

УДК 541.64 : 539.3

© 1992

## УПРУГИЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛОВ И ДИНАМИКА ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А. С. Баланкин

Построена теория упругости и энтропийной высокоэластичности фракталов. Установлены соотношения между параметрами упругости самоподобных структур и твердых тел произвольной размерности. Продемонстрировано хорошее согласие аналитических расчетов с результатами численного моделирования упругости перколяционных сеток и с экспериментальными исследованиями упругости аэрогелей и эластоматериалов. Показано, что эффект поперечных деформаций обуславливает масштабную инвариантность неоднородных деформаций и напряжений в деформируемом твердом теле. Это проявляется в самоподобии конфигураций трещин, образуемых при хрупком разрушении модельных решеток и твердых тел. Выведены аналитические соотношения для расчета фрактальной размерности трещин в различных моделях хрупкого разрушения твердых тел. Теоретические оценки фрактальной размерности трещин хорошо согласуются с результатами, полученными при численном моделировании разрушения упругих решеток.

В последнее десятилетие осознан факт существенного, часто определяющего влияния топологии на физические свойства и характер поведения различных объектов [1-5]. Это, в частности, нашло отражение в выделении особого класса объектов, получивших название фракталов, хаусдорфова размерность  $d_H$  которых превышает их топологическую размерность  $d_T$  и может иметь как целое, так и дробное значение [2]. Фундаментальным свойством, принципиально отличающим фракталы от однородных евклидовых структур, является масштабная инвариантность (самоподобие) фракталов. Природные (естественные) фракталы, такие как коллоидные агрегаты, аэрогели, полимеры, дендридные частицы, поровое пространство и трещины в твердых телах, в отличие от регулярных фракталов (множества Кантора, фигуры Коха и т. п.) обладают лишь статистическим самоподобием в ограниченном интервале пространственных масштабов  $L_0 < L < < L_m$  [2-5]. Большинство из них можно рассматривать как совокупность взвешенных с различными весами фракталов разной размерности. Такие объекты получили название мультифракталов и характеризуются спектром размерностей Реньи  $d_q$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$  [3].

Учитывая единство законов, управляющих динамикой нелинейных систем, и взаимосвязь размерности фазовых траекторий с показателями устойчивости Ляпунова [5,6], очевиден растущий интерес к вопросам динамики фракталов и фрактальной динамики деформируемых сред [7-21]. Среди них можно особо выделить вопросы упругости самоподобных структур, тесно связанные с проблемой высокоэластичности полимеров [8, 22-24], и вопросы фрактальной динамики разрушения твердых тел [9, 10, 13, 16-21]. Последовательному рассмотрению этих вопросов и посвящена настоящая работа.

В большинстве работ, посвященных упругости фракталов, упругое поведение самоподобных структур исследуется методами численного моделирования [11, 12, 25, 26]. При этом обычно рассматривают два предельных случая изотропных и центральных сил упругости [26]. Было показано [25], что задачи об упругости полимерных сеток в рассматриваемых пределах принадлежат к двум разным классам универсальности. Кроме того, численные эксперименты [11, 12] показали, что для упругих хаотических перколяционных сеток на плоскости ( $d=2$ ), размер которых  $L < 0.2\xi_c$  ( $\xi_c$  — радиус корреляции), характерны отрицательные значения коэффициента Пуассона  $\nu$ , а для сеток размером  $L > 0.2\xi_c$  коэффициент  $\nu > 0$ , причем предельные значения  $\nu$  при  $L/\xi_c \rightarrow 0$  и при  $L/\xi_c \rightarrow \infty$  универсальны (табл. 1), т. е. не зависят от соотношения локальных параметров упругости, используемых при численных расчетах упругих свойств хаотических перколяционных сеток.

В основе другого подхода к моделированию упругого поведения самоподобных структур лежит классическое представление об энтропийной природе упругости эластоматериалов [8]. Классическая теория энтропийной высокоэластичности полимеров [22–24] основана на предположении о Гауссовой статистике полимерных цепей. При деформации самоподобных структур, подчиняющихся статистике Гаусса, в  $d$ -пространстве зависимость изменения энтропии от кратности деформации  $\lambda_i = L_i/l_i$  имеет вид [24]

$$\Delta S = CT \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 - d \right), \quad (1)$$

где  $T$  — температура, а  $C$  — константа, определяемая топологическими особенностями структуры. Как будет показано ниже, статистике Гаусса подчиняются лишь фракталы, информационная размерность которых равна 2 ( $d_f = 2$ ), что и обуславливает качественное расхождение предсказаний классической теории высокоэластичности с экспериментом [24, 27].

Кроме отмеченных подходов в литературе неоднократно отмечалась аналогия между упругим поведением самоподобных структур и случайной пружины, размеры которой превышают некоторый определенный масштаб длины [22]. На основе этой аналогии была предложена [8] эвристическая картина упругой деформации фракталов, согласно которой под действием силы  $F$  деформация фрактала происходит лишь на масштабах, превышающих характерный масштаб длины  $L_F$ , зависящий от  $F$ . Таким образом, под действием внешней силы  $F$  в упругодеформируемом фрактале возникает новый характерный масштаб длины [8]. Ниже эта картина используется при построении теории упругости фракталов, аналогичной теории упругости твердого тела.

Как известно, в основе классической теории упругости лежат два экспериментально установленных факта [28].

1. Закон Гука, согласно которому относительная деформация  $\epsilon_{||}$  пропорциональна действующему напряжению  $\sigma_{||}$ .

2. Закон Пуассона, постулирующий эффект поперечных деформаций  $\epsilon_{\perp}^i = -\nu \epsilon_{||}$  в отсутствие соответствующих напряжений ( $\sigma_{\perp}^i = 0$ ).

Для построения теории упругости фракталов мы также постулируем два утверждения.

