БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА И ХАОС В МОДЕЛИ ТЕМПЕРАТУРНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ С ДВУМЯ УРОВНЯМИ ПРИЛИПАНИЯ

Голик Л. Л., Гутман М. М., Паксеев В. Е.

Проведено численное исследование модели температурно-электрической неустойчивости в полупроводнике с двумя уровнями прилипания. Получены сложные регулярные и непериодические решения и цепочка бифуркаций удвоения периода, приводящая к возникновению хаоса. Достигнуто хорошее качественное и количественное соответствие с результатами эксперимента.

В [1] сообщалось об экспериментальном обнаружении стохастических автоколебаний фототока ($I_ф$) и температуры (T) в кристаллах CdS в условиях температурно-электрической неустойчивости (ТЭН). Переход от регулярных автоколебаний к хаотическим происходил по сценарию Фейгенбаума [2], а в пространстве параметров, соответствующем хаотическим колебаниям, существовали узкие области, в которых наблюдались сложные регулярные режимы. Для описания ТЭН в полупроводнике предложены две модели. Простейшая модель [3] представляет собой систему трех дифференциальных уравнений, определяющих динамику концентраций электронов в зоне проводимости (n), на уровне прилипания (n_t) и температуры кристалла (T). Модель [4] включает в рассмотрение еще два типа локальных центров, описывающих температурное гашение фотопроводимости (ТГФ) в материалах $A^{II}B^{VI}$. Численный анализ ТЭН с использованием модели [3], в которой ТГФ определялось путем введения зависимости времени жизни электронов τ_r от T [5, 6], показал, что эта модель хорошо описывает бо́льшую часть экспериментально наблюдаемых однотактных автоколебательных и триггерных режимов поведения $I_ф$ и T в CdS [7-9]. Попытки получить на основе данной модели решения в виде сложных регулярных и хаотических автоколебаний успеха не имели.

В [10] было высказано предположение, что одной из причин, усложняющих характер автоколебаний $I_ф$ и T в полупроводнике в условиях ТЭН, является наличие нескольких уровней прилипания, что отмечалось в экспериментальных работах по исследованию ТЭН в CdS [7, 8, 10]. Численное исследование модели ТЭН, подобной приведенной в [3] для полупроводника с двумя уровнями прилипания, показало [10], что для выбранной зависимости $\tau_r(T)$ при некоторых значениях параметров имеют место непериодические решения. Однако в отличие от эксперимента [1], во-первых, интервалы значений изменяемого параметра (напряженности электрического поля), внутри которых существовали эти решения, были очень малыми ($\Delta E \approx 10^{-4} E$), во-вторых, переход от регулярных режимов к стохастическим был жестким. Поскольку сценарий возникновения стохастических автоколебаний является одной из важнейших характеристик модели, описывающей хаос, вопрос о возможности определения экспериментально наблюдаемой стохастической динамики ТЭН в CdS с помощью модели [10] остался открытым.

Для выяснения возможности описания экспериментальных результатов [1] с помощью модели с двумя уровнями прилипания нами был проведен более тщательный по сравнению с [10] анализ данной модели. Применялась методика анализа периодических решений с целью определения возможности существования бифуркаций удвоения периода [11], что позволило более целенаправленно вести поиск. Кроме того, исследования проводились в более широкой области значений величин параметров модели. Результаты исследований, представленные в данной работе, показывают, что в модели ТЭН в полупроводнике с двумя типами уровней прилипания возможно существование сложных регулярных и непериодических решений, а также цепочки бифуркаций удвоения периода, приводящей к возникновению хаоса.

По аналогии с [3] модель ТЭН в полупроводнике с двумя типами уровней прилипания можно записать следующим образом:

$$\frac{dn}{dt} = L - \frac{n}{\tau_r} - \sum_{i=1,\,2} \frac{dn_{ti}}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{dn_{ti}}{dt} = \gamma_i n (N_{ti} - n_{ti}) - \gamma_i n_{ti} N_{cti}, \quad (i = 1,\ 2), \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dt} = Cn - \frac{1}{\tau_0}(T - T_0), \tag{3}$$

