автореф. докт. дис. Черноголовка, ИФТТ, 1981.
[4] Козлов В. А., Сахаров К. А. // ФТТ. 1989. Т. 31. № 1. С. 235—242.
[5] Жиляев И. Н., Межов-Деглин Л. П. // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. № 3. С. 971—982.
[6] Киракозова Л. А., Минина Н. Я., Савин А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. № 1. С. 693—696.
[7] Кравченко В. Я., Рашба Э. И. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. № 5. С. 1713—1727.
[8] Козлов В. А., Сахаров К. А. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 4. С. 1150—1154.

Московский
физико-технический институт

Поступило в Редакцию
13 марта 1991 г.
В окончательной редакции
31 октября 1991 г.