1) При деформации упругоизотропного фрактала под действием внешней силы  $F$  возникает единственный новый характерный масштаб длины  $L_F$ , причем

$$F = \frac{\partial U}{\partial L_F} - T \frac{\partial S}{\partial L_F}, \quad (2)$$

где первый член связан с энергетической, а второй — с энтропийной составляющими упругости фрактала.

2) При упругой деформации сохраняется самоподобие упругоизотропного фрактала, т. е. закон изменения плотности  $\rho$  при упругой деформации подобен закону изменения  $\rho$  при геометрическом изменении размеров фрактала:

$$\frac{\rho(F1)}{\rho(F2)} = \left( \frac{L_{F1}}{L_{F2}} \right)^{-\alpha} = \lambda_F^{-\alpha}, \quad \alpha = d - d_c, \quad (3)$$

где  $d_c$  — корреляционная размерность структуры ( $d_c \leq d_H$ ) [3,6].

При одноосной деформации из (3) следует, что изменение размера фрактала в направлении действия силы  $F$ , равное  $\lambda_x = L_x/L_x$ , сопровождается изменением его поперечных размеров в ортогональных направлениях объемлющего  $d$ -пространства  $\lambda_i = L_i/L_i$ ,  $i = y, z, \dots$ , которое связано с  $\lambda_x = \lambda_F$  соотношением

$$\lambda_i = \lambda_{\perp} = \lambda_x^{-\nu} = \lambda_F^{-\nu}, \quad i = 2, 3, \dots, d, \quad (4)$$

причем

$$\alpha = 1 - (d-1)\nu, \quad \text{поэтому } \nu = \frac{d_c}{d-1} - 1. \quad (5)$$

В случае же двухосной деформации фрактала ( $1 \leq d_c \leq 3$ ) в трехмерном пространстве ( $d = 3$ ) из (3) следует, что

$$\lambda_z = \lambda_F^{-\nu}, \quad \lambda_F = (\lambda_x \lambda_y)^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad (6)$$

причем  $\alpha$ ,  $\nu$  и  $d_c$  по-прежнему связаны между собой равенствами (5), которые выполняются и для трехосной деформации фрактала в трехмерном пространстве, когда

$$\lambda_F = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{1/\alpha}, \quad \alpha = d - d_c = 1 - 2\nu \quad (7)$$

и выполняется закон (3),  $\rho \sim \lambda_F^{-\alpha}$ .

Таким образом, при выполнении условий (2), (3) коэффициент поперечной деформации упругоизотропного фрактала однозначно определяется его корреляционной размерностью (5). Как видно из данных, представленных в табл. 1, значения  $\nu$ , рассчитанные по формуле (5), очень хорошо согласуются с результатами, полученными в [11,12] при численном моделировании упругости перколяционных сеток на плоскости ( $d = 2$ ) и с экспериментальным значением  $\nu$  аэрогеля  $\text{SiO}_2$ , полученным в [29] при изучении распространения продольных и поперечных упругих волн.

Из (5) следует, что условие несжимаемости ( $\alpha \equiv 0$ ) выполняется для фракталов, размерность которых совпадает с размерностью объемлющего евклидова пространства  $d_c \equiv d$ , откуда следует, что

Таблица 1

Сравнение теоретических значений  $\nu$ , рассчитанных по формуле (5) с результатами численного моделирования упругости перколяционных деформаций и экспериментальных исследований упругости аэрогелей

	Перколяционные сетки на плоскости ( $d = 2$ ) размером $L$		Аэрогель SiO <sub>2</sub>
	$L/\xi_c \rightarrow \infty$	$L/\xi_c \rightarrow 0$	
$d_c$	$1.1 \pm 0.02$ [26] <sup>1</sup>	$0.67$ [26] <sup>2</sup>	$2.3 \pm 0.1^3$
$\nu$ , расчет по (5)	$0.1 \pm 0.01$	$-0.33$	$0.15 \pm 0.05$
$\nu$ , численные и экспериментальные значения	$0.08 \pm 0.04$ [11]	$-1/3$ [11]	$0.12 \pm 0.08$ [29]

<sup>1</sup> В пределе  $L \gg \xi_c$  упругость перколяционной сетки определяется недублированными связями, поэтому размерность упругих связей в пределе  $L \gg \xi_c \rightarrow \infty$  совпадает с размерностью геодезической  $D_R$ .

<sup>2</sup> В пределе  $L \ll \xi_c$  (но  $L \gg 1$ ) связи многократно дублированы и  $d_c$  совпадает с размерностью случайных блужданий  $D_W$ .

<sup>3</sup> По данным порометрии [30] и малоуглового рассеяния нейтронов [31].

$$\nu_m = \frac{1}{d-1}. \quad (8)$$

Легко видеть, что при  $d=2$  и 3 второе равенство (8) тождественно условиям несжимаемости двух- ( $\nu_m = 1$ ) и трехмерного ( $\nu_m = 0.5$ ) упругоизотропного твердого тела, полученным в классической теории упругости.

Используя линейную связь энтропии с информацией [5, 22] и определение информационной размерности  $d_f$  самоподобных структур [3-6], изменение энтропии при упругой деформации фрактала в  $d$ -мерном пространстве при выполнении закона (3) можно представить в виде

$$\Delta S = -C \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i^{d_f} - d \right), \quad (9)$$

где параметр  $C$  не зависит от  $\lambda_i$  и может быть определен, например, в рамках подхода [32].