где γ_i — вероятность захвата электрона ловушкой i-го типа, $N_{cti} = N_c \times \exp(-E_i/kT)$, N_c — эффективная плотность состояний в зоне проводимости, E_i — энергия ионизации ловушки, N_{ti} — концентрация ловушек, L — количество электронов, возбуждаемых светом в единице объема в единицу времени, $C = e\mu E^2/\rho c_V$, μ — подвижность электрона, E — приложенное электрическое поле, c_V и ρ — теплоемкость и плотность фотопроводника, T_0 — температура окружающей среды, τ_0 — параметр, характеризующий остывание кристалла. Темновой концентрацией электронов в зоне проводимости и на уровнях прилипания, а также разогревом образца вследствие рекомбинации электронов пренебрегаем. Аналогично [5] система (1)—(3) может быть записана в виде

$$\varepsilon_1 \frac{d\bar{n}}{d\tau} = 1 - \bar{n} + \sum_{i=1,\,2} \varepsilon_{2i} \left\{ \frac{\bar{n}_{ti}}{1+\beta_i} \exp\left[\alpha_i \varepsilon_T \left(1 - \frac{1}{\bar{T}}\right)\right] - \bar{n}\left(1 - \frac{\beta_i}{1+\beta_i}\bar{n}_{ti}\right)\right\}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{3i} \frac{d\bar{n}_{ti}}{d\tau} = \bar{n}(1 + \beta_i - \beta_i \bar{n}_{ti}) - \bar{n}_{ti} \exp\left[\alpha_i \varepsilon_T \left(1 - \frac{1}{\bar{T}}\right)\right], \quad (i = 1,\ 2), \tag{5}$$

$$\varepsilon_4 \frac{d\bar{T}}{d\tau} = \bar{n}(1 - \varepsilon_T) - \bar{T} + \varepsilon_T, \tag{6}$$

где $\tau = t/\tau_{B1}$, $\bar{n} = n/n_s$, $\bar{T} = T/T_s$, $\bar{n}_{ti} = n_{ti}/n_{tis}$,

$$n_s = L\tau_r, \quad n_{tis} = \frac{n_s N_{ti}}{n_s + N_{cti}(T_s)}, \quad T_s = T_0\left(1 + \frac{C n_s \tau_0}{T_0}\right)$$

— стационарные решения системы (1)—(3), $\varepsilon_1 = \tau_r/\tau_{B1}(T_s)$, $\varepsilon_{2i} = \tau_r/\tau_{ti}$, $\varepsilon_{3i} = \tau_{Bi}(T_s)/\tau_{B1}(T_s)$, $\varepsilon_4 = \tau_0 \tau_{B1}(T_s)$, $\varepsilon_T = T_0/T_s$, $\alpha_i = E_{ti}/kT_0$, $\beta_i = \varepsilon_{2i}[L\tau_{Bi}(T_s)/N_{ti}]$, $\tau_{ti} = 1/\gamma_i N_{ti}$, $\tau_{Bi} = 1/\gamma_i N_{cti}$ — параметры с размерностью времени, характеризующие соответственно захват электронов на ловушки и выброс их из ловушек в зону проводимости.

В системе (4)—(6) могут быть выделены подсистемы быстрых и медленных движений. Поскольку $\varepsilon_1 \ll 1$, ε_{3i} и $\varepsilon_4 \gg 1$, а члены в правых частях уравнений порядка единицы, уравнение (4) системы описывает быстрые движения, а (5)—(6) — медленные. Поэтому систему (4)—(6) можно редуцировать до трех уравнений [12], а из (4), опустив производную, получить решение

$$\bar{n} = \frac{\dfrac{\tau_r(T)}{\tau_r(T_s)} + \sum\limits_{i=1,\,2} \dfrac{\varepsilon_{2i}(T)}{1+\beta_i} \bar{n}_{ti} \exp\left[\alpha_i \varepsilon_T \left(1 - \dfrac{1}{\bar{T}}\right)\right]}{1 + \sum\limits_{i=1,\,2} \varepsilon_{2i}(T)\left(1 + \dfrac{\beta_i}{1+\beta_i}\bar{n}_{ti}\right)}. \tag{7}$$

При всех возможных фиксированных $\bar{n}_{t1}$, $\bar{n}_{t2}$ и $\bar{T}$ решение $\bar{n} = f(\bar{n}_{ti}, \bar{T})$ является устойчивым положением равновесия быстрой системы. Физический смысл операции редуцирования следующий. Согласно [13], при отклонении от равновесия величина n за время порядка τ_{ti} или τ_r (в зависимости от соотношения τ_r/τ_{ti}) возвращается к квазиравновесному значению, определяемому заполнением ловушек. Возвращение к равновесному значению величин n_{ti} при отклонении их от равновесия происходит за времена освобождения и заполнения ловушек $\left(\tau_r \dfrac{\tau_{Bi}}{\tau_{ti}}\right.$ или $\left.\tau_{Bi}\right)$, значительно бо́льшие, чем τ_{ti}, τ_r. Редуцированная система не описывает быстрые изменения переменных на временах τ_r, τ_{ti}, однако, так как характерные времена экспериментально наблюдаемых автоколебаний тока в CdS в условиях ТЭН в зависимости от параметров соответствуют $1-10^3$ с, редуцированная система должна правильно описывать эти процессы.

