РЕЗОНАНСНОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЗВУКА НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТЬ—КРИСТАЛЛ

В. И. Альшиц, А. Н. Даринский, А. Л. Шувалов

Теоретически исследована резонансная трансформация полного отражения звука в полное прохождение на границе жидкость—кристалл, обусловленная взаимодействием с оттекающей волной, порождаемой «быстрой» рэлеевской волной в подложке. Это явление сопровождается также эффективным возбуждением в подложке поверхностной волны. Проанализированы случаи падения плоской волны и монохроматического пучка гауссовой формы. В качестве примера проведены численные расчеты для гексагональных подложек (в частности, из ВТСП материала), граничащих с жидким азотом и жидким гелием.

Как известно, при падении акустического пучка из жидкости на границу с твердым телом под углом $\theta \approx \theta_R \arcsin(v_f/v_R)$ (v_f — скорость звука в жидкости, v_R — скорость рэлеевской волны на свободной поверхности твердого тела) возникает явление незеркального отражения, обусловленное резонансным взаимодействием пучка с волной, оттекающей в жидкость (эффект Шоха) [1]. Теория этого явления была развита в [2] для случая, когда угол θ_R превышает угол θ_L полного внутреннего отражения на границе жидкость—изотропное твердое тело. Однако если подложка является анизотропной, то может оказаться, что $\theta_R < \theta_L$ ($v_R > v_L$ на рис. 1). Поскольку в области $\theta < \theta_L$ наряду с отражением существует преломление, то при $\theta \approx \theta_R < \theta_L$ следует ожидать резонансных особенностей в поведении как отраженного, так и проходящего пучка. В частности, численные расчеты для плоских волн, падающих из жидкости на кристаллические подложки различной симметрии, указывают на возможность существования резких минимумов коэффициента отражения [3, 4] (причем в силу свойств взаимности [4, 5] аналогичный эффект должен возникать и при падении звука из кристалла на границу с жидкостью).

В настоящей работе явление резонансного отражения и прохождения звука исследуется аналитически как в плосковолновом представлении, так и применительно к ограниченным пучкам. В частности, показано, что в общем случае (триклинная подложка) резкий минимум коэффициента отражения плоских волн (обращающийся в нуль при достаточно малом значении параметра $\rho_f v_f/\rho v_R$, где ρ_f и ρ — плотности жидкости и подложки) обусловлен взаимодействием с псевдоповерхностной волной, характеризующейся двойным оттеканием — в жидкость и в подложку. Проанализирована ситуация, возникающая при малом изменении ориентации плоскости падения относительно положения, при котором она совпадала с плоскостью симметрии упругих свойств подложки. В этом случае полное отражение звука, падающего из жидкости на подложку или наоборот, может трансформироваться для резонансных углов падения в полное отражение. Кроме этого, исследованы резонансные особенности поверхностного волнового поля, возбуждаемого в подложке. В качестве иллюстрации полученные аналитические результаты конкретизированы для случая поперечно изотропной подложки.

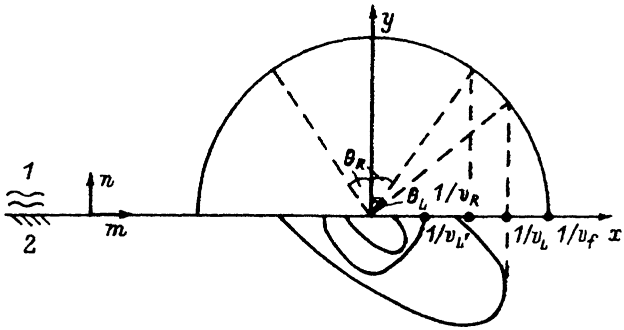


Рис. 1. Сечения поверхности медленности плоскостью падения.
1 — жидкость, *2* — кристалл.

1. Плоские волны

Пусть из идеальной (невязкой) жидкости на кристаллическую подложку падает акустическая волна (для обозначения ее параметров будем использовать индекс «*i*» — «incident»)

$$\mathbf{u}_i = b_i \mathscr{A}_i \exp\left[ik_x\left(x + p_i y - vt\right)\right], \tag{1}$$

где $x = \mathbf{mr}$; $y = \mathbf{nr}$; $p_i \equiv -\mathrm{ctg}\,\theta = -(v^2/v_f^2 - 1)^{1/2}$; $v = v_f/\sin\theta$ — «приведенная» скорость. На границе раздела эта волна вызывает силу

$$\mathbf{f}_i = -ik_x b_i \mathscr{L}_i \mathbf{n} \exp\left[ik_x\left(x - vt\right)\right], \tag{2}$$

где $\mathscr{L}_i = \rho_f v^2 \mathscr{A}_{iy}/p_i$. Нормируем величины $\mathscr{A}_{iy}$, $\mathscr{L}_i$ условием $2\mathscr{A}_{iy}\mathscr{L}_i = 1$. Тогда

$$\mathscr{A}_{iy} = (p_i/2\rho_f v^2)^{1/2}, \quad \mathscr{L}_i = (\rho v_f^2/2p_i)^{1/2}. \tag{3}$$

Отраженная от границы раздела волна характеризуется параметром $p_r = -p_i$; следовательно, $\mathscr{A}_{ry} = i\mathscr{A}_{iy}$, $\mathscr{L}_r = -i\mathscr{L}_i$ (для параметров отраженной волны используется индекс «*r*» — «reflected»). В подложке падающая из жидкости волна возбуждает три волновые моды, так что суммарное волновое поле имеет вид

$$\mathbf{u} = e^{ik_x(x - vt)} \begin{cases} \left(b_i \mathscr{A}_i e^{ik_x p_i y} + b_r \mathscr{A}_r e^{ik_x p_r y}\right), & y > 0, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{3} b_\alpha \mathbf{A}_\alpha e^{ik_x p_\alpha y}, & y < 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathbf{A}_\alpha$ — векторы поляризации волн в подложке. Коэффициенты b_r, b_α определяются из граничных условий.

Допустим, что плоскость падения, задаваемая векторами **m**, **n**, совпадает в подложке с плоскостью симметрии или ортогональна оси симметрии четного порядка,[1] а внешняя полость рефракции на рис. 1 соответствует сдвиговой волновой ветви с поляризацией, ортогональной плоскости {**m**, **n**}. Рассмотрим область значений угла падения θ, для которой $v_L < v < v_{L'}$ (рис. 1). При этом в

[1] Случай несимметричной ориентации плоскости падения обсуждается в разделе 4.

подложке возникают преломленная горизонтально поляризованная волна и две неоднородные моды, локализованные на границе. Для параметров локализованных мод будем использовать индексы $\alpha = 1, 2$ ($\mathrm{Im}\,(p_{1,\,2}) < 0$), для параметров преломленной («transmitted») волны — индекс $\alpha = t$ (вместо $\alpha = 3$ в формуле (4); $p_t = -\mathrm{ctg}\theta_t$, θ_t — угол преломления). Волновое поле в подложке вызывает на границе упругую силу

$$\mathbf{f} = \hat{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_t \equiv -ik_x \exp\left[ik_x (x - vt)\right] \sum_\alpha (b_\alpha \mathbf{L}_\alpha),\ \alpha = 1, 2, t, \tag{5}$$

где $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений, $\mathrm{L}\alpha$ — амплитуда силы, для которой принимается обычная нормировка [6] $2\mathrm{A}\alpha\mathrm{L}\alpha = 1$. Граничные условия, состоящие в требовании непрерывности нормальных компонент смещений и упругих сил на границе раздела, для рассматриваемой задачи отражения—преломления в плоскости {m, n} можно записать в виде

$$b_i\zeta_i + b_r\zeta_r = \sum_\alpha b_\alpha\zeta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, t, \tag{6}$$

где ζ_i, ζ_r, ζ_α — четырехкомпонентные векторы

$$\zeta_i = \begin{pmatrix}\mathscr{A}_{iy}\\0\\\mathscr{L}_i\\0\end{pmatrix},\ \zeta_r = \begin{pmatrix}\mathscr{A}_{ry}\\0\\\mathscr{L}_r\\0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}\mathscr{A}_{iy}\\0\\-\mathscr{L}_i\\0\end{pmatrix},\ \zeta_t = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\L_{tz}\end{pmatrix},\ \zeta_\alpha = \begin{pmatrix}A_{\alpha y}\\L_{\alpha x}\\L_{\alpha y}\\0\end{pmatrix},\ \alpha = 1, 2. \tag{7}$$

Из (7) видно, что в соответствии с требованиями симметрии вектор $\mathbf{f}_t$ упругой силы, связанной с горизонтально поляризованной модой, перпендикулярен векторам упругих сил остальных волновых мод. Поэтому в силу граничных условий (6) амплитуда b_t преломленной волны должна обращаться в нуль, т. е. падающая из жидкости волна испытывает полное отражение. При малом отклонении плоскости падения от плоскости {m, n} на угол $\Delta\varphi$ возникает преломленная волна, амплитуда которой, вообще говоря, мала в меру малости $\Delta\varphi$. Однако при определенных условиях амплитуда преломленной волны резонансным образом нарастает вблизи некоторых критических значений угла падения. Как уже указывалось в начале статьи, для возникновения подобного резонанса достаточно, чтобы на свободной поверхности подложки скорость v_R двухпарциальной волны Рэлея в симметричной сагиттальной плоскости {m, n} превышала скорость предельной волны v_L (рис. 1). Тогда при добавлении жидкости рэлеевское волновое решение порождает решение для псевдоповерхностной волны, которая при распространении в плоскости {m, n} оттекает в жидкость, а при отклонении волновой нормали от плоскости {m, n} — оттекает и в жидкость, и в подложку. Именно взаимодействие с модой, оттекающей в подложку, приводит к резонансному нарастанию преломленной волны для углов падения $\theta \approx \theta_l = \arcsin(v_f/v_l)$, где v_f/v_R — действительная часть скорости оттекающей волны (соответственно отраженная волна при этом наряду с обычным шоховским резонансом будет иметь минимум амплитуды). Данные качественные соображения лежат в основе выполненного ниже аналитического исследования.