Для регулярных фракталов

$$d_f = d_c = d_n = d_f, \quad (10)$$

где  $d_f$  — фрактальная размерность [3]. В этом случае, положив, что при одноосной деформации  $U = C_2 \lambda_1^\beta$ , где  $C_2, \beta = \text{const}$ , и учитывая, что при  $\lambda_i = 1$  должно выполняться условие  $F \equiv 0$ , из (2)—(5) получаем

$$F = C_2 \left\{ \lambda_1^{d_f-1} - [d_f - (d-1)] \lambda_1^{-\nu d_f-1} - (d-d_f) \lambda_1^{\alpha-1} \right\}. \quad (11)$$

Истинное напряжение  $\sigma_1$  связано с  $F$  соотношением

$$\sigma_1 = F \lambda_1^{1-\alpha} = C_2 \left\{ \lambda_1^{2d_f-1} - [d_f - (d-1)] \lambda_1^{d_f(1+\nu)-d} - (d-d_f) \right\}, \quad (12)$$

учитывающим изменение площади  $(d-1)$ -мерного сечения деформируемого фрактала в плоскости (гиперплоскости) ортогональной к направлению силы  $F$ .

Аналогично, используя (2)—(12), можно получить зависимости  $\sigma_i$  ( $\lambda_j$ ) для  $n$ -осной деформации  $n$ -мерного фрактала в  $d$ -пространстве. Легко видеть, что в

пределе бесконечно малых деформаций  $|\varepsilon_i| = |\lambda_i - 1| \ll 1$  эти соотношения можно представить в форме классической записи обобщенного закона Гука для  $d$ -мерного твердого тела

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} \left( \sigma_i - \nu \sum_{j \neq i} \sigma_j \right). \quad (13)$$

Это позволяет найти соотношения между модулями упругости (Юнга  $E$ , сдвига  $G$ , объемной  $B$  и продольной  $C_{11}$  упругости и коэффициентами Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu \equiv G$ ) фракталов, вывод которых аналогичен выводу [28] соответствующих соотношений в теории упругости твердого тела,

$$B = \frac{E}{d(d-d_f)}, \quad C_{11} = \frac{2 + 2(d-2)(d-d_f)}{(d-1)(d-d_f)} G, \quad (14a)$$

$$G = \frac{(d-1)}{2d_f} E, \quad \lambda = \frac{[d_f - (d-1)](d-1)}{2(d-d_f)} \mu. \quad (14b)$$

Подставляя в (14) равенство (5) при  $d=2$  и  $3$  получаем выражения, тождественные таковым для двух- и трехмерных упругоизотропных твердых тел.

Здесь следует особо подчеркнуть, что в отличие от поперечной деформации твердых тел, которая, согласно закону Пуассона, происходит при  $\sigma_{\perp} = 0$ , поперечная деформация фракталов, обеспечивающая выполнение закона (3), происходит под действием соответствующих напряжений, возникающих благодаря тонкой структуре фрактала, что наглядно можно продемонстрировать, рассматривая упругую деформацию фигур Коха ( $d_f = 1$ ,  $1 < d_f < 2$ ,  $d = 2$ ).

Из последнего равенства (14b) следует, что равенство Коши  $\lambda = \mu$  [33] выполняется для фракталов, размерность которых определяется размерностью объемлющего пространства

$$d_f = \frac{d^2 + 1}{d + 1}. \quad (15)$$

Обратим внимание на совпадение соотношения (15) с выражением для размерности кластеров, образуемых при ограниченной диффузией агрегации частиц в  $d$ -пространстве, которое было выведено авторами [34] в приближении среднего поля. Тот факт, что к соотношению (15) приводят два совершенно независимых подхода, указывает на то, что оно отражает фундаментальные свойства симметрии самоподобных структур (и на взаимосвязь условий Коши [33] и приближения среднего поля). Подставляя (15) в (5), равенство Коши для фракталов и  $d$ -мерных твердых тел можно записать в форме

$$\nu_d = \frac{2}{d^2 - 1}, \quad (16)$$

откуда при  $d=2$  и  $3$  следуют известные равенства для упругоизотропных твердых тел при выполнении условий Коши  $\nu_2 = 2/3$  и  $\nu_3 = 1/4$  [33].

## 2. Фрактальная теория высокоэластичности полимеров

Экспериментальные данные по деформации эластоматериалов обычно интерпретируются в рамках энтропийной теории высокоэластичности [22-24], постро-

енной на основе предположений о несжимаемости ( $\nu = 0.5$ ) высокоэластичных полимеров и Гауссовой статистике полимерных цепей. Как известно [32], Гауссова статистика характерна только для сеток, приготовленных сшиванием концентрированного раствора цепей, в случае их сжатия или слабого ( $\lambda < 1.2$ ) растяжения. Для таких структур  $d_f = 2$  и общее соотношение (9) переходит в (1), откуда в случае  $\nu = 0.5$  следует классическое выражение [24]

$$F_1 = \frac{E}{3} (\lambda_1 - \lambda_1^{-2}), \quad (17)$$

где  $E$  — модуль Юнга, пропорциональный температуре, выражения которого через параметры структуры полимера многократно уточнялись [22–24, 30]. Расчеты по формуле (17) с подогнанным значением  $E$  неплохо согласуются с экспериментом лишь в области сравнительно малых деформаций ( $\lambda_i < 1.2$ ). При  $1.2 \leq \lambda_1 \leq 2$  график зависимости (17), как правило, лежит выше, а при  $\lambda_1 > 2$  — существенно ниже экспериментальной кривой  $F_1(\lambda_1)$ , которая при  $\lambda_1 > 4$  обычно выходит на асимптотику  $F_1 \sim \lambda_1^2$  [27].

Традиционно уточнение зависимости (17) осуществляли путем феноменологических модификаций энтропийной теории, основные достижения которых обобщены в [24, 35]. При этом требуемая точность согласования расчетов с экспериментом достигается благодаря использованию дополнительных параметров согласования, являющихся, по сути, подгоночными [24, 27]. Это лишает энтропийную теорию высокоэластичности основного преимущества над подходом [36], основанном на использовании эмпирических зависимостей упругого потенциала от инвариантов деформации и температуры, который при достаточном числе подгоночных параметров согласования обеспечивает любую наперед заданную точность аппроксимации экспериментальных данных. Помимо большого числа и не всегда ясного физического смысла параметров согласования [24, 27] основным недостатком как феноменологических модификаций энтропийной теории, так и эмпирических моделей упругого потенциала является необходимость использования разных значений одного и того же параметра упругости, например  $E$ , как для описания экспериментальных данных, полученных при разных условиях нагружения, так и для описания одних и тех же данных, но в рамках различных модификаций энтропийной теории или упругого потенциала [24, 27]. Это обуславливает неопределенность как абсолютных значений параметров упругости, так и соотношений между ними, которые не удовлетворяют равенствам (14) даже в пределе бесконечно малых деформаций.