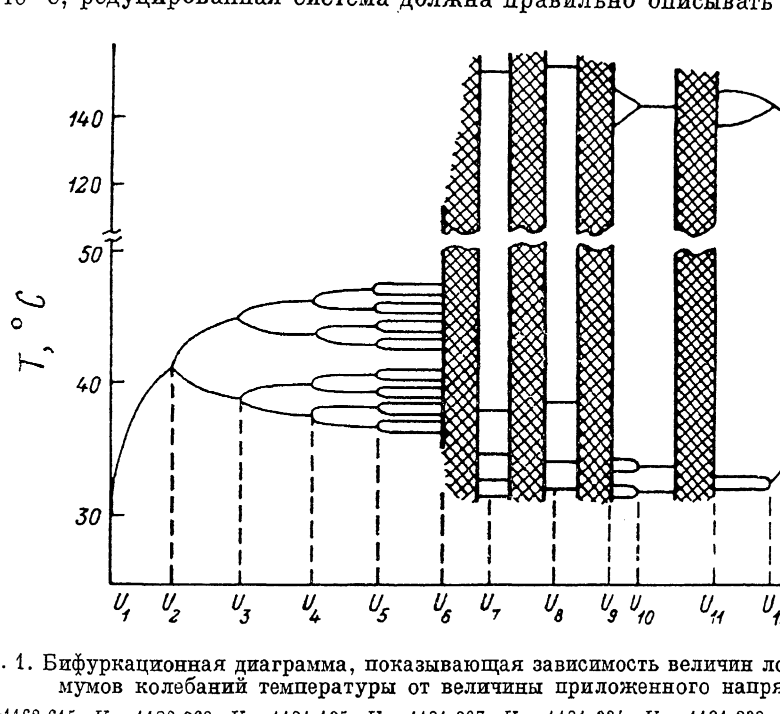

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма, показывающая зависимость величин локальных максимумов колебаний температуры от величины приложенного напряжения.

$U_1=1168.615$, $U_2=1180.369$, $U_3=1181.135$, $U_4=1181.307$, $U_5=1181.334$, $U_6=1181.339$, $U_7=1183.478$, $U_8=1186.681$, $U_9=1194.31$, $U_{10}=1194.314$, $U_{11}=1206.595$, $U_{12}=1206.742$, $U_{13}=1244.322$ В. Параметры: $T_0=283$ К, $N_{t_1}=8\cdot10^{15}$, $N_{t_2}=3.5\cdot10^{14}$ см$^{-3}$, $E_1=5000$, $E_2=6000$ К, $\gamma_1=1.79\cdot10^{-13}$, $\gamma_2=7\cdot10^{-12}$ см^3/с, $\mu=100$ см/В $\cdot$ с, $\rho=5$ г/см^3, $c_v=0.2$ Дж/г $\cdot$ К, $\tau_0=1$ с, $L=2\cdot10^{13}$ см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$, $T_N=25$, $T_Q=380$ К, $\tau_{r0}=4.5\cdot10^{-4}$, $\tau_{rm}=0$ с.

Численно исследовалась система уравнений (5)—(7). Вычисление траекторий в фазовом пространстве проводилось методом Рунге—Кутта 4-го порядка, а анализ периодических решений на неустойчивость — путем нахождения значений мультипликаторов, вычисленных методом Данилевского [11]. Значения параметров исследуемой системы выбирались согласно данным экспериментальных работ по стохастической динамике ТЭН в CdS [1, 9] и исследований уровней прилипания в CdS [7, 14]. Функция $\tau_r(T)$ в общем случае, как и в [10], аппроксимировалась выражением

$$\tau_r(T)=\tau_{r0}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{T-T_Q}{T_N}\right)+1}-\tau_{rm}\exp\left[-\frac{(T-T_M)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (8)$$

где первый член описывает явление ТГФ, а второй — локальный максимум на температурной зависимости фотопроводимости перед началом ТГФ, который наблюдается на зависимостях $I_ф(T)$ кристаллов CdS, демонстрирующих ТЭН (см., например, [7]). Величины τ_{r0}, τ_{rm}, T_Q, T_N, T_M и σ характеризуют конкретный вид функции $\tau_r(T)$. Согласно [10], наличие второго члена в $\tau_r(T)$ являлось необходимым условием получения непериодических решений. В данной работе анализ проводился для случаев с τ_{rm}, равным нулю и отличным от нуля.