Вернемся к задаче отражения в плоскости упругой симметрии {m, n}. Решая систему уравнений (6), (7), получаем для коэффициента отражения $R = b_r/b_i$ следующее соотношение:

$$R(\nu) = i\,\frac{F(\nu) + \rho_f/\rho p_i(\nu)}{F(\nu) - \rho_f/\rho p_i(\nu)}, \tag{8}$$

где

$$F(\nu) = \frac{L_{1x}L_{2y} - L_{2x}L_{1y}}{\rho\nu^2 (A_{1x}L_{2y} - A_{2x}L_{1y})}. \tag{9}$$

В Приложении доказано, что функция $F(\nu)$ является чисто мнимой. Кроме того, поскольку при $\nu = \nu_R$ ($\nu_R > \nu_L$) двухпарциальная рэлеевская волна удовлетворяет граничному условию механически свободной поверхности подложки, т. е. $\mathbf{L}_1 \parallel \mathbf{L}_2$ при $\nu = \nu_R$, то $F(\nu_R) = 0$. Таким образом, для углов падения θ, близких к θ_R, из (8) следует выражение

$$R(\nu) \approx i\,\frac{\nu - \nu_R - i\nu'_{lf}}{\nu - \nu_R + i\nu'_{lf}}, \tag{10}$$

где

$$\nu'_{lf}/\nu_R = \nu\,(\rho_f\nu_f/\rho\nu_R), \tag{11}$$

$$\nu = -i\,(\nu_R^2 - \nu_f^2)^{-1/2}\,[dF(\nu)/d\nu]^{-1}_{\nu=\nu_R}, \tag{12}$$

ν — действительная константа.

При отклонении плоскости падения от симметричной ориентации {m, n} на некоторый угол $\Delta\varphi$ четырехкомпонентные векторы $\boldsymbol{\zeta}_\alpha = (A_{\alpha y}, \mathbf{L}_\alpha)$, отвечающие волновым модам в подложке, уже не содержат нулевых компонент. Поэтому для коэффициента отражения из системы (6) при $\Delta\varphi \neq 0$ вместо выражения (8) получаем

$$R(\nu, \Delta\varphi) = i\,\frac{F(\nu, \Delta\varphi) + \rho_f/\rho p_i(\nu)}{F(\nu, \Delta\varphi) - \rho_f/\rho p_i(\nu)}, \tag{13}$$

где

$$F(\nu, \Delta\varphi) = \frac{[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3]}{\rho\nu^2\,[\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2\mathbf{G}_3]}, \quad \mathbf{G}_\alpha = \begin{pmatrix} A_{\alpha y} \\ L_{\alpha x} \\ L_{\alpha z} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

квадратные скобки обозначают детерминант матрицы, которая составлена из компонент векторов, заключенных в эти скобки. Отметим, что при $\nu > \nu_L$ функция $F(\nu, \Delta\varphi)$ является, вообще говоря, комплексной (в отличие от чисто мнимой функции $F(\nu, 0) \equiv F(\nu)$; см. (9)). Допустим, что угол отклонения $\Delta\varphi$ мал: $|\Delta\varphi| \ll 1$. В силу симметрии упругих свойств относительно плоскости {m, n} разложение функции $F(\nu, \Delta\varphi)$ по $\Delta\varphi$ содержит только четные степени. Следовательно, из (13) в первом порядке малости получаем, используя вместо v переменную $k_x = \omega / v$ (для удобства последующего интегрирования в случае волновых пакетов)

$$R\,(k_x, \Delta\varphi) \approx i\,\frac{k_x - k_l - i(k_l' - k_{lf}')}{k_x - k_l - i\,(k_l' + k_{lf}')}. \tag{15}$$

где

$$k_l = \omega / v_l,\ \ (k_l - k_{\mathrm{R}})/k_{\mathrm{R}} = \lambda\,(\Delta\varphi)^2,\ \ k_{\mathrm{R}} = \omega / v_{\mathrm{R}},$$

$$k_l' / k_{\mathrm{R}} = \eta\,(\Delta\varphi)^2,\ \ k_{lf}' / k_{\mathrm{R}} = \nu\,(\rho_f v_f / \rho v_{\mathrm{R}}), \tag{16}$$

λ, η — действительные константы, задаваемые соотношением

$$\lambda + i\eta = \frac{[\partial^2 F\,(v_{\mathrm{R}}, \Delta\varphi)/\partial\varphi^2\,]_{\Delta\varphi = 0}}{2v_{\mathrm{R}}\ [\partial F\,(v, 0)/\partial v\,]_{v = v_{\mathrm{R}}}}. \tag{17}$$

Полюс коэффициента отражения $k_p\,(\Delta\varphi) = k_l + i\,(k_l' + k_{lf}')$ задает волновой вектор оттекающей волны, порождаемой рэлеевским волновым решением в подложке и содержащей две объемные парциальные моды, одна из которых оттекает в жидкость, другая — в подложку (амплитуда последней обращается в нуль при $\Delta\varphi = 0$). Поскольку всегда $\mathrm{Im}\,(k_p) > 0$ в силу энергетических соображений, то v, $\eta > 0$.

Нетрудно убедиться, что при падении горизонтально поляризованной сдвиговой волны из подложки на границу с жидкостью коэффициент отражения описывается выражением

$$\widetilde{R}\,(k_x, \Delta\varphi) \approx i\,\frac{k_x - k_l - i\,(k_{lf}' - k_l')}{k_x - k_l - i\,(k_l' + k_{lf}')}, \tag{18}$$

т. е. рассматриваемое явление обладает взаимностью по отношению к замене падающей волны на преломленную, и наоборот. Отметим, что выражение (18) допускает предельный переход $\rho_f v_f / \rho v_{\mathrm{R}} \to 0$ (в отличие от формулы (15)). Отсюда следует, что величины k_l, k_l' в первом порядке малости совпадают с соответствующими параметрами оттекающей волны, возникающей на свободной границе подложки при отклонении волновой нормали от направления распространения рэлеевской волны.

Заметим, что в «обычной» для эффекта Шоха ситуации $v_f < v_{\mathrm{R}} < v_L$ (рис. 1) и при дополнительном учете поглощения ультразвука в подложке коэффициент отражения при $k_x \approx k_{\mathrm{R}}$ описывается, как известно [2], выражением того же типа, что и (15), с заменой $k_l + ik_l'$ на $k_{\mathrm{R}} + ik_{\mathrm{R}}'$, где k_{R}' — параметр затухания рэлеевской волны в подложке. Коэффициент резонансного отражения от свободной границы кристалла вблизи «быстрой» рэлеевской волны (v_{R} v_L; см. [7]) при учете поглощения будет также иметь аналогичную структуру, которая получается из (18) при замене k_{lf}' на параметр диссипативного затухания оттекающей волны.

Рассмотрим коэффициент прохождения, который определим равенством $T = b_t / b_i$. С учетом принятой выше нормировки ($2\mathscr{A}_i \mathscr{L}_i = 2\mathscr{A}_r \mathscr{L}_r = 2\mathrm{A}_a \mathrm{L}_a = 1$) имеет место соотношение $F_{n\alpha} = (-\omega k_x / 4)\ |b_\alpha|^2$, $\alpha = i, r, t$, где $F_{n\alpha}$ — нормальная компонента плотности потока энергии, связанной с соответствующей волновой модой. Таким образом, $|R|^2 = |b_r/b_i|^2 = P_{nr}/P_{ni}$, $|T|^2 = P_{nt}/P_{ni}$ и в силу непрерывности потока энергии получаем $|R|^2 + |T|^2 = 1$.[2] Из последнего равенства и формулы (15) для коэффициента R находим выражение для коэффициента T (с точностью до фазы Φ).

$$T(k_x, \Delta\varphi) \approx 2e^{i\Phi} \frac{(k_l' k_{lf}')^{1/2}}{k_x - k_l - i(k_l' + k_{lf}')}. \tag{19}$$

Отметим, что линейная зависимость амплитуды преломленной волны b_t от угла отклонения плоскости падения $\Delta\varphi$ относительно симметричной ориентации, конечно, не противоречит требованиям симметрии. Действительно, так как вектор упругого смещения плоской волны определен с точностью до знака, то условие, накладываемое на амплитудные множители b_α в силу симметрии, имеет вид $|b_\alpha(\Delta\varphi)| = |b_\alpha(-\Delta\varphi)|$. Очевидно, это условие для преломленной волны выполняется, поскольку $b_t = 0$ при $\Delta\varphi = 0$ (в отличие от рассмотренного выше случая отраженной волны, для которой $b_r \neq 0$ при $\varphi = 0$).