Поскольку для самоподобных структур всегда  $d_c \leq d_f$  [3], то из (8) и (9) следует, что отмеченные недостатки энтропийной теории высокоэластичности обусловлены противоречием между двумя основными положениями классической теории: 1) о Гауссовой статистике полимерных цепей, справедливой для структур, информационная размерность которых равна 2:  $d_f = 2$ ; 2) о несжимаемости эластоматериалов, которое, согласно (8), выполняется при условии  $d_c = d = 3 = d_f$ .

Первое предположение справедливо для длинных полимерных цепей и сеток, приготовленных сшиванием концентрированного раствора цепей ( $d_c = 1$ ,  $d_f = 2$ ,  $d = 3$ ) [23, 24], коэффициент Пуассона которых, согласно (5), равен 0 ( $\nu = 0$ ), что означает неизменность поперечных размеров в объемлющем пространстве при одноосной деформации цепи. Это легко представить, рассматривая растяжение сильно запутанной недеформируемой нити ( $d_f = 1$ ,  $d_n = 2$ ,  $d = 3$ ). Подставляя  $d_f = 2$  и  $\nu = 0$  в (11), получаем

$$F = E (\lambda_1 - 1), \quad (18)$$

что совпадает с классическим результатом [23, 24] для длинной полимерной цепи.

Сетки, набухшие в хорошем растворителе, существенно негауссовы [32], поскольку размерность структуры реальных полимеров, образуемой взаимо-

Рис. 1. Зависимости  $F(\lambda_1)$  при одноосном растяжении каучука.

1 — расчет по формуле (20) при  $E=0.192$  МПа и  $\nu=0.48$ ; 2 — расчет по формуле (21) при  $E=0.2$  МПа; 3 — расчет по формуле (17) при  $E=0.4$  МПа; 4 — экспериментальные данные из [27].

проникающими блоками [22, 23], лежит в пределах  $2 < d_n < 3$ , причем в общем случае [3]

$$1 \leq d_q \leq d_{q-1} \leq \dots \leq d_2 = d_c \leq d_1 = (19) \\ = d_f \leq d_0 = d_f \leq 3.$$

Принимая в первом приближении  $d_c = d_1 = d_f$  и подставляя (5) в (11), получаем соотношение, связывающее условное напряжение  $F$  с кратностью деформации  $\lambda_1$  при одноосном растяжении (сжатии) эластоматериалов

$$F = \frac{E}{1 + 2\nu + 4\nu^3} \left\{ \lambda_1^{1+2\nu} - 2\nu\lambda_1^{-1-2\nu(1+\nu)} - (1-2\nu)\lambda_1^{-2\nu} \right\}, \quad (20)$$

которое отличается от классического выражения (17) даже в пределе  $\nu = 0.5$ , когда (20) переходит в зависимость

$$F = \frac{E}{2.5} \left\{ \lambda_1^2 - \lambda_1^{-2.5} \right\}, \quad (21)$$

удовлетворяющую асимптотике  $F \sim \lambda_1^2$  при  $\lambda_1 \gg 1$ .

Как видно из графиков на рис. 1, расчет по формуле (20) хорошо согласуется с экспериментом вплоть до  $\lambda_1 \approx 7$ , когда в деформируемом материале образуются трещины и эффективное значение коэффициента поперечных деформаций (17) становится  $> 0.5$  ( $\varepsilon$  — деформация ползучести,  $t$  — время эксперимента).

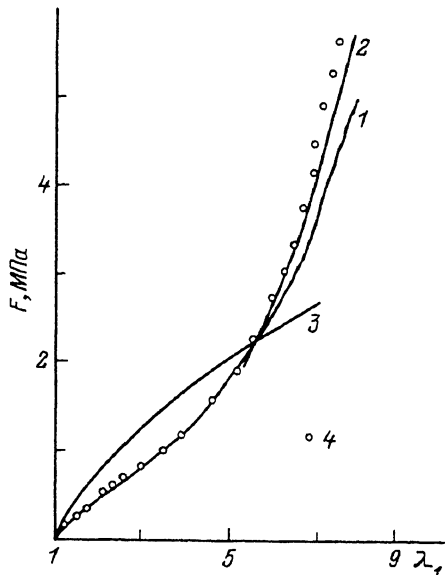
Рассмотренный подход может быть обобщен и на случай мультифрактальной структуры полимера, когда  $d_c < d_f < d_f$  [3]. При этом, как следует из (2) — (11), для упругоизотропных эластоматериалов должно выполняться равенство

$$d_f (d - d_f) = d_c (d - d_c). \quad (22)$$

В более общем случае самоаффинной структуры [37] при деформации возможно появление двух и более независимых характерных масштаба длины  $L_F$ , и деформируемый полимер становится существенно анизотропным.

### 3. Эффект поперечных деформаций и фрактальная динамика хрупкого разрушения модельных решеток и твердых тел

Фрактографические исследования показывают [2, 38, 39], что конфигурации трещин и поверхности разрушения твердых тел имеют мультифрактальную структуру, самоподобную в широком диапазоне пространственных масштабов.