Результаты показывают, что при выборе соответствующих параметров стохастические режимы возможны и при отсутствии в (8) второго члена.

В результате проведенных исследований найдено, что модель имеет решения в виде сложных регулярных и стохастических автоколебаний, причем переход

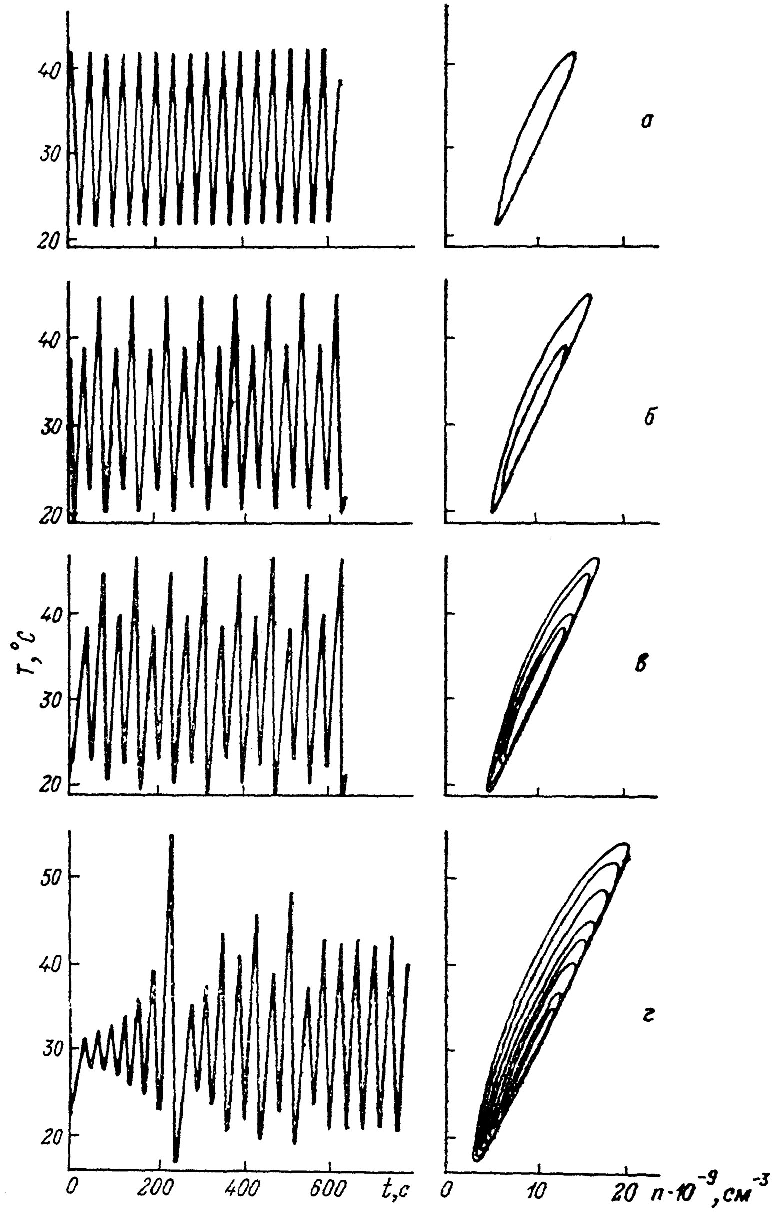

Рис. 2. Временны́е реализации T (t) и проекции фазовых портретов на плоскость (n, T) ряда режимов бифуркационной диаграммы (рис. 1).

U, В: *а* — 1180.12, *б* — 1181.05, *в* — 1181.3, *г* — 1181.61.

от регулярных однотактных колебаний к стохастическим при изменении параметра E происходит через бифуркации удвоения периода колебаний при движении в область хаоса со стороны как больших, так и малых значений E.

