

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗМЕРНОСТИ СТРАННОГО АТТРАКТОРА И АМПЛИТУДНОГО ПОРОГА СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ФОТОТОКА В n -Ge(Ni)

Бумялене С., Пирагас К., Ченис А.

Двумя различными методами исследована полевая зависимость размерности странного аттрактора хаотических автоколебаний фототока в n -Ge(Ni). Один из методов основан на расчете корреляционного интеграла, другой — на определении минимального пространства вложения, вмещающего странный аттрактор. Предложена модификация первого метода, позволяющая исключить влияние флуктуационных шумов. График размерности сопоставлен с графиком полевой зависимости минимального порога синхронизации.

Введение. В некоторых полупроводниковых материалах при определенных внешних воздействиях наблюдаются нерегулярные колебания тока, называемые динамическим хаосом. Хотя это явление обусловлено сложным макроскопическим поведением системы, по спектральным и корреляционным характеристикам его невозможно отличить от обычных шумов, определяемых микроскопическими флуктуациями. Тем не менее динамический хаос обычно имеет ряд характерных признаков, часто облегчающих его экспериментальную идентификацию. Основные из этих признаков таковы: 1) переход к динамическому хаосу с ростом неравновесности сопровождается рядом бифуркаций в спектре колебаний, в результате которых он из дискретного превращается в непрерывный; 2) режим развитого хаоса характеризуется сравнительно большими амплитудами колебаний, температура шума может достигать 10^{12} К; 3) характеристики динамического хаоса весьма чувствительны к изменению внешних полей и других параметров системы. Однако перечисленные признаки лишь косвенно свидетельствуют в пользу динамической природы шума. Прямая идентификация шума может быть осуществлена на основе исследования размерности странного аттрактора. Размерность аттрактора динамического хаоса в отличие от случайных флуктуаций является конечной величиной. Эта величина определяет эффективное число степеней свободы, участвующих в колебательном процессе, т. е. минимальное число дифференциальных уравнений, необходимых для описания наблюдаемого явления.

Несмотря на большое количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных проблеме размерности аттракторов, расчет ее из экспериментальных реализаций сталкивается с большими трудностями как технического, так и принципиального характера. Для расчета размерности требуются большое машинное время и память. Ее определение значительно затрудняют малые флуктуационные шумы [1], которые всегда имеют место в реальных экспериментальных условиях. Поэтому наряду с исследованием размерности ведутся поиски новых количественных характеристик динамического хаоса, которые позволили бы отличить его от флуктуаций. Одной из таких характеристик является амплитудный порог синхронизации [2]. В работе [2] на примере хаотического автогенератора с инерционной нелинейностью было показано, что минимальное значение этого порога степенным законом связано с максимальным показателем Ляпунова.

Настоящая работа посвящена исследованию полевой зависимости размерности странного аттрактора и амплитудного порога синхронизации хаотических автоколебаний фототока в n -Ge(Ni) [3].

1. Методика определения размерности

Вычисление размерности из экспериментальных реализаций мы проводили двумя альтернативными методами, предложенными соответственно в работах [4] и [5]. Суть этих методов состоит в следующем. В обоих случаях из наблюдаемой переменной $x(t)$ конструируется m -мерное фазовое пространство (пространство вложения), на осях которого откладываются значения этой переменной через сдвинутые промежутки времени τ . Траектория изображающейся точки в таком пространстве описывается радиус-вектором

$$\mathbf{R}(t) = (x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (m-1)\tau)). \quad (1)$$

Фиксируя моменты времени с тем же τ -шагом, получают массив точек $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(i\tau)$, принадлежащих странному аттрактору. Дальнейшие операции с этим массивом по методам [4, 5] различаются. В первом случае вычисляют так называемый корреляционный интеграл

$$C(\epsilon) = N^{-2} \sum_{i \neq j} \Theta(\epsilon - |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|) \quad (2)$$

(N — число точек, Θ — функция Хевисайда), определяющий среднее число пар точек, удаленных друг от друга на расстояние, не превышающее величину ϵ . После этого находят показатель в степенной зависимости этого интеграла от ϵ при малых ϵ : $C_m(\epsilon) \sim \epsilon^{\nu(m)}$. Эту процедуру повторяют в пространствах различной размерности m и искомую размерность аттрактора d устанавливают по насыщающемуся значению показателя при больших m : $\lim_{m \rightarrow \infty} \nu(m)$. Во втором

случае в пространстве $m+1$ измерения находят пары точек, с точностью ϵ совпадающие по m проекциям радиус-векторов (1), и проверяют их совпадение по $(m+1)$ проекциям. При этом вычисляют среднеквадратичное отклонение $(m+1)$ проекций при условии совпадения (с точностью ϵ) m проекций

$$\sigma_m^2(\epsilon) = \frac{\sum_{i \neq j} (\Delta_{ij}^{(m+1)}) \prod_{l=1}^m \Theta(\epsilon - \Delta_{ij}^{(l)})}{\sum_{i \neq j} \prod_{l=1}^m \Theta(\epsilon - \Delta_{ij}^{(l)})}, \quad (3)$$

где $\Delta_{ij}^{(l)} = x[(i+l-1)\tau] - x[(j+l-1)\tau]$. Критическое значение $m = m_0$, при котором величина $\sigma_m(\epsilon)$ становится малой ($\sim \epsilon$), определяет минимальную размерность фазового пространства, в которое может быть помещен аттрактор. Величина m связана с корреляционной размерностью соотношением $m_0 = 1 + \text{int } d$ и устанавливается по излому в зависимости $\sigma_m(\epsilon)$ от m при малых ϵ . Второй метод позволяет определить размерность лишь с точностью до целого значения. Однако он менее чувствителен к флуктуационным шумам [1], и при помощи его можно продвинуться в область больших размерностей аттракторов.