Фрактальная размерность трещин, образуемых в стохастической модели разрушения (23), (24) плоских решеток при имитации различных механизмов разрушения, и соответствующие им области изменения параметра  $\omega$  кинетической модели разрушения (31)

$d_f^*$	Значения параметра стохастической модели разрушения (23), (24)				$m = \infty$
	$m < 1$	0.5	1.0	2.0	
Расчет по (26)	2	1.82	1.67	1.44	1.00
Результаты численного моделирования [13] <sup>1</sup>	одноосное растяжение деформация сдвигом	1.9 ± 0.1	1.66 ± 0.05	1.45 ± 0.05	1.00
Механизм разрушения	Расеянное разрушение	1.9 ± 0.1	1.65 ± 0.05	1.40 ± 0.05	1.00
$\omega$	$\omega < 3/8$	Множественное разрушение	Свободное разрушение [60, 21]	Фрактальная трещина Гриффитса (квазихрупкое)	Классическая трещина Гриффитса
		$3/8 < \omega < 1/2$	0.5	$\omega > 0.5$	—

<sup>1</sup> В [13] для каждой конфигурации определены значения  $d_f$  тремя различными способами. Установлено:  $d_0 > d_1 > d_2$ , что указывает на мультифрактальность конфигураций трещин. Здесь приводятся значения  $d_f = d_0$  по [20], что соответствует способу Шв [13].<sup>2</sup> Все расчеты проведены при  $n = 2/3$ , соответствующему случаю равенства коэффициентов Ламэ  $\lambda = \mu$  двумерной решетки.

При этом для различных образцов из одного и того же материала, подвергшихся аналогичной термомеханической обработке, фрактальная размерность поверхности разрушения  $d_f$  имеет вполне определенное значение [2, 9, 38].

Предлагались различные модели разрушения, в которых фронт, поверхность или распределение трещин имеют самоподобную структуру [5, 9, 10, 16–21, 40–45]. В [46] отмечена фундаментальная связь фрактальной геометрии с автомодельностью процессов разрушения.

При моделировании разрушения плоских ( $d = 2$ ) решеток, динамика которых задавалась уравнениями упругости сплошной среды

$$(\lambda + \mu) \partial_i \left( \sum_j \partial_j u_j \right) + \quad (23)$$

$$+ \mu \left( \sum_j \partial_j^2 \right) u_i = 0,$$

где  $u_i$  — компоненты поля деформаций, а  $\partial_i$  — частная производная по  $i$ -й компоненте вектора  $r$ , а пространство трещины после разрыва первой связи правилом, согласно которому вероятность разрыва связи между соседними узлами  $i, j$  пропорциональна  $m$ -й степени действующего на нее напряжения

$$P_{ij} \sim \sigma_{ij}^m, \quad (24)$$

установлено [10, 13, 20], что фрактальная размерность автомодельных конфигураций трещин не зависит от вида нагружения, моделируемого заданием соответствующих граничных условий, и определяется значениями  $\nu$  (рис. 2а) и  $m$  (табл. 2).

Как видно из графика на рис. 2, а, зависимость  $d_f(\nu)$  при  $m = 1$  имеет линейный характер



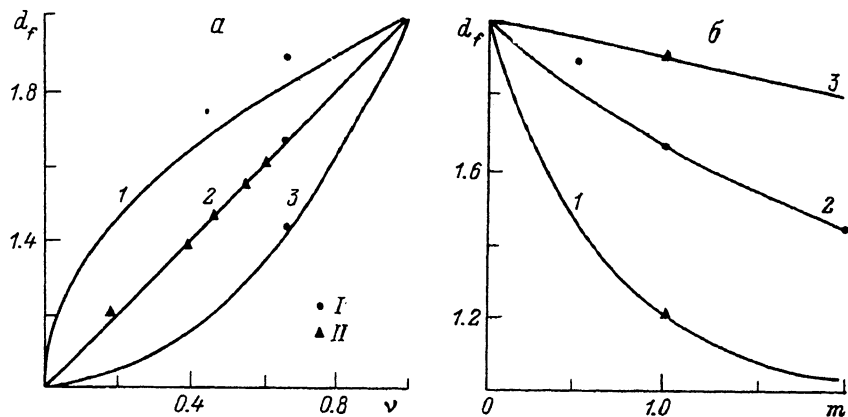


Рис. 2. Фрактальная размерность конфигураций трещин как функция параметров модели (23), (24).  $a - d_f(\nu)$  при  $m = 0.5$  (1), 1 (2), 2 (3);  $b - d_f(m)$  при  $\nu = 0.2$  (1),  $2/3$  (2),  $0.9$  (3). Сплошные линии — расчет по формуле (26), точки — результаты численного моделирования:  $I - [13]$ ,  $II - [20]$ .

и определяется размерностью поля неоднородных деформаций  $d_f = (d - 1)(1 + \nu) = 1 + \nu$  [17, 20]. Легко видеть, что последнее соотношение тождественно формуле (5), выражающей связь между размерностью и коэффициентом Пуассона фракталов. Этот результат является отражением возможности представления уравнений линейной теории упругости (23) при малых  $\epsilon_{ij}$  в форме (3), (4), где роль  $L_F$  играет характерный масштаб неоднородности поля деформаций.

Поскольку вследствие сдвиговой жесткости твердого тела неоднородные флуктуации плотности (как спонтанные — квантовые и тепловые [47], так и индуцированные внешним воздействием, изменением граничных условий [48], или разрывом связей, как в модели (23), (24)) обязательно сопровождаются возникновением сдвиговых напряжений [49], а минимальный масштаб устойчивых неоднородных флуктуаций плотности заметно превышает межатомное расстояние [50], пространственное распределение неоднородных флуктуаций плотности и сдвига в деформируемом твердом теле масштабно инвариантно. Поэтому распределение трещин, образуемых при термофлуктуационном разрушении [47], и конфигурации трещин при адиабатическом разрушении [51, 52] должны иметь самоподобную структуру. Это подтверждается результатами многочисленных исследований [2, 38, 39], что иллюстрируется данными, представленными на рис. 3.