На рис. 1 представлена одна из последовательностей динамических режимов, полученная при изменении E и фиксированных значениях остальных параметров. На оси ординат отложены значения температуры кристалла в максимумах колебаний. Для удобства сравнения полученных решений с результатами эксперимента ([1]; рис. 1, 2) на оси абсцисс указаны значения напряжения, падающего на кристалле, при расстоянии между электродами 1 мм. На рис. 2 показаны временны́е реализации $T(t)$ и фазовые портреты на плоскости $n—T$ ряда режимов последовательности (рис. 1), соответствующие переходу от регулярных однотактных автоколебаний к хаотическим при возрастании величины U. Внутри области хаоса найдены малые интервалы значений U ($\Delta U \sim 1$В), соответствующие регулярным пяти-, четырех-, шести-, трехтактным автоколебаниям. Возможно существование и других «окон» периодических режимов в области хаоса, однако их поиск связан с большими затратами машинного времени. С ростом U наблюдаются рост амплитуд колебаний и изменение их формы от квазигармонической к релаксационной. Сравнение вышеописанных результатов с результатами эксперимента [1] свидетельствует о достижении хорошего качественного и количественного их совпадения.

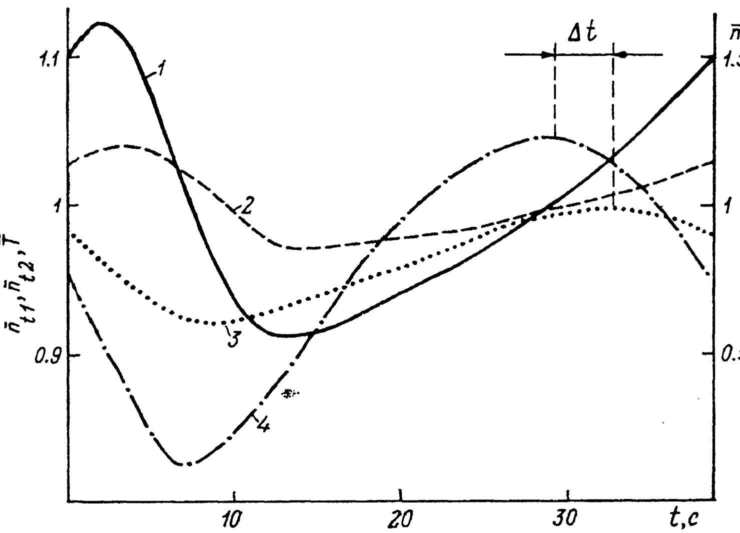

Рис. 3. Зависимость исследуемых переменных от времени на протяжении одного периода однотактного колебания вблизи бифуркации удвоения периода.

1 — $\bar{n}$ (n_s=8.882·10^9 см$^{-3}$), *2* — $\bar{T}$ (T_s=302.799 К), *3* — $\bar{n}_{t2}$ (n_{t2s}=2.246·10^{14} см$^{-3}$), *4* — $\bar{n}_{t1}$ (n_{t1s}=4.945×10^{14} см$^{-3}$); U=1180.36 В.

Проведено исследование зависимости характера получаемых решений от параметра τ_{t2} (γ_2) второго (N_{t2}) уровня, показавшее, что возникновение бифуркаций удвоения периода и существование относительно широкой области стохастических решений имеют место для случаев, когда $\tau_{t2} \geqslant \tau_r (T_s) > \tau_{t1}$. Так, варьирование параметра τ_{t2} в диапазоне $7 \cdot 10^{-7}—10^{-5}$ с при сохранении величин остальных параметров равными значениям, указанным в подписи к рис. 1, показало, что при движении по параметру U с шагом 1 В (в области U=1—2 кВ) непериодические решения не наблюдались, а имел место постепенный переход от однотактных квазигармонических колебаний малой амплитуды к однотактным колебаниям большой амплитуды и релаксационной формы. При $\tau_{t2}=2 \cdot 10^{-4}$ с возникает узкая область ($\Delta U \sim 1$ В) непериодических решений, которая расширяется при дальнейшем росте τ_{t2}.