Согласно (13), (19), коэффициенты R, T при заданном $\Delta\varphi \neq 0$ резко зависят от изменения угла падения θ вблизи $\theta_l = \arcsin(v_f/v_l)$: величина $R(k_x)$, которая при $|k_x - k_l| \gg k_l', k_{lf}'$ близка к единице, имеет в окрестности точки $k_x = k_l(\Delta\varphi)$ узкий минимум шириной порядка $(k_l' + k_{lf}')$ (соответственно $T(k_x)$ — такой же узкий максимум; см. рис. 2, *а, б*). Фазы данных коэффициентов меняются на величину порядка 2π в указанной области. При этом экстремальные значения $|R(k_l, \Delta\varphi)|$, $|T(k_l, \Delta\varphi)|$ радикальным образом меняются в зависимости от соотношения между малыми параметрами оттекания k_l' и k_{lf}'. Действительно, $|R| \equiv 1$, $T \equiv 0$, при $k_l' = 0$, т. е. $\Delta\varphi = 0$; $R(k_l, \Delta\varphi) = 0$, $|T(k_l, \Delta\varphi)| = 1$ при значении $\Delta\varphi$, отвечающем равенству $k_l' = k_{lf}'$; при дальнейшем возрастании $|\Delta\varphi|$ (в рамках условия $(\Delta\varphi)^2 \ll 1$) величина $|R(k_l, \Delta\varphi)|$ вновь возрастает, а $|T(k_l, \Delta\varphi)|$ — убывает. Таким образом, при малых поворотах $\Delta\varphi$ плоскости падения может происходить резкая трансформация от полного отражения к полному прохождению.

Определим коэффициенты S_α ($\alpha = 1, 2$), характеризующие возбуждение в подложке поверхностных мод $\mathbf{u}_\alpha = u_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ при падении из жидкости волны $\mathbf{u}_i = u_i \mathbf{e}_i$ ($\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_i$ — единичные орты поляризации, причем $\mathbf{e}_\alpha$ — комплексные векторы) как отношение соответствующих амплитуд: $S_\alpha = (\mathbf{u}_\alpha \mathbf{e}_\alpha^* / \mathbf{u}_i \mathbf{e}_i)_{y=0} = (b_\alpha A_\alpha \mathbf{e}_\alpha^* / b_i \mathbf{A}_i \mathbf{e}_i)$, где $*$ — знак комплексного сопряжения. При $\theta \approx \theta_\mathrm{R}$ и $\Delta\varphi = 0$, вычисляя отношение b_α/b_i из системы уравнений (6), (7), повторяя рассуждения, использовавшиеся при выводе формул для коэффициентов R, T, и учитывая принятую нормировку векторов $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathscr{A}_i$, получаем

$$S_\alpha \approx M_\alpha \left(\frac{\rho_f v_f}{\rho v_\mathrm{R}}\right) \frac{v_\mathrm{R}}{v - v_\mathrm{R} + i v_{lf}'}, \tag{20}$$

где

---

[2] Очевидно, в данном случае коэффициент отражения $R = b_r/b_i$ одновременно характеризует отношение амплитуд: $|R| = |\mathbf{u}_r|/|\mathbf{u}_i|$ (поскольку $|\mathscr{A}_r| = |\mathscr{A}_i|$). С другой стороны, $|\mathbf{u}_t|/|\mathbf{u}_i| = |T\mathbf{A}_t|/|\mathscr{A}_i|$, т. е. для вычисления отношения амплитуд необходимо домножить коэффициент $|T|$ (см. (18)) на отношение абсолютных величин нормированных векторов поляризации $|\mathbf{A}_t|/|\mathscr{A}_i| = |\rho_f v_f^2 \rho_l/(c_{45} + \rho_t c_{44})|^{1/2}$ (c_{45}, c_{44} — упругие модули подложки), которое при $v \approx v_\mathrm{R}$ имеет значение порядка $(\rho_f v_f v_\mathrm{R}/\rho v_t^2)^{1/2}$, где v_t — скорость преломленной волны.

$$M_\alpha = -\left\{\frac{\rho v_R^2}{\mathbf{n}\mathbf{e}_\alpha \hat{c}\mathbf{e}_\alpha\,[\mathbf{m} + p_\alpha(v_R)\,\mathbf{n}]}\right\}^{1/2} \frac{\sqrt{2p}\,L_{\beta x}(v_R)}{[\partial\,(L_{\alpha x}L_{\beta y} - L_{\alpha y}L_{\beta x})/\partial v]_{v = v_R}},$$

$$\alpha, \beta = 1, 2; \quad \alpha \neq \beta \tag{21}$$

— константа, имеющая, вообще говоря, значение порядка единицы ($\hat{c}$ — тензор упругих модулей подложки). Из (20) видно, что $|S_\alpha| \ll 1$ при $|v - v_R| \gg v_{lf}$; однако если $\theta = \theta_R$, т. е. $v = v_R$, то $|S_\alpha| \sim 1$. Для плоскости падения, отклоненной на угол $\Delta\varphi$ от симметричной ориентации, коэффициенты S_α при $|\theta - \theta| \ll 1$ могут быть записаны через переменные $k_x = \omega/v$, $\Delta\varphi$ в виде

$$S_\alpha(k_x, \Delta\varphi) \approx M_\alpha\left(\frac{\rho_f v_f}{\rho v_R}\right)\frac{k_R}{k_x - k_l - i\,(k_l' + k_{lf}')}. \tag{22}$$

Согласно (22), максимум амплитуды поверхностной волны, реализующийся при $k_x \approx k_l(\Delta\varphi)$, убывает с ростом $|\Delta\varphi|$ (рис. 2, *в*).

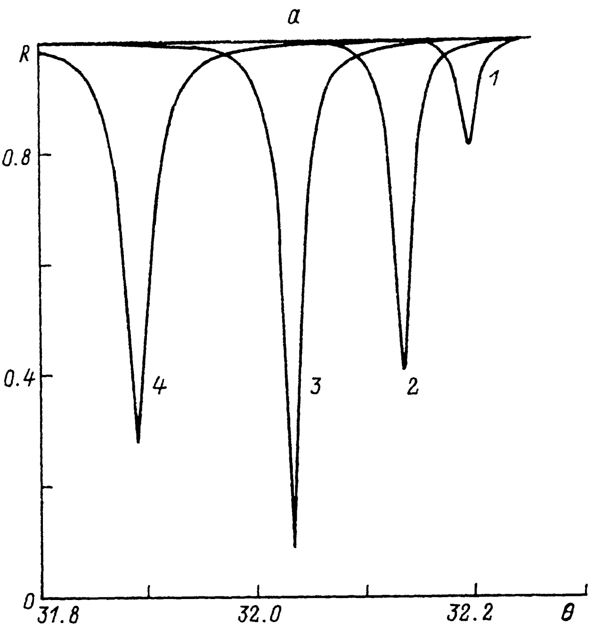
Отметим, что, как известно [7, 8], амплитуда поверхностной волны, возбуждаемой при резонансном отражении вблизи ветви оттекающих волн на свободной поверхности кристалла, может многократно превосходить амплитуду падающей волны. В отличие от случая свободной границы в условиях, обсуждаемых в настоящей работе, величина $|S_\alpha|$ принципиально ограничена значениями порядка единицы в силу требования непрерывности нормальных компонент упругих смещений на границе раздела. В то же время, если оттекающая волна на границе раздела двух анизотропных сред содержит поверхностные моды в обеих средах, то при резонансном отражении—преломлении указанные ограничения на величину $|S_\alpha|$ теряют свою универсальность и коэффициент $|S_\alpha|$ в принципе может быть большим (см. [9]). Заметим также, что в случае $|S_\alpha| \sim 1$ потоки энергии в поверхностной волне $\mathbf{P}_\alpha$ могут многократно превосходить поток энергии в падающей волне, поскольку при этом $|\mathbf{P}_\alpha|/\mathbf{P}_i| \sim (\rho v_R/\rho_f v_f)^{1/2}$.