Заметим, что моделирование критических флуктуаций в моделях одномерного гармонического или ангармонического кристалла [55], для которого  $\nu = 0$ , поскольку нет эффекта поперечных деформаций, дает гладкую ( $d_n = d - 1$ ) поверхность разрушения, а рассмотренная в [53] модель невзаимодействующих ангармонических осцилляторов, помещенных в термостат, отвечает противоположному пределу  $\nu = \nu_m$  (8), обеспечивающему постоянство объема деформируемой среды, что приводит к однородности ( $d_n = d$ ) распределения микротрещин по объему образца.

В дилатантной модели разрушения [56] флуктуационный объем  $l_d^3$ , входящий в формулу Журкова для долговечности  $\tau$ , определяется критическим размером дилатона  $l_d$ . Очевидно, что  $l_d$  является естественной нижней границей  $L_0$  самоподобия поверхности разрушения. Сопоставление результатов оценки  $l_d$  [56] с значениями  $L_0$ , полученными при фрактографических исследованиях [2, 38], показывает, что с удовлетворительной точностью можно положить  $L_0 \approx l_d$ .

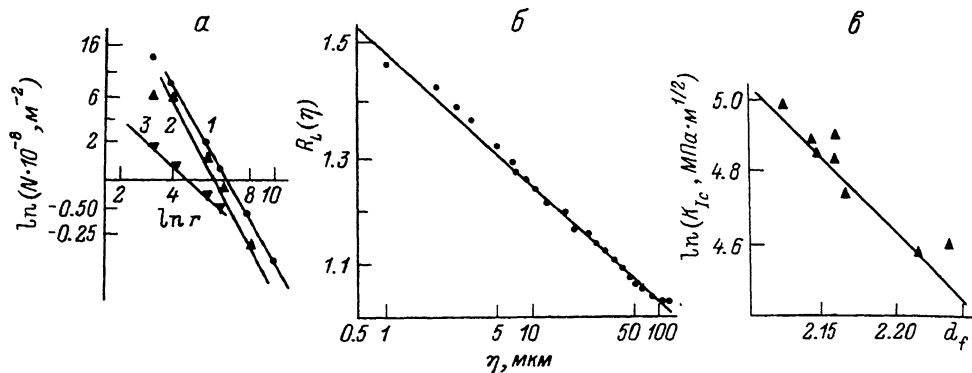


Рис. 3. Распределение числа трещин по размерам при высокотемпературной ползучести стали 304 по данным [33] (а); зависимость шероховатости поверхности разрушения  $R_L$  стального образца, отпущенного при  $700^\circ\text{C}$  от масштаба измерения  $\eta$  [34] при  $d_c = 2.079$ ,  $r = 0.991$  (б); корреляция фрактальной размерности поверхности разрушения  $d_f$  с логарифмом критической интенсивности напряжений для стали 24 SiMnCrNiMo при различных режимах термообработки (по данным [44]) (в).

$1 - \varepsilon = 0.27\%$ ,  $t = 139.3$  ч;  $2 - \varepsilon = 0.20\%$ ,  $t = 76$  ч;  $3 - \varepsilon = 0.13\%$ ,  $t = 33.3$  ч. Значения  $d_c$ , рассчитанные по наклону  $\ln N$  (ч) и  $v_3$  по формуле (25):  $d_c = 2.62 \pm 0.1$  и  $v_3 = 0.31$  (1);  $d_c = 2.55 \pm 0.05$  и  $v_3 = 0.27$  (2);  $d_c = 0.87 \pm 0.1$  и  $v_3 = -0.55$ .

В процессе разрушения эффективное значение коэффициента поперечных деформаций  $\nu_3$  изменяется как за счет накопления повреждений, так и вследствие релаксации напряжений на шероховатой поверхности трещин [10] и при пластической деформации [17, 57]. Это и обуславливает мультифрактальность самоподобных конфигураций трещин, их поверхности и распределения по размерам. При этом фрактальная размерность магистральной трещины (в зависимости от механизма разрушения речь идет о размерности поверхности или конфигурации) определяется эффективным значением  $\nu_3$  и при разрушении трехмерных тел равна [17, 18]

$$d_f = 2(1 + \nu_3), \quad (25)$$

причем  $\nu_3$  является функционалом процесса разрушения [17].

Возвращаясь к стохастической модели разрушения (23), (24), рассмотрим процесс образования трещин при односторонней деформации ( $\varepsilon_{\parallel} = \text{const}$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 0$ ) модельной упругой решетки под действием напряжения  $\sigma_{\parallel}$ . Распространение трещины будем рассматривать как последовательность отображений между состояниями решетки в фазовом пространстве [58]. Поскольку в стохастической модели разрушения трещины заведомо имеют нерегулярную шероховатую поверхность (конфигурацию), то отображение, определяющее распространение трещины, является сжимающим. Это обусловлено диссипацией энергии упругих деформаций на шероховатой поверхности трещины. Диссипация энергии путем релаксации напряжений на разорванных связях в модели (23), (24) была установлена при численном моделировании [10, 13]. Теоретически релаксация напряжений на шероховатой (хотя и не самоподобной) поверхности трещин подробно рассматривалась в работе [59].

Используя результаты работ [45, 59], легко показать, что при распространении трещины в автоматическом режиме доля запасенной телом энергии упругих деформаций, теряемая путем релаксации напряжений на самоподобной поверхности трещины, равна

$\eta = 1 - \kappa^{-\beta}$ , где  $\beta = d_f - (d - 1)$ , т. е.

$$d_f = (d - 1) - \frac{\ln(1 - \eta)}{\ln \kappa},$$

где  $\kappa = L_{i+1}/L_i$  — параметр автомодельности, характеризующий иерархию пространственных масштабов  $L_i$  структурных уровней разрушения [21, 60].

При одноосной деформации в упругой решетке возникают поперечные напряжения  $\sigma_{\perp}^i = \nu \sigma_{\parallel}$ ,  $i = 1, \dots, (d - 1)$  [28]. Согласно распределению (24), при распространении трещины разрыв связей под действием напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle_{\perp}$  происходит в среднем в  $(d - 1)\nu^m$  раз реже, чем под действием напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle_{\parallel}$  (знак (...) означает усреднение по состояниям решетки, которое необходимо, поскольку при распространении трещины происходит перераспределение напряжений на целых связях [10, 13]). Используя выражение фрактальной размерности фазовой траектории через характеристические числа  $\Lambda^+$  и  $\Lambda^-$  сжимающего отображения [61] между состояниями решетки в пространстве «координаты + энергия» [58] и учитывая, что  $\Lambda^+ \Lambda^- \sim (1 - \varepsilon_{\parallel}) (1 + \nu^m \varepsilon_{\parallel})^{d-1} \sim (1 - \varepsilon_{\parallel})^{\alpha}$ , где  $\alpha = 1 - (d - 1)\nu^m$ , получаем выражение для фрактальной размерности самоподобной конфигурации ( $d = 2$ ), или поверхности ( $d = 3$ ) трещин, образуемых в модели (23), (24),

$$d_f = 1 + \nu^m, \quad d_f = 2(1 + \nu^m) \quad (26)$$

при  $d = 2$  и 3 соответственно. Как видно из данных, представленных на рис. 2 и в табл. 2, расчет по формуле (26) очень хорошо согласуется с результатами, полученными при численном моделировании динамики разрушения.

В [17, 45] рассмотрено распространение фрактальной трещины Гриффитса. Было показано, что в окрестности вершины фрактальной Гриффитсовой трещины напряжения характеризуются асимптотическим поведением

$$\sigma \sim r^{-a}, \quad a = \frac{d - d_f}{2}, \quad (27)$$

где  $r$  — расстояние от вершины трещины, а  $d_f$  — фрактальная размерность самоподобной поверхности трещины (25) [17] или размерность фрактальной линии фронта гладкой трещины [45], равная  $d_f = (d - 1)(1 + \nu) - 1$ .

Для определения  $\nu_3$  и  $d_f$  (25) в модели (27) рассмотрим самоподобную трещину Гриффитса в модели (23), (24). В случае  $d = 2$  число связей в решетке размером  $R$  пропорционально  $M \sim R^2$ , а число связей в трещине размером  $R$ , согласно (24), пропорционально  $K = MP(R)$ , где, учитывая (27),  $P \sim \sigma^m \sim R^{-ma}$ , т. е.

$$K \sim R^{2-ma}. \quad (28)$$

С другой стороны, по определению  $K \sim R^{d_f}$ , поэтому, сравнивая (27), (28) и (26), получаем, что в модели (23), (24) распространяется фрактальная трещина Гриффитса (27) при условии

$$m = 2, \quad \text{т. е. } \nu_3 = \nu^2. \quad (29)$$

Это позволяет выразить зависимость коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  от  $R$ , полученные в [45] для  $d = 3$ , в форме

$$K_1 \sim \sigma R \frac{1-2\nu^2}{2}, \quad K_1 \sim \sigma R \frac{1-\nu^2}{2}. \quad (30)$$

Первое из соотношений (30) отвечает распространению трещины с самоподобной поверхностью, а второе — распространению гладкой трещины, фронт которой является фрактальной кривой.

Разрушение можно рассматривать и как процесс кластеризации дефектов [5], который можно описать уравнением Смолуховского [4] для концентрации кластеров  $C_k$  из  $k$  единичных дефектов

$$\frac{dC_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \Phi(j, k-j) C_j C_{k-j} - C_k \sum_j \Phi(j; k) C_j \quad (31)$$

с мультипликативным ядром  $\Phi \sim (i, j)^\omega$  [4]. Хрупкому разрушению, очевидно, отвечает решение с выживанием одного кластера, который присоединяет к себе остальные. Такое решение (31) возможно при  $\omega > 0.5$  [4]. Асимптотика этого решения

$$dR/dN \sim R^\varphi, \quad \varphi = 1 - d_f/z, \quad z^{-1} = 1 - 2\omega$$

имеет вид закона Париса  $dR/dN \sim (K_f)^n$  [38,39], где  $N$  — число циклов нагружения, а  $\omega$  — параметр, определяющий зависимость скорости кластеризации  $\nu \sim R^{2\omega}$ . Подставляя в закон Париса первое соотношение (30) и сравнивая результат с решением (31), получаем

$$n = \frac{2 [1 + 2(1 + \nu^2)(2\omega - 1)]}{1 - 2\nu^2}, \quad (32)$$

откуда следует, что для материалов с близкими значениями  $\omega$  показатель  $n$  растет с увеличением  $\nu$ . Это согласуется с экспериментом [38]. В общем случае при усталостном разрушении модельных упругих решеток

$$n = \frac{m [1 + 2(2\omega - 1)(1 + \nu^m)]}{1 - 2\nu^m}. \quad (33)$$

Из сопоставления моделей (23), (24), (30) и (31) следует, что разным значениям  $m$  соответствуют различные пределы изменения  $\omega$  (см. табл. 2, где приведены значения параметров моделей (23), (24) и (31), соответствующие различным механизмам хрупкого разрушения).

Более подробно вопросы кинетики хрупкого и вязкого разрушения будут рассмотрены в отдельной статье.

Автор выражает благодарность А. Б. Мосолову за ознакомление с результатами работы [45] до ее опубликования и полезные обсуждения настоящей работы, Г. В. Встовскому, обратившему внимание на корреляцию показателя степени  $n$  в законе Париса с размерностью поверхности разрушения, и Е. И. Шемякину за полезные обсуждения вопросов фрактальной механики деформируемого твердого тела.