Согласно [3, 4], возникновение ТЭН в полупроводнике связано с заполнением возбужденными фотоэлектронами уровней прилипания и последующим лавинообразным выбросом этих электронов в зону проводимости за счет джоулева разогрева. Возникновение автоколебаний в модели с используемыми в работе параметрами ловушек связано с лавинообразным возбуждением электронов с уровня N_{t1}. Наличие второго уровня (N_{t2}) с иными по отношению к N_{t1} характеристиками (N_{t2}, E_2, γ_r) приводит к включению в процесс развития неустойчивости перезарядки уровня N_{t2} и изменению процессов перезарядки уровня N_{t1}. Пример временны́х зависимостей n_{t_i}, n, T на протяжении одного периода однотактных колебаний показан на рис. 3. Для U, близких к пороговым значениям возникновения неустойчивости, изменения n_{t2} связаны с изменениями T, вызываемыми лавинным опустошением N_{t1}, и колебания n_{t1} и n_{t2} почти синфазны. При дальнейшем росте U увеличиваются выброс электронов из второй ловушки и вклад их в разогрев образца, причем вследствие выбранных соотношений характерных времен ловушек величина n_{t2} в максимуме ($n_{t2\,\max}$) уменьшается и возникает задержка (Δt) достижения $n_{t2\,\max}$ относительно $n_{t1\,\max}$, Δt увеличивается с ростом U. Такое протекание процессов приводит к тому, что на протяжении интервала Δt (рис. 3) уровни N_{t2} захватывают на себя часть носителей, выброшенных из N_{t1}, и тормозят развитие лавины, однако в следующем интервале выброс носителей из N_{t2} дополнительно способствует ее развитию. Изменение соотношения положительного и отрицательного вкладов ловушки N_{t2} в развитие лавины и джоулев разогрев приводят к тому, что при $U \geqslant U_2$ (рис. 1) режим однотактных автоколебаний становится неустойчивым. Согласно проведенным исследованиям, возникает режим двухтактных автоколебаний (рис. 2, *б*), период которых вдвое превышает период однотактных. При дальнейшем увеличении U (при $U \geqslant U_3$) этот режим тоже теряет устойчивость и возникает режим четырехтактных автоколебаний (рис. 2, *в*) и т. д.

Таким образом, в полупроводнике с двумя уровнями прилипания в условиях ТЭН возникают особенности перезарядки уровней, вызывающие усложнение характера автоколебаний, приводящее к бифуркациям удвоения периода и динамическому хаосу.

Авторы благодарны А. И. Хибнику за предоставленные программы.

Список литературы

[1] Голик Л. Л., Паксеев В. Е., Елинсон М. И., Якушин В. К. // ФТП. 1986. Т. 20. В. 11. С. 2084—2091.
[2] Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141. В. 2. С. 343—374.
[3] Винецкий В. Л. // ФТТ. 1969. Т. 11. В. 5. С. 1402—1404.
[4] Калашников С. Г., Падо Г. С., Пустовойт В. И., Токарев Е. Ф. // ФТП. 1969. Т. 3. В. 7. С. 1028—1035.
[5] Балкарей Ю. И., Ржанов Ю. А., Голик Л. Л., Елинсон М. И. // ФТП. 1982. Т. 16. В. 9. С. 1558—1565.
[6] Ржанов Ю. А., Балкарей Ю. И., Голик Л. Л., Елинсон М. И. // ФТП. 1983. Т. 17. В. 9. С. 1545—1548.
[7] Винецкий В. Л., Шаховцова С. И. // Препринт ИФ АН УССР. Киев, 1973.
[8] Голик Л. Л., Паксеев В. Е., Балкарей Ю. И., Елинсон М. И., Ржанов Ю. А., Якушин В. К. // ФТП. 1984. Т. 18. В. 3. С. 502—507.
[9] Паксеев В. Е., Голик Л. Л., Елинсон М. И., Якушин В. К. // ФТП. 1986. Т. 20. В. 5. С. 853—858.
[10] Балкарей Ю. И., Голик Л. Л., Паксеев В. Е., Ржанов Ю. А., Лоскутов В. С., Елинсон М. И. // ФТП. 1987. Т. 21. В. 8. С. 1369—1378.
[11] Хибник А. И. // Матер. по математическому обеспечению ЭВМ. Пущино, 1979. № 5.
[12] Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. М., 1984. 304 с.
[13] Рывкин С. М. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. М., 1963. 494 с.
[14] Вертопрахов В. Н., Сальман Е. Г. Термостимулированные токи в неорганических веществах. Новосибирск, 1979. 331 с.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР
Фрязинская часть

Получена 12.12.1989
Принята к печати 17.03.1990