2. Поперечно-изотропная подложка

Рассмотрим полубесконечную гексагональную среду, содержащую ось симметрии 6 в плоскости границы. Допустим, что упругие модули кристалла $c_{\alpha\beta}$ удовлетворяют неравенствам

$$c_{44} < c_{66}; \quad [2 - (c_{44}/c_{66})]^2 < 4\,[1 - (c_{44}/c_{66})]^{1/2}\,[1 - (c_{44}/c_{11})]^{1/2}. \tag{23}$$

При этом, согласно [10], на свободной границе в поперечно-изотропном направлении $\mathbf{m}$ существует решение для двухпарциальной рэлеевской волны, скорость v_R которой удовлетворяет условию $v^{(t)} < v_R < v^{(t')}$, где $v^{(t')} = (c_{66}/\rho)^{1/2}$ и $v^{(t)} = (c_{44}/\rho)^{1/2}$ — скорости поперечных объемных волн, распространяющихся вдоль $\mathbf{m}$ и поляризованных соответственно в сагиттальной плоскости $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ и перпендикулярно к ней (скорость продольной волны вдоль $\mathbf{m}$: $v^{(l)} = (c_{11}/\rho)^{1/2}$). При добавлении жидкости и отклонении сагиттальной плоскости на малый угол $\Delta\varphi$ относительно поперечно-изотропного направления $\mathbf{m}$ данное рэлеевское волновое решение порождает решение для волны с двойным оттеканием — в жидкость и в подложку, что в свою очередь обусловливает резонанс отражения — преломления, обсуждавшийся в предыдущем разделе. Используя результаты работ [8, 10], получаем применительно к случаю гексагональной подложки выражения для констант λ, v, η, M_α (см. (16), (12), (17), (21))



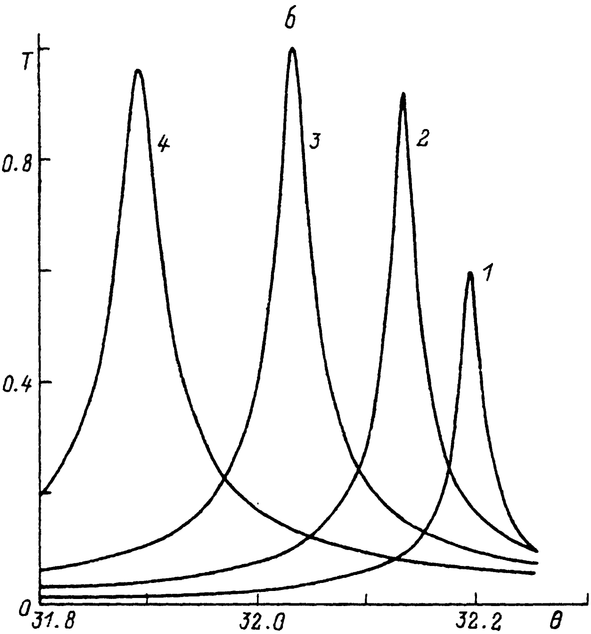


Рис. 2. Абсолютные значения коэффициентов отражения $|R|$ (*а*), прохождения $|T|$ (*б*) и возбуждения поверхностных волн $|S_{1,2}|$ (*в*) на границе жидкий азот — $Pb_5(SiO_4)(VO_4)_2$.

$\Delta\varphi = 6$ (*1*), 12 (*2*), 18 (*3*), 24° (*4*). Расчетные параметры приведены в таблице. На рис. 2, *в* $|M_1| = 0.68$, $|M_2| = 0.27$.

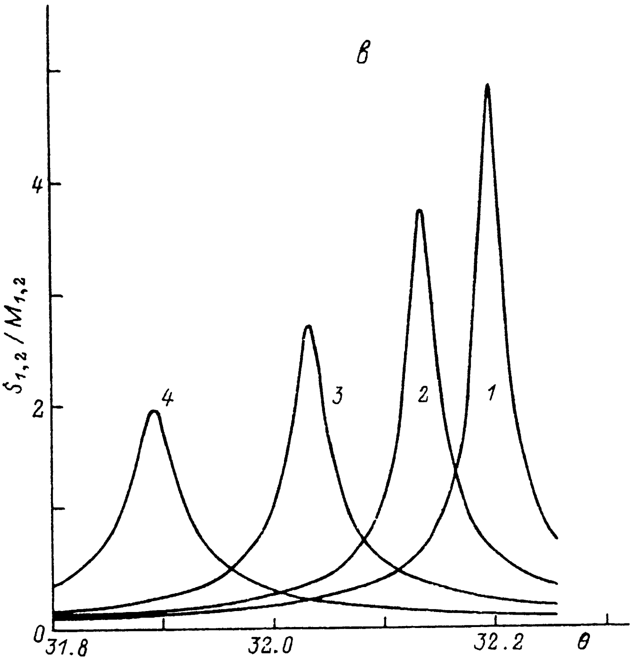


Рис. 2 (*продолжение*).

$$\lambda = \left[2 - \left(\frac{v_R}{v^{(t')}}\right)^2\right] \left\{\frac{c_{44}}{c_{66}} \tau (1 + \tau - \alpha) + \left[2 - \left(\frac{v_R}{v^{(t')}}\right)^2\right] \times \right.$$

$$\left. \times (\delta_2 + \delta_3 - \rho_2 - \rho_3)\right\}, \tag{24}$$

$$\nu = \frac{(v_R / v^{(t')})^4}{v_R (\partial f / \partial v)_{v = v_R}} \left[\frac{1 - (v_R / v^{(l)})^2}{1 - (v_f / v_R)^2}\right]^{1/2}, \tag{25}$$

$$\eta = \frac{(1 + \tau - \alpha)^2}{v_R (\partial f / \partial v)_{v = v_R}} \frac{c_{44}}{c_{66}} \left(\frac{v_R}{v^{(t')}}\right)^2 \left[\frac{1 - (v_R / v^{(l)})^2}{(v_R / v^{(t)})^2 - 1}\right]^{1/2}, \tag{26}$$

$$M_1 = \frac{4 v_R^2 \, [1 - (v_R / v^{(l)})^2]^{1/2}}{[v^{(t')}]^3 (\partial f / \partial v)_{v = v_R}}, \quad M_2 = \frac{2 i v_R \, [2 - (v_R / v^{(t')})^2]}{v^{(l)} \, [v^{(t')}]^2 (\partial f / \partial v)_{v = v_R}}, \tag{27}$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \frac{v^{(t')}}{v_R}\begin{pmatrix} i\,[1-(v_R/v^{(t')})^2]^{1/2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{v^{(l)}}{v_R}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\,[1-(v_R/v^{(l)})^2]^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$f(v) = \left[2 - \left(\frac{v}{v^{(t')}}\right)^2\right]^2 - 4\left[1 - \left(\frac{v}{v^{(l)}}\right)^2\right]^{1/2}\left[1 - \left(\frac{v}{v^{(t')}}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\tau = (c_{44} + c_{13})/(c_{11} - c_{44}), \quad \alpha = 2\tau\,(v^{(t')}/v_R)^2,$$

$$\delta_2 = -\lambda^- - \frac{2 - (c_{44}/c_{66})}{2 - (v_R/v^{(t')})^2}, \quad \rho_2 = \lambda^+ - 1/2,$$

$$\delta_3 = -\delta^- - \frac{2 - (\tau + 1)(c_{44}/c_{66})}{2 - (v_R/v^{(t')})^2}, \quad \rho_3 = \delta^+ - 1/2,$$

$$\lambda^\pm = \frac{1}{4}\left[\pm 2\left(\frac{v^{(t)}}{v_R}\right)^2 - \frac{1 - (c_{44}/c_{66})}{1 - (v_R/v^{(t')})^2}\right],$$

$$\delta^\pm = \frac{1}{4}(1 - \tau^2)\left[\pm 2\left(\frac{v^{(t)}}{v_R}\right)^2 - \frac{1 - (c_{44}/c_{11})}{1 - (v_R/v^{(l)})^2}\right]. \tag{28}$$

Проведенные численные расчеты (см. таблицу) выявили следующую особенность: для всех рассмотренных нами гексагональных сред в указанной геометрии константа η обладала численной малостью [3] (т. е. амплитуда оттекающей в подложку парциальной моды псевдоповерхностной волны, пропорциональная величине $k'_l/k_R = \eta\,(\Delta\varphi)^2$, имела дополнительную малость). При этом для большинства гексагональных кристаллов значение η получалось $< 10^{-2}$. В таком случае даже при выборе в качестве второй среды жидкого азота, обеспечивающего меньшие значения параметра $k'_{lf}/k_R = \nu\,(\rho_f v_f/\rho v_R)$ по сравнению с «обычными» жидкостями, для $(\Delta\varphi)^2 \ll 1$ оказывается выполненным условие $k'_l \ll k'_{lf}$. Как следует из результатов предыдущего раздела (см. выражения (15), (19), (22)), это условие не сказывается на эффективности возбуждения поверхностного волнового поля, однако негативно влияет на эффективность трансформации отраженной волны в преломленную [4] ($|T| = 1$ при $k'_l = k'_{lf}$). С этой точки зрения наиболее удачным гексагональным кристаллом среди рассмотренных нами оказался силикованадат свинца, для которого $\eta \approx 0{,}1$ и $k'_l = k'_{lf}$ при $\Delta\varphi \approx 18.2°$ (рис. 2). В то же время при использовании жидкого гелия для любых гексагональных подложек полное прохождение звука, обусловленное равенством

[3] Обычно это связано с малостью коэффициента $(1+\tau-\alpha)^2$, возникающей за счет того, что $c_{13} \approx c_{12}$, $\rho v_R^2 \approx c_{44}$, $c_{66} - c_{44}) \ll (c_{11} - c_{44})$. Заметим также, что величина η оказывается очень чувствительной к малым изменениям значений упругих модулей.

[4] Заметим, что в ходе численных исследований, проведенных в работе [4], также не удалось обнаружить глубокого минимума коэффициента отражения в тех случаях, когда рассматривались подложки гексагональной симметрии. Однако требуется проведение дополнительного исследования для ответа на вопрос, с чем это связано: с обсуждаемой здесь численной малостью параметра η или же с тем, что в [4] рассматривалась иная геометрия задачи (например, не было обеспечено условие близости тангенциальной проекции волнового вектора падающей волны к волновому вектору «быстрой» рэлеевской волны в подложке $k_R = \omega/v_R$, где $v_R > v_L$; рис. 1).

Численные значения параметров, используемых при расчете резонансного отражения—преломления для гексагональных подложек, граничащих с жидким азотом ($\rho_f = 0.81 \cdot 10^3$ кг/м^3, $v_f = 942$ м/с) и с жидким гелием ($\rho_f = 0.12 \cdot 10^3$ кг/м^3, $v_f = 220$ м/с)

Подложка		v_R, м/с	λ	η	ν		k'_{lf}/k_R	
					азот	гелий	азот	гелий
$Pb_5(SiO_4)(VO_4)_2$	[11]	1767	—0.05	$1.1 \cdot 10^{-1}$	0.19	0.16	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$
$Pb_5(GeO_4)(VO_4)_2$	[12]	1712	0.25	$2.2 \cdot 10^{-2}$	0.19	0.16	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$
GaSe	[13]	2460	1.32	$1.7 \cdot 10^{-2}$	0.17	0.16	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$
InSe	[14]	2330	1.41	$9.2 \cdot 10^{-3}$	0.16	0.15	$9.4 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$
$Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$	[15]	1773	0.97	$5.2 \cdot 10^{-3}$	0.15	0.12	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
CeF_3	[16]	2546	0.68	$4.2 \cdot 10^{-3}$	0.15	0.14	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$

Примечание. В первом столбце указана литература, из которой взяты данные о материальных константах соответствующих сред.

$k'_l = k'_{lf}$, реализуется для резонансного угла $\theta = \theta_l$ при отклонении плоскости от поперечно-изотропной ориентации на несколько градусов ($|\Delta\varphi| \lessdot 10°$; см. таблицу).

3. Монохроматический пучок

Получение аналитического представления для угловых зависимостей коэффициента отражения и прохождения позволяет рассмотреть обсуждаемую задачу отражения применительно к ограниченному акустическому пучку. Пусть форма монохроматическоо пучка, падающего из жидкости на подложку и имеющего «средний» волновой вектор $\mathbf{k}_i$, описывается гауссовым распределением: $|\mathbf{u}_i(x_i)| = C|\mathscr{A}_i|\exp(-X_i^2$, где C — размерный амплитудный множитель; $\mathscr{A}_i$ — вектор поляризации продольной плоской волны, распространяющейся в жидкости вдоль $\mathbf{k}_i$, причем его y-компонента нормирована, как и прежде, условием $2\mathscr{A}_{iy}\mathscr{L}_i = 1$; $X_i = x_i/w_i$; w_i — полуширина падающего пучка (рис. 3). При этом, как обычно, будем полагать выполненным условия $k_R w_i \gg 1$, $k_R w_i(v_R - v_L)/v_R \gg 1$ (последнее условие позволяет избежать сложностей, возникающих при разложении волновых параметров вблизи точки $v = v_L$). Следуя стандартной процедуре

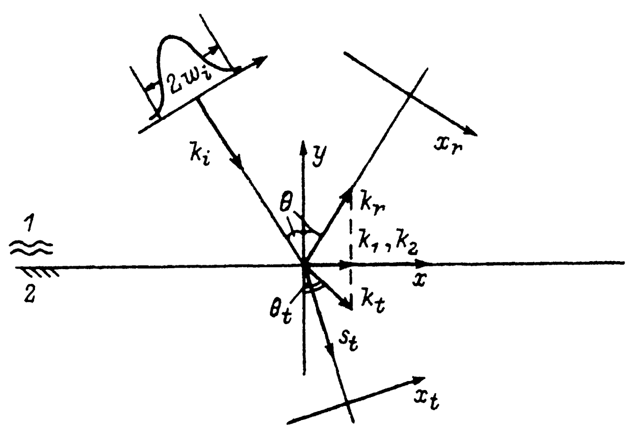


Рис. 3. Геометрия задачи отражения—преломления для пучков.

s_t — «средняя» групповая скорость преломленного пучка (групповая скорость плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k}_t$). 1 — жидкость, 2 — кристалл.

(см. [1, 2, 7]) и используя выражения (15), (19), (22), можно найти распределения амплитуд $|\mathbf{u}_r|$, $|\mathbf{u}_t|$ соответственно в отраженном и преломленном пучках, а также суммарную амплитуду $|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|$ двух локализованных на поверхности подложки волновых мод, возникающих при падении пучка. Получаем

$$|\mathbf{u}_r(X_r)| = C|1 - 2\sqrt{\pi}\,\varkappa_f e^{\gamma^2 - 2\gamma X_r}\,\mathrm{erfc}\,(\gamma - X_r)|, \tag{29}$$

$$|\mathbf{u}_t(X_t)| = C_t(\rho_f v_f/\rho v_{\mathrm{R}})^{1/2}(\varkappa_f\varkappa)^{1/2}|e^{\gamma^2 - 2\gamma X_t}\,\mathrm{erfc}\,(\gamma - X_t)|, \tag{30}$$

$$|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|_{|y=-0} = C_s\varkappa_f|e^{\gamma^2 - 2\gamma X}\,\mathrm{erfc}\,(\gamma - X)|. \tag{31}$$

Здесь

$$\varkappa_f = k'_{lf}w/2,\ \varkappa = k'_l w/2,\ w = w_i/\cos\theta = w_r/\cos\theta = w_t/\cos\theta_t,$$

$$X_r = x_r/w_r,\ X_t = x_t/w_t,\ X = x/w,\ \gamma = \varkappa + \varkappa_f + i\mu,\ \mu = (k_l - k_{lx})\,w/2,$$

$$C_t = 2C\sqrt{\pi\rho}\,v_{\mathrm{R}}(1 - v_f^2/v_{\mathrm{R}}^2)^{1/4}|c_{45} + c_{44}p_t(v_{\mathrm{R}})|^{1/2},\ C_s = C|M_1\mathbf{e}_1 +$$

$$+ M_2\mathbf{e}_2|\sqrt{\pi}/2\nu, \tag{32}$$

$\mathbf{e}_\alpha$ ($|\mathbf{e}_\alpha| = 1$, $\alpha = 1, 2$) — комплексные орты поляризации локализованных плоских волн, удовлетворяющих условию: волновые векторы $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ ($\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{n} = 0$) равны тангенциальным проекциям «средних» волновых векторов падающего, отраженного и преломленного пучков $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_r$ и $\mathbf{k}_t$ (рис. 3); коэффициенты C_t/C, C_s/C, вообще говоря, имеют значения порядка единицы.

Согласно (29)—(30), свойства отраженного и преломленного пучков, а также приповерхностного волнового поля в подложке регулируются параметром $\mu = \mathrm{Im}\,(\gamma)$, характеризующим точность попадания в резонанс, а также параметрами $\varkappa_f = k_{\mathrm{R}}w\nu\rho_f v_f/2\rho v_{\mathrm{R}}$, $\varkappa = k_{\mathrm{R}}\omega\eta\,(\Delta\varphi)^2/2$, характеризующими соотношение между шириной пространственного спектра пучка $\sim(k_{\mathrm{R}}w)^{-1} \ll 1$ и малыми величинами $\rho_f v_f/\rho v_{\mathrm{R}}$ и $(\Delta\varphi)^2$. При этом параметры μ, $\varkappa_f$, $\varkappa$, вообще говоря, могут принимать как малые, так и большие значения.

Обсудим форму распределения амплитуды в отраженном пучке (рис. 4, *а*). Для симметричной ориентации плоскости падения ($\Delta\varphi = 0$, т. е. $\varkappa = 0$ и $\mathbf{u}_f \equiv 0$) имеет место «классическое» шоховское незеркальное отражение. Реализующееся при этом волновое поле подробно исследовалось для различных значений параметров $\varkappa$; μ в работах [2, 7].[5] Рассмотрим теперь значения $\varkappa \neq 0$. Допустим, что $\varkappa_f < 1$ и $|\mu| \ll 1$. При отклонении $\Delta\varphi$, малом настолько, что $|\gamma| = [(\varkappa_f + \varkappa)^2 + \mu^2]^{1/2} \ll 1$, волновое поле в отраженном пучке имеет два максимума, разделенных минимумом, обращающимся в нуль при $\mu = 0$

$$(X_r)_{\max} \approx -2\varkappa_f\,[1 - \sqrt{\pi}\,(\varkappa_f + \varkappa)],\quad |\mathbf{u}_r|_{\max 1}/C \approx 1 - 2\sqrt{\pi}\,\varkappa_f, \tag{33}$$

$$(X_r)_{\min} \approx [\ln\,(1/4\sqrt{\pi}\,\varkappa_f)]^{1/2} + \varkappa_f + \varkappa,\quad |\mathbf{u}_r|_{\min}/C \approx 8\sqrt{\pi}\,\varkappa_f\mu\ \times$$

[5] Формула (29) совпадает с выражением, полученным в [7] для незеркального отражения от свободной поверхности кристалла, если в [7] поменять $\varkappa$ на $\varkappa_f$, а в (29) положить $\varkappa = 0$.

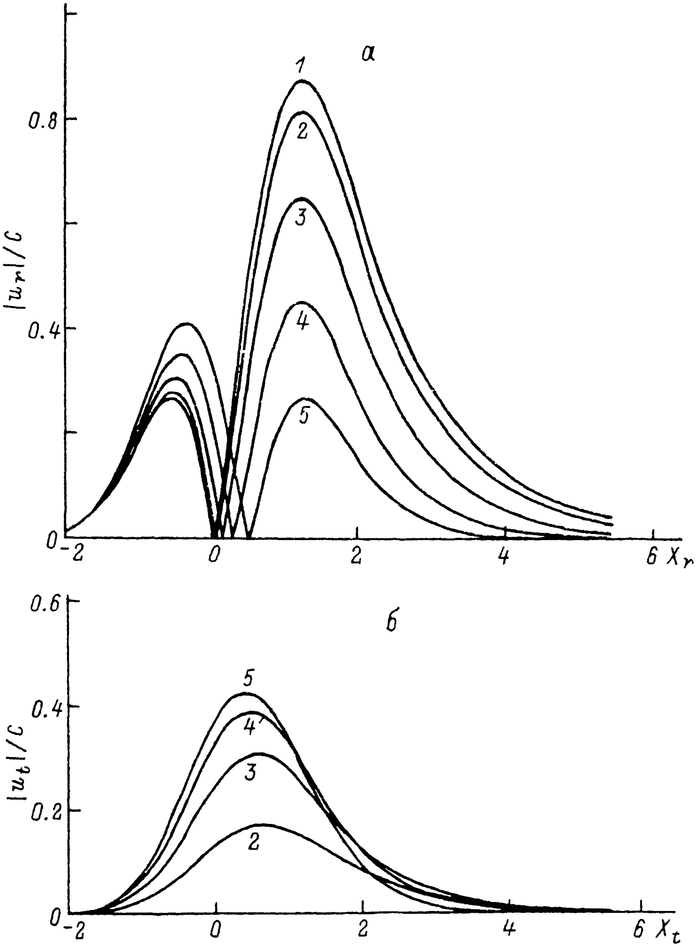


Рис. 4. Распределение амплитуды в отраженном (*а*) и преломленном (*б*) пучках для границы жидкий азот — $Pb_5(SiO_4)(VO_4)_2$ при $\omega = 50$ МГц, $w = 2.5$ мм, $\Delta\varphi = 0$ (*1*), 5 (*2*), 10 (*3*), 15 (*4*), 20° (*5*).

$$\times\ [\ln(1/4\sqrt{\pi}\,\varkappa_f)]^{1/2}, \tag{34}$$

$$(X_r)_{\max 2} \approx \left\{\ln[\beta_0/4\sqrt{\pi}\,\varkappa_f(\varkappa_f+\varkappa)]\right\}^{1/2} + \varkappa_f + \varkappa, \quad |\mathbf{u}_r|_{\max 2}/C \approx 4\sqrt{\pi}\,\varkappa_f, \tag{35}$$

где β_0 — подгоночный параметр порядка величины. Если при возрастании отклонения плоскости падения (в рамках условия $(\Delta\varphi)^2 \ll 1$) параметр $\varkappa$ принимает значения $\varkappa \gg 1 \gg \varkappa_f$, то первый максимум исчезает, а второй возрастает, причем его боковое смещение становится малым отрицательным

$$(X_r)_{\max 2} \approx \varkappa_f/(\varkappa_f^2 - \varkappa^2), \quad |\mathbf{u}_r|_{\max 2}/C \approx [(\varkappa - \varkappa_f)/(\varkappa + \varkappa_f)]. \tag{36}$$

Пусть $\chi_f \gg 1$, $|\mu| \gg 1$. При $(\Delta\varphi)^2$, малом настолько, что $\varkappa \ll 1$, первый максимум расположен вблизи минимума

$$(X_r)_{\max 1} \approx (X_r)_{\min} \approx \varkappa - \varkappa_f \tag{37}$$

и имеет малую величину порядка $\varkappa_f^{-2}$. Второй максимум описывается выражениями (36). Когда с ростом $|\Delta\varphi|$ реализуется условие $\varkappa_f \approx \varkappa \gg 1$, положение минимума (равного нулю при $\mu = 0$) по-прежнему описывается формулой (37), а точки максимумов занимают примерно симметричное положение относительно точки $X_r = 0$

$$(X_r)_{\max 1} \approx -(X_r)_{\max 2} \approx 1/\sqrt{2}, \tag{38}$$

т. е. боковые смещения максимумов порядка ширины пучка w_r; правда, величина максимумов амплитуды невелика

$$|\mathbf{u}_r|_{\max 1}/C \approx |\mathbf{u}_r|_{\max 2}/C \approx 1/\sqrt{2e}\,(\varkappa_f + \varkappa). \tag{39}$$

Если при дальнейшем возрастании отклонения $|\Delta\varphi|$ (остающегося при этом малым настолько, что $(\Delta\varphi)^2 \ll 1$) выполняется условие $\varkappa \gg \varkappa_f \gg 1$, то для экстремумов распределения амплитуды $|\mathbf{u}_r|$ вновь выполняются формулы (36), (37).

При достаточно большой величине параметра $|\mu|$, характеризующего отличие угла падения пучка θ от резонансного значения θ_l, волновое поле в отраженном пучке имеет один максимум (второй) с малым боковым смещением. Если $|\mu| \gg \varkappa_f + \varkappa$, то это распределение амплитуды близко к гауссовскому с максимумом $|\mathbf{u}_r|_{\max 2}/C \approx 1$ в точке $(X_r)_{\max 2} \approx \varkappa_f/\mu^2$.

Рассмотрим теперь волновое поле в преломленном пучке (рис. 4, *б*). Зависимость $|\mathbf{u}_t(X_t)|$ всегда имеет единственный максимум. При $|\gamma| = [(\varkappa_f + \varkappa)^2 + \mu^2]^{1/2} \ll 1$ характеристики максимума имеют вид

$$(X_r)_{\max} \approx \left\{\ln\,[\tilde{\beta}_0/2\sqrt{\pi}\,(\varkappa_f + \varkappa)]\right\}^{1/2} + \varkappa_f + \varkappa,$$

$$|\mathbf{u}_t|_{\max}/C_t \approx 2\,(\rho_f v_f/\rho v_{\mathrm{R}})^{1/2}\,(\varkappa_f\varkappa)^{1/2} \tag{40}$$

($\hat{\beta}_0$ — подгоночный параметр порядка единицы), т. е. прошедший пучок при малой интенсивности имеет большой боковой сдвиг порядка ширины пучка w_t. Для $|\gamma| \gg 1$ распределение $|\mathbf{u}_t(X_t)|$ близко к гауссовскому, при этом

$$(X_t)_{\max} \approx (\varkappa_f + \varkappa)/2\,[(\varkappa_f + \varkappa)^2 + \mu^2],$$

$$|\mathbf{u}_t|_{\max}/C_t \approx (\rho_f v_f/\rho v_{\mathrm{R}})^{1/2}\,(\varkappa_f\varkappa)^{1/2}/\sqrt{\pi}\,[(\varkappa_f + \varkappa)^2 + \mu^2]^{1/2}. \tag{41}$$

Эффект трансформации отраженного пучка в преломленный наглядно характеризует поведение величины I_r, равной отношению полной интенсивности отраженного пучка к полной интенсивности падающего (без учета интерференционных членов; см. [2, 17])

$$I_r \equiv \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_r(X_r)|^2\,dX_r\right)\Big/\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_i(X_i)|^2\,dX_i\right) = 1 -$$

$$- \frac{4\sqrt{2\pi}\,\varkappa_f\varkappa}{\varkappa_f + \varkappa}\,\mathrm{Re}\,[e^{2\gamma^2}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{2}\,\gamma)]. \tag{42}$$