Опыт расчета корреляционной размерности из экспериментальных сигналов показывает, что в ряде случаев наблюдается тенденция к насыщаемости в зависимости $d(m)$, однако строгая насыщаемость отсутствует. Это обстоятельство затрудняет точное определение размерности аттрактора. Такое отсутствие насыщаемости мы связываем с наличием флуктуационных шумов. Мы провели специальные аналитическое и численное исследование влияния слабых некоррелированных шумов на корреляционный интеграл странного аттрактора. В результате этого исследования, которое приведено далее, удалось создать алгоритм определения размерности, исключаяющий влияние шумов.

Рассмотрим сложный сигнал

$$x^*(t) = x(t) + \alpha(t), \quad (4)$$

состоящий из динамического сигнала $x(t)$ и слабого флуктуационного шума $\alpha(t)$. Предположим, что сигнал $x(t)$ имеет размерность d , т. е. его корреляционный интеграл удовлетворяет соотношению

$$C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\nu(m)}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(m) \rightarrow d. \quad (5)$$

Для расчета корреляционного интеграла сигнала $x^*(t)$ введем вспомогательную величину, определяющую плотность пар точек в m -мерном пространстве вложения, удаленных друг от друга на расстояние R . Рассматривая общий случай неизотропного аттрактора, будем полагать, что эта плотность зависит не только от расстояния R , но и от направления, по которому она рассчитывается, т. е. $\rho = \rho(\mathbf{R})$, где \mathbf{R} — вектор, соединяющий данную пару точек. Корреляционный интеграл связан с этой плотностью соотношением

$$C_m(\varepsilon) = \int_{|\mathbf{R}| < \varepsilon} \rho(\mathbf{R}) d\mathbf{R}. \quad (6)$$

Теперь выразим плотность пар точек возмущенного шумом аттрактора $\rho^*(\mathbf{R})$ через плотность пар невозмущенного сигнала $\rho(\mathbf{R})$:

$$\rho^*(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' W(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \rho(\mathbf{R}). \quad (7)$$

Здесь $W(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ — вероятность перехода пары из состояния, определяемого вектором \mathbf{R}' , в состояние \mathbf{R} . Этот переход обусловлен шумом $\alpha(t)$, и вероятность $W(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ может быть выражена через вероятность разброса исходных точек аттрактора

$$W(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int d\alpha d\alpha' p(\alpha) p(\alpha') \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}' + \alpha - \alpha'), \quad (8)$$

где δ — дельта-функция Дирака, α и α' — векторы, определяющие разброс отдельных точек пары. В силу независимости разброса по отдельным компонентам вектора $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, где $\alpha_i = \alpha(i\tau)$, вероятность $p(\alpha)$ может быть представлена в виде произведения

$$p(\alpha) = p(\alpha_1) p(\alpha_2) \dots p(\alpha_m), \quad (9)$$

где $p(\alpha)$ — функция распределения случайной величины $\alpha(t)$. В конечном результате нам будут нужны лишь первые два момента этой функции — среднее значение

$$\langle \alpha \rangle \equiv \int \alpha p(\alpha) d\alpha = 0, \quad (10)$$

которое мы предполагаем равным нулю, и дисперсия

$$\langle \alpha^2 \rangle \equiv \int \alpha^2 p(\alpha) d\alpha. \quad (11)$$

В случае малого шума ($\langle \alpha^2 \rangle \ll \varepsilon^2$) вероятность $W(\mathbf{R}', \mathbf{R})$ имеет острый пик в области $\mathbf{R}' \approx \mathbf{R}$. Это позволяет при расчете интеграла (7) разложить $\rho(\mathbf{R}')$ в ряд Тейлора вблизи точки $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$:

$$\rho(\mathbf{R}') = \rho(\mathbf{R}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{R}'=\mathbf{R}} (x'_i - x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{R}'=\mathbf{R}} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (7) и выполняя интегрирование с учетом $\langle \alpha_i \rangle = 0$, $\langle \alpha_i \alpha_j \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \delta_{ij}$, получаем

$$\rho^*(\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R}) + 2 \langle \alpha^2 \rangle \Delta \rho(\mathbf{R}), \quad (13)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — m -мерный лапласиан. Для расчета корреляционного интеграла (6) удобно перейти в полярную систему координат. Лапласиан в этих координатах

так представляется в виде суммы операторов $\Delta = \Delta_R + \Delta_\Theta$ по радиальным $\Delta_R = \frac{\partial^2}{\partial^2 R} + \frac{m-1}{R} \frac{\partial}{\partial R}$ и угловым переменным Δ_Θ . Подставляя (13) в (6) и интегрируя по угловым переменным с учетом того, что $\int d\Theta \Delta_\Theta \rho(\mathbf{R}) