ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПОРЯДОК—ПОРЯДОК В БЭГ МОДЕЛИ

Н. С. Ананикян, К. Ш. Измаилян, Р. Р. Щербаков

Просчитана свободная энергия в Блюм—Эмери—Гриффтс модели на решетке Бете. Вычислены критические индексы в точке фазового перехода второго рода типа порядок—порядок.

Модель Изинга со спином 1, известная как Блюм—Эмери—Гриффтс модель (БЭГ) [1], сформулированная на бесконечномерной решетке Бете [2, 3], качественно и количественно описывает низкотемпературные критические свойства следующих систем: класс анизотропных антиферромагнетиков ($FeCl_2$, $FeBr_2$, $Ni(NO_3) \cdot 2H_2O$ и т. д.), раствор двух изотопов гелия (^3He и ^4He), многокомпонентные жидкие растворы, микроэмульсия и высокотемпературные сверхпроводники [4—6].

Трикритические свойства в двумерной непрерывной конформной теории поля с применением гипотезы подобия (скейлинга) даны в [7].

В настоящей работе найдено точное значение свободной энергии БЭГ модели на решетке Бете. Также вычислены критические индексы, соответствующие точке C фазового перехода второго рода типа порядок—порядок [8], существующей наряду с λ-линией, которая определяет фазовый переход второго рода типа порядок—беспорядок, заканчивающейся в трикритической точке [3].

Статистическая сумма данной модели имеет вид

$$Z_N = \sum_{\{s\}} \exp\left\{\sum_{\langle i,j\rangle} [Js_is_j + Ks_i^2s_j^2] + \sum_i [-\Delta s_i^2 + hs_i]\right\}, \tag{1}$$

где каждый спин s_i принимает значения 0, ± 1, а суммирования под знаком экспоненты идут по всем взаимодействующим между собой узлам решетки, внешнее суммирование — по всем спиновым конфигурациям системы, N — число узлов решетки.

На решетке Бете ее можно записать в следующем виде [3]:

$$Z_N = \sum_{s_0} \exp[-\Delta s_0^2 + hs_0]\,[g_l(s_0)]^q, \tag{2}$$

где q — координационное число решетки, s_0 — значение спина в центральном узле, $g_l(s_0)$ — является статистической суммой на отдельной ветви решетки Бете, а l — число оболочек решетки.

В статьях [2, 3] получены точные рекуррентные уравнения (в пределе $l \to \infty$):

$$\exp(2\Delta) = \frac{4(\beta - u)^2}{u^2 - \alpha^2 v^2} \cdot [(u+1)^2 - v^2]^{\gamma}, \tag{3}$$

$$\exp(2h) = \frac{u - \alpha v}{u + \alpha v} \cdot \left[\frac{u+1+v}{u+1-v}\right]^{\gamma}, \tag{4}$$

где

$$u = \frac{g(-1) + g(+1) - 2 \cdot g(0)}{2 \cdot g(0)}, \quad v = \frac{g(-1) - g(+1)}{2 \cdot g(0)},$$
$$\alpha = \frac{\exp K \operatorname{ch} J - 1}{\exp K \operatorname{sh} J}, \quad \beta = \exp K \operatorname{ch} J - 1, \quad \gamma = q - 1.$$

В модели имеются два параметра порядка, сопряженные двум внешним полям h и Δ $\left(m = \frac{1}{N}\sum_i \langle s_i\rangle\right.$ — дипольный момент и $p = \frac{1}{N}\sum_i \langle s_i^2\rangle$ — квадрупольный момент$\left.\right)$, которые определяются выражениями [3]:

$$m = -v \cdot \frac{u(1+\alpha) + \alpha}{\beta + u^2 + \alpha v^2}, \quad 1 - p = \frac{\beta - u}{\beta + u^2 + \alpha v^2}.$$

Свободная энергия f, приходящаяся на один узел при заданной температуре T, является функцией Δ и h, т. е. $f = f(h, \Delta)$.

Используя соотношения (3), (4) и выражения для m и p, а также что $\frac{\partial f}{\partial h} = -m$ и $\frac{\partial f}{\partial \Delta} = p$, нетрудно получить

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (\gamma - 1) \cdot \frac{u}{\beta + u^2 + \alpha v^2} - \frac{1}{\beta - u}, \tag{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = (\gamma - 1) \cdot \frac{\alpha \cdot v}{\beta + u^2 + \alpha v^2}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$f/k_BT = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \ln\,[\beta + u^2 + \alpha v^2] + \ln\,[\beta - u] + \text{const}. \tag{7}$$

Чтобы определить константу, рассмотрим условия: $m = 0$ $(h = 0)$ и $p = 1$ $(\Delta = -\infty)$. Из выражения (1) видно, что при больших отрицательных Δ вклад спинов с нулевыми значениями в статистическую сумму подавлен. Следовательно, свободная энергия на один узел принимает вид (8).

$$f/k_BT = -\frac{\gamma + 1}{2} K + \ln \frac{2(\beta - u)(u+1)^\gamma}{u} - \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln \sum_{\{s\}} \exp\left[J \sum_{\langle i, j\rangle} s_i s_j\right] \tag{8}$$

Поскольку последний член в (8) является свободной энергией для $z(2)$ модели, выражение которой приведено в [9], то

$$f/k_BT = -\frac{\gamma + 1}{2} K + \ln \frac{2(\beta - u)(u+1)^\gamma}{u} + \frac{\gamma - 1}{2} \ln 2 - \frac{\gamma + 1}{2} \ln\,[2 \operatorname{ch} J]. \tag{9}$$

Сравнивая (7) и (9), окончательно получаем (10).

$$f/k_BT = \frac{\gamma - 1}{2} \ln\,[\beta + u^2 + \alpha v^2] + \ln\,[\beta - u] - \frac{\gamma + 1}{2} \ln \beta \tag{10}$$

Приведенный вывод выражения (10) является универсальным и применим для $Z(Q)$ модели с различными Q. В частности, при $Q=3$ мы имеем БЭГ модель.

В статье [3] приведены фазовые диаграммы модели в осях $T—\Delta$ и $T—p$ с указанием всех линий фазовых переходов.

При достаточно больших значениях квадрупольного взаимодействия K/J происходит фазовый переход в точке C типа порядок—порядок. Данный переход определяется внешним полем Δ (при условии $h=0$, $m=0$). В отличие от фазового перехода порядок—беспорядок ($m \neq 0$, и $m=0$) в точке C происходит фазовый переход по параметру порядка p, а параметр $m=0$. Из условий $\frac{\partial \Delta}{\partial u}=0$, $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u^2}=0$, где $\Delta = \ln \frac{2(\beta-u)(u+1)^\gamma}{u}$, получаем следующие значения параметров, характеризующих точку C: $\beta_c = \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}$, $u_c = \frac{2}{\gamma-1}$, $\Delta_c = \ln\left[2\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\gamma+1}\right]$, $p_c = \frac{1}{2}$.

Положим: $T=T_c(t+1)$ при условии $h=0$, тогда получим следующее разложение вблизи точки C:

$$\Delta - \Delta_c = -\frac{(\gamma-1)^3 \exp K_c\,[K_c \operatorname{ch} J_c + J_c \operatorname{sh} J_c]}{4(\gamma+1)} \times$$
$$\times\, t\theta - \frac{\gamma(\gamma^2-1)}{2}\theta^3 + O(t^2\theta,\ t\theta^2,\ \theta^4). \tag{11}$$

Из выражения для p следует, что $\theta = \frac{4}{\gamma+1}|p-p_c| + O(p-p_c|,\ |p-pc)^2$, поэтому окончательно получаем

$$\frac{\Delta-\Delta_c}{k_B T_c} = |p-p_c|^3 h_s(x),$$

где $x = t|p-p_c|^2$, $h_s(x) = -\frac{(\gamma-1)^3}{(\gamma+1)^2}\exp K_c\,[K_c \operatorname{ch} J_c + J_c \operatorname{sh} J_c]x - \frac{32\gamma(\gamma^2-1)}{(\gamma+1)^3}$ — функция скейлинга, $u-u_c=(u_c+1)\vartheta$.

Таким образом, на основании гипотезы подобия мы получили следующие критические индексы $\delta=3$ и $\beta=1/2$. Поскольку в точке фазового перехода второго рода типа порядок—порядок $n=2$ и $d^*=2+\frac{2}{n-1}$ [10], то полученные критические индексы являются «классическими», так как решетка Бете имеет бесконечномерную хаусдорфову размерность.

Полученные в частном случае $k=0$ методом среднего поля результаты для модели Изинга со спином 1 [1] в пределе $q\to\infty$ хорошо согласуются с аналитическим точным решением, полученным в данной работе.

При исследовании $Z(4)$ модели получается поверхность фазовых переходов второго рода, пересекающихся в трикритической линии, которая оканчивается тетракритической точкой, например наблюдаемой в растворе $K_2Mn_{1-x}Fe_xF_4$ [11]. С этой точки зрения интересно найти аналог точки C, что будет сделано в последующей работе.

Список литературы

[1] Blume M., Emery V., Griffiths R. B. // Phys. Rev. A. 1971. N 4. P. 1071—1077.
[2] Avakian A. R., Ananikian N. S., Izmailian N. Sh. // Phys. A. 1990. V. 150. N 3, 4. P. 163—165.
[3] Ananikian N. S., Avakian A. R., Izmailian N. Sh. // Physica A. V. 172. N 2. P. 391—405.
[4] Lawrie L. D., Sarbach S. // Phase Transition and Critical Phenomena / Ed. C. Domb, J. Lebowits. N. Y.: Acad. Press, 1984. V. 9.
[5] Gompper G., Schick M. // Phys. Rev. B. 1990. V. 41. P. 9148—9162.
[6] Cannon J. W., Fradkin E. // Phys. Rev. B. 1990. V. 41. P. 9435—9443.
[7] Lassig M., Mussardo G., Cardy J. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 348. P. 591—597.
[8] Buzano C. // Physica A. 1988. V. 150. P. 54—76.
[9] Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985. С. 63.
[10] Замолодчиков А. В. ЯФ. 1986. Т. 44. С. 821—827.
[11] Bevaart L., Frikkee E., Lebesque J. V., de Jongh L. J. // Sol. State Comm. 1978. V. 25. P. 539—542.

Ереванский физический институт

Поступило в Редакцию
6 мая 1991 г.
В окончательной редакции
22 июня 1992 г.