В симметричной ориентации ($\Delta\varphi = 0$, $\varkappa = 0$) $I_r = 1$. При условии $|\gamma| \ll 1$ получаем

$$I_r \approx 1 - \frac{4\sqrt{2\pi}\,\varkappa_f \varkappa}{\varkappa_f + \varkappa}, \tag{43}$$

т. е. в этом случае при отклонении плоскости падения от симметричной ориентации (с ростом параметра χ) величина I_r, равнявшаяся единице при $\Delta\varphi = 0$, уменьшается незначительно. Если $|\gamma| \gg 1$, то

$$I_r \approx 1 - \frac{4\varkappa_f \varkappa}{(\varkappa_f + \varkappa)^2 + \mu^2} \left\{1 - \frac{(\varkappa_f + \varkappa)^2 - 3\mu^2}{2\sqrt{2}\,[(\varkappa_f + \varkappa)^2 + \mu^2]^2}\right\}. \tag{44}$$

В условиях точного резонанса ($\mu = 0$) величина I_r принимает минимальное значение для $\varkappa_f \approx \varkappa \gg 1$

$$I_r \approx 1/8\sqrt{2}\,\varkappa_f, \tag{45}$$

т. е. пучок при этом почти полностью проходит из жидкости в подложку. Очевидно, что такое поведение пучков качественно объясняется проанализированными в разделе 1 свойствами коэффициентов отражения и прохождения плоских волн вблизи ветви оттекающих волновых решений. Действительно, при $\varkappa$, $\varkappa_f \gg 1$ пространственная ширина спектра пучка $\sim (k_R w)^{-1}$ оказывается много меньше, чем резонансная область $[(k_x - k_l)/k_l] \sim (\Delta\varphi)^2$, $\rho_f v_f / \rho v_R$, т. е. «все» плоские волны, которые вносят основной вклад в волновое поле, испытывают резонанс. В свою очередь условие $\varkappa_f \approx \varkappa$, т. е. $k'_{lk} \approx k'_l$, обеспечивает, согласно (15), (19), резкий минимум коэффициента отражения плоских волн R и соответственно резкий максимум коэффициента прохождения T в указанной резонансной области.

В случае, представленном на рис. 4, $\mu = 0$, а параметры $\varkappa$, $\varkappa_f$ при $\omega = 50$ МГц, $w = 2.5$ мм равны: $\varkappa/(\Delta\varphi)^2 \approx 0.0012$ (град)$^{-2}$, $\chi_f \approx 0.40$, т. е. выбрана «промежуточная» ситуация, когда значение $\varkappa_f$ по порядку величины близко к единице. Видно, что распределение амплитуды отраженного пучка имеет двугорбую форму. Для $\Delta\varphi = 20^\circ$ имеем $\varkappa \approx \varkappa_f$, при этом максимумы амплитуд отраженного и преломленного пучков на рис. 4 оказываются одного порядка. При этом величина I_r, характеризующая эффективность трансформации падающего пучка в преломленный,[6] имеет значение ≈ 0.8.

Рассмотрим интенсивность $|\mathbf{u}_s|$ волнового поля в подложке вблизи поверхности. Поскольку, согласно (30), (31), всегда $|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2| \gg |\mathbf{u}_t|$ при $|\Delta\varphi| \ll 1$ и коэффициентах C_t/C_s, $(\eta/\varkappa)^{1/2}$, по порядку величины не превышающих единицы, то $|\mathbf{u}_s| \approx |\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|$. Выражение для $|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|$ отличается от $|\mathbf{u}_t|$ лишь множителем, не зависящим от координаты, поэтому координата X_{max} максимума интенсивности $|\mathbf{u}_s|$ задается формулами (40) или (41), а соответствующее значение $|\mathbf{u}_s|_{max}$ равно

---

[6] Легко видеть, что величину I_r можно также записать в виде отношения нормальных компонент средних потоков энергии в падающем и отраженном пучках: $I_r = \langle P_{nr}\rangle / \langle P_{ni}\rangle$, где $\langle P_{nr}\rangle + \langle P_{nt}\rangle = \langle P_{ni}\rangle$, $\langle \ldots \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dX$.

$$|\mathbf{u}_s|_{\max}/C_s \approx \begin{cases} 2\varkappa_f & \text{при } |\gamma| \gg 1, \\ \varkappa_f/\sqrt{\pi}\ [(\varkappa_f+\varkappa)^2+\mu^2]^{1/2} & \text{при } |\gamma| \gg 1. \end{cases} \tag{46}$$

Согласно (46), $|\mathbf{u}_s|_{\max}/C_s \sim 1$ при $\varkappa_f \gg 1$, $\varkappa_f \gg \varkappa$, $|\mu|$. При уходе из резонансных условий, т. е. при $\varkappa$ или $|\mu| \gg 1$, χ_f, интенсивность поверхностного волнового поля падает.

4. Обсуждение результатов

В настоящей работе исследован эффект переключения полного отражения звука в полное прохождение на границе жидкость—подложка при малой разориентации плоскости падения относительно плоскости симметрии упругих свойств подложки, причем звук может падать на границу раздела как из жидкости, так и из подложки. Этот эффект обусловлен резонансом с псевдоповерхностной собственной модой, характеризующейся двойным оттеканием (в жидкость и в подложку) и порождаемой «быстрым» рэлеевским волновым решением ($v_R > v_L$; рис. 1) для свободной границы подложки. Как обычно, резонанс с оттекающей модой вызывает нарастание амплитуды поверхностного волнового поля в подложке. Проанализирована критическая зависимость данного явления от величины малого параметра $\rho_f v_f/\rho v_R$, от угла падения и ориентации плоскости падения, а также от частоты и ширины падающего пучка.

Отметим, что обсуждавшиеся в работе условия (в частности, плоскость падения расположена вблизи упругой симметрии подложки, а возможные значения угла падения заведомо ограничены неравенством $v_{L'} < v < v_L$; рис. 1) обеспечивает проявление резонансной трансформации отраженной волны в преломленную в наиболее яркой форме, когда при малой вариации параметров полное отражение сменяется полным прохождением. В принципе резкие изменения коэффициентов отражения и преломления на границе жидкость—подложка могут происходить в окрестности любых ветвей оттекающих волновых решений, существовавших на свободной поверхности подложки в отсутствие жидкости — в том числе и таких, существование которых не связано с выполнением указанных выше условий (см. примеры в [3, 4]). Рассмотрим более общий случай, когда тангенциальная проекция волнового вектора k_x оказывается близка к действительной части волнового вектора $k_l + ik_l'$ произвольной оттекающей волны, удовлетворявшей в отсутствие жидкости условию свободной поверхности подложки (k_l и k_l' — функции ориентации φ сагиттальной плоскости, причем $0 < k_l'/k_l \ll 1$, $v_{L'} < v_l = \omega/k_l < v_L, v_f$). Исходя из соотношения (13) и используя результаты работы [8], можно получить следующее приближенное выражение для коэффициента отражения:

$$R(k_x, \varphi) \approx i\,\frac{k_x - k_{l1} - i(k_l' - k_{lf}')}{k_x - k_{l2} - i(k_l' + k_{lf}')}, \tag{47}$$

где $k_{l1} = k_l - \beta\rho_f v_f/\rho v_l$, $k_{l2} = k_l + \beta\rho_f v_f/\rho v_l$, $k_{lf}'/k_l = \bar{\nu}\rho_f v_f/\rho v_l$; β, $\bar{\nu}$ — некоторые константы, причем $\bar{\nu} > 0$. Заметим, что в случае существования на ветви оттекающих волн $k_l(\varphi) + k_l'(\varphi)$ «чистой» точки φ_0, в которой $k_l'(\varphi_0) = 0$, зависимость $k_l'(\varphi) \sim (\Delta\varphi)^2$ при малых $\Delta\varphi \equiv (\varphi - \varphi_0)$ справедлива для любой анизотропии [8]. Из (47) видно, что при достаточно малых значениях параметра $\rho_f v_f/\rho v_l$ зависимость коэффициента отражения от угла падения для определенных ориентаций φ плоскости падения имеет резкий минимум; в частности, величина R в точке минимума $k_x = k_l$ обращается в нуль, если $k_l' = k_{lf}'$.

При этом ясно, что, вообще говоря, это условие вполне может выполняться для «обычных» жидкостей (т. е. не только для жидкого азота и жидкого гелия, рассматривавшихся в настоящей работе при численных расчетах).

Резонансные эффекты аналогичного типа могут возникать, конечно, и при отражении от границы раздела твердых тел. Теория резонансного отражения для пьезоэлектрических биокристаллов с произвольной анизотропией развита в [9], а примеры эффекта трансформации полного отражения в полное прохождение рассмотрены в [18, 19] соответственно на границе гексагональных пьезоэлектриков, жестко связанных или разделенных щелью, и на границе между 180°-сегнетоэлектрическими доменами.