#### Список литературы

- [1] Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982. 176 с.  
 [2] Mandelbrot B. V. The Fractal Geometry of Nature. San-Francisco: Freeman, 1982. 182 p.

- [3] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 268 с.
- [4] Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 136 с.
- [5] Баланкин А. С. Синергетика деформируемого тела. Ч. 1. М.: МО СССР, 1991. 404 с.
- [6] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [7] Стичком Р. // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 478—487.
- [8] Уэбман И. // Там же. С. 488—497.
- [9] Лунг Ч. // Там же. С. 260—265.
- [10] Луис Э., Гинеа Ф., Флорес Ф. // Там же. С. 244—248.
- [11] Bergman D. J., Duering E. // Phys. Rev. 1986. V. B34. N 11. P. 8199—8201.
- [12] Duering E., Bergman D. J. // Phys. Rev. 1988. V. B37. N 16. P. 9460—9476.
- [13] Meakin P., Li G., Sander L. M., Louis E., Guinea F. // J. Phys. 1989. V. A22. N 9. P. 1393—1403.
- [14] Малышков А. Г. // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. № 2. С. 65—67.
- [15] Дубовский О. А., Орлов А. Б. // ФТТ. 1990. Т. 32. № 6. С. 1613—1621.
- [16] Баланкин А. С. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. № 7. С. 14—20.
- [17] Баланкин А. С., Иванова В. С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 1. С. 32—36.
- [18] Баланкин А. С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 6. С. 84—90.
- [19] Баланкин А. С., Яневич Г. Н. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 7. С. 4—9.
- [20] Баланкин А. С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 11. С. 9—13.
- [21] Баланкин А. С. // ДАН СССР. 1991. Т. 319. № 5. С. 1098—1101.
- [22] Де Жен П. Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982. 368 с.
- [23] Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Статистическая физика макромолекул. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [24] Бартерен Г. М., Френкель С. Я. Физика полимеров. Л.: Химия, 1990. 432 с.
- [25] Feng S., Sen P. N. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. N 3. P. 216—218.
- [26] Соколов И. М. // УФН. 1986. Т. 150. № 2. С. 221—255.
- [27] Гуль В. Е., Кулезнев В. Н. Структура и механические свойства полимеров. М.: Высшая школа, 1979. 353 с.
- [28] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [29] Gronauer M., Kadur A., Fricke J. // Aerogels / Ed. J. Fricke. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 167—170.
- [30] Brinker S. J., Schreier G. W. // J. Non-Cryst. Sol. 1985. V. 70. N 2. P. 301—306.
- [31] Freltoft T., Kjems J. K., Sinka S. K. // Phys. Rev. 1986. V. B33. N 1. P. 269—276.
- [32] Панюков С. В. // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. № 2. С. 668—680.
- [33] Лейбфрид Г. Микроскопическая теория механических тепловых свойств кристаллов. М.: ГФМЛ, 1963. 312 с.
- [34] Muthukumar M. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. N 3. P. 212—214.
- [35] Терновский Ф. Ф., Хохлов А. Р. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. № 4. С. 1249—1264.
- [36] Kawabata S., Matsuda M., Tei K., Kawai H. // Macromolecules. 1981. V. 14. N 1. P. 154—164.
- [37] Мандельброт Б. // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 9—47.
- [38] Иванова В. С., Шаняевский А. А. Количественная фрактография. Челябинск: Металлургия, 1988. 400 с.
- [39] Ботвина Л. Р. Кинетика разрушения конструкционных материалов. М.: Наука, 1989. 230 с.
- [40] Баренблатт Г. И., Ботвина Л. Р. // ФХММ. 1986. № 1. С. 57—62.
- [41] Мосолов А. Б., Динариев О. Ю. // Проблемы прочности. 1988. № 1. С. 3—7.
- [42] Bessendorf M. H. // Int. J. Engh. Sci. 1987. V. 25. P. 667—672.
- [43] Mecholsky J. J., Mackin T. J. // J. Mater Sci Lett. 1988. V. 7. N 11. P. 1145—1147.
- [44] Mu Z., Lung C. W. // J. Phys. 1988. V. D 21. N 5. P. 848—850.
- [45] Мосолов А. Б. // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 7. С. 57—60.
- [46] Баренблатт Г. И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255 с.
- [47] Регель В. Р., Слущкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. 560 с.
- [48] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 273 с.
- [49] Леванюк А. П. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. № 6. С. 2255—2261.
- [50] Кондратьев В. В., Пушин В. Г., Романов Р. Р., Тяпкин Ю. Д. // ФММ. 1977. Т. 44. № 3. С. 468—479.
- [51] Захаров С. И. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. № 2. С. 605—615.
- [52] Баланкин А. С., Баланкина Е. С. // Изв. АН СССР. Металлы. 1990. № 1. С. 140—144.
- [53] Matsushita M. // J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. N 3. P. 857—860.
- [54] Underwood E. E., Vanerji K. // Mat. Sci. Eng. 1986. V. 80. N 1. P. 1—14.
- [55] Гиляров В. Л., Петров В. А., Сабиров Р. Х., Лукьянченко А. С. // ФТТ. 1986. Т. 28. № 5. С. 1332—1337.
- [56] Журков С. Н. // ФТТ. 1983. Т. 25. № 10. С. 3119—3123.
- [57] Русинко К. Н. Особенности неупругой деформации твердых тел. Львов: Вища школа, 1986. 152 с.
- [58] Кондауров В. И., Никитин Л. В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 206 с.
- [59] Лавров Н. А., Слепян Л. И. // ДАН СССР. 1991. Т. 317. № 5. С. 1098—1102.

[60] Шемякин Е. И. // ДАН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С. 1090—1094.

[61] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.

Военная инженерная академия  
им. Ф. Э. Дзержинского  
Москва

Поступило в Редакцию  
29 сентября 1991 г.  
В окончательной редакции  
2 декабря 1991 г.

---