Авторы признательны С. В. Кара-Мурза за полезное обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим границу раздела жидкость—кристалл и допустим, что сагиттальная плоскость $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ совпадает с плоскостью симметрии подложки или ортогональна оси симметрии четного порядка, причем внешняя полость рефракции в подложке отвечает горизонтально поляризованной моде (рис. 1). Тогда в силу «отщепления» этой моды локализованная на границе волна типа волны Стоунли поляризована в сагиттальной плоскости и является трехпарциальной

$$\mathbf{u} = e^{ik_x(x - vt)} \begin{cases} b_0 \mathbf{A}_0 e^{ik_x p_0 y}, & y > 0, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{2} b_\alpha \mathbf{A}_\alpha e^{ik_x p_\alpha y}, & y < 0, \end{cases} \tag{48}$$

где $p_0 = i\,(1 - v^2/v_f^2)^{1/2}$, $\operatorname{Im}(p_\alpha) < 0$. Скорость данной волны $v < v_f$, $v_{L'}$ (рис. 1) определяется дисперсионным уравнением

$$Q(v) \equiv [\tilde{\zeta}_0 \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_2] = 0, \tag{49}$$

вытекающим из граничных условий

$$b_0 \tilde{\zeta}_0 = \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha \tilde{\zeta}_\alpha. \tag{50}$$

где в соответствии с (7)

$$\tilde{\zeta}_0 = \begin{pmatrix} \mathscr{A}_{0y} \\ 0 \\ \mathscr{L}_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\zeta}_\alpha = \begin{pmatrix} A_{\alpha y} \\ L_{\alpha x} \\ L_{\alpha y} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{51}$$

Квадратные скобки в (49) обозначают детерминант (3×3)-матрицы, которая составлена из компонент векторов, заключенных в эти скобки. Параметры $\mathscr{A}_{0y}$, $\mathscr{L}_0$ поверхностной волновой моды в жидкости вычисляются по формуле (3), в которой величина p_l заменяется на p_0.

Несмотря на то что векторы $\tilde{\zeta}_0$, $\tilde{\zeta}_\alpha$ являются комплексными, уравнение (49) при $v < v_f$, $v_{L'}$ сводится к одному действительному уравнению [20]. Это утверждение можно доказать следующим образом. Для параметров $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{L}_\alpha$ волновых мод $\alpha = 1$, 2, распространяющихся в симметричной плоскости подложки и поляризованных в этой плоскости, известные соотношения полноты [6] с учетом «отщепления» горизонтально поляризованной моды записываются при $\nu < \nu_{L'}$ в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \begin{pmatrix} L_{\alpha x} \\ L_{\alpha y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{\alpha x} \\ L_{\alpha y} \end{pmatrix} + \text{к. с.} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{2} \begin{pmatrix} A_{\alpha x} \\ A_{\alpha y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{\alpha x} \\ A_{\alpha y} \end{pmatrix} + \text{к. с.} = 0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \begin{pmatrix} A_{\alpha x} \\ A_{\alpha y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{\alpha x} \\ L_{\alpha y} \end{pmatrix} + \text{к. с.} = 0, \tag{52}$$

где точка обозначает диадное произведение, к. с. — комплексно-сопряженные члены. Из (50), а также из выражений для величин $\mathscr{A}_{0y}$, $\mathscr{L}_0$, входящих в определение вектора $\tilde{\xi}_0$ следует, что матрица $\hat{Z} \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} \tilde{\xi}_\alpha \cdot \tilde{\xi}_\alpha - \tilde{\xi}_0 \cdot \tilde{\xi}_0$ при $\nu < \nu_f$, $\nu_{L'}$ удовлетворяет соотношению $\hat{Z} = -\hat{Z}^*$, т. е. $\mathrm{Re}\,(\hat{Z}) = 0$ и $\mathrm{Im}\,(\det \hat{Z}) = 0$. С другой стороны, легко видеть, что $Q^2(\nu) \equiv (Q' + iQ'')^2 = -\det \hat{Z}$, следовательно, $\mathrm{Im}\,[Q^2(\nu)] = 0$. Отсюда вытекает искомое утверждение, поскольку

$$\text{либо } Q'(\nu) \equiv 0,$$

$$\text{либо } Q''(\nu) \equiv 0. \tag{53}$$

Представим теперь величину $Q(\nu)$ с помощью соотношений (49), (51) в виде

$$Q(\nu) = \frac{1}{\nu (2\rho_f p_0)^{1/2}} [p_0 D_1 + (\rho_f/\rho) D_2], \tag{54}$$

где D_1, D_2 — детерминанты (2×2)-матриц

$$D_1 = [\mathrm{l}_1 \mathrm{l}_2], \; D_2 = \rho \nu^2 [\mathrm{g}_1 \mathrm{g}_2]; \; \mathrm{l}_\alpha \equiv \begin{pmatrix} L_{\alpha x} \\ L_{\alpha y} \end{pmatrix}, \; \mathrm{g}_\alpha \equiv \begin{pmatrix} A_{\alpha x} \\ L_{\alpha y} \end{pmatrix}, \; \alpha = 1, 2. \tag{55}$$

Заметим, что для $\nu < \nu_{L'}$ в соответствии с (52) выполняется равенство $\sum_{\alpha=1}^{2} \mathrm{g}_\alpha \cdot \mathrm{g}_\alpha + \text{к. с.} = 0$. Используя тождества $[\mathrm{l}_1 \mathrm{l}_2]^2 = \det \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \mathrm{l}_\alpha \cdot \mathrm{l}_\alpha \right)$, $[\mathrm{g}_1 \mathrm{g}_2]^2 = \det \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \mathrm{g}_\alpha \cdot \mathrm{g}_\alpha \right)$, получаем

$$\mathrm{Re}\,[D_j^2(\nu)] = (D_j'^2 - D_j''^2) = 0, \; j = 1, 2. \tag{56}$$

Учитывая свойство (53) и принимая во внимание, что для $\nu < \nu_f$ величина p_0 является чисто мнимой, получаем $D_1' = D_1''$, $D_2' = -D_2''$ при $Q' \equiv 0$; $D_1' = -D_1''$, $D_2' = D_2''$ при $Q'' \equiv 0$. Следовательно, для функций D_1, D_2 справедливо следующее представление:

$$D_1(\nu) = e^{i\Psi} d_1(\nu), \quad D_2(\nu) = e^{i\Psi} i d_2(\nu), \tag{57}$$

где d_1, d_2 — действительные функции, а Ψ — постоянная фаза (равная $\pm\pi/4$). Отсюда вытекает, что определенная соотношением (9) функция $F(v) = D_1/D_2$ является чисто мнимой.

Выражения (57) получены при условии $v < v_f$, $v_{L'}$. Однако, согласно (53), функции D_1, D_2 никак не зависят от параметров жидкости, контактирующей с твердым телом. Таким образом, $F(v)$ — чисто мнимая функция для любого значения скорости $v < v_{L'}$ независимо от соотношения v и v_f.

Список литературы

[1] Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
[2] Bertoni H. L., Tamir T. // J. Appl. Phys. 1973. V. 2. P. 157.
[3] Atalar A. // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 73. P. 435.
[4] Arikan O., Telatar E., Atalar A. // J. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 85. P. 1.
[5] Qu J., Achenbach J. D., Roberts R. A. // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. 1989. V. 36. P. 280.
[6] Stroh A. N. // J. Math. Phys. 1962. V. 41. P. 77.
[7] Альшиц В. И., Даринский А. Н., Котовски Р. К., Шувалов А. Л. // Кристаллография. 1988. Т. 33. С. 541.
[8] Alshits V. I., Lothe J. // Wave Motion. 1981. V. 3. P. 297.
[9] Альшиц В. И., Даринский А. Н., Шувалов А. Л. // Кристаллография. 1992. Т. 37.
[10] Лоте Е., Альшиц В. И. // Кристаллография. 1977. Т. 22. С. 906.
[11] Волнянский М. Д., Гржегоржевский О. А. // Кристаллография. 1977. Т. 22. С. 406.
[12] Волнянский М. Д., Гржегоржевский О. А. // ФТТ. 1976. Т. 18. № 3. С. 854.
[13] Chiang T. C., Dumas J., Shen Y. R. // Solid State Commun. 1978. V. 28. P. 173.
[14] Искендер-Заде З. А., Фараджев В. Д., Агаев А. И. // ФТТ. 1977. Т. 19. № 3. С. 851.
[15] Boekholt M., Harzer J. V., Hillebrands B., Cüntherodt G. // Physica C. 1991. V. 179. P. 101.
[16] Hart S. // Phys. Stat. Sol. 1973. V. 17. P. K107.
[17] Арапов А. В., Гончаров В. С., Яковкин И. Б. // Акуст. журн. 1986. Т. 32. С. 238.
[18] Альшиц В. И., Даринский А. Н., Шувалов А. Л. // Материалы XI Всесоюзной акустической конференции. М., 1991. Секция В. С. 59.
[19] Alshits V. I., Darinskii A. N., Shuvalov A. L. // Ferroelectrics. 1992 (in press).
[20] Barnett D. M., Gavazza S. D., Lothe J. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1988. V. 415. P. 389.

Институт кристаллографии РАН
Москва

Поступило в Редакцию
12 марта 1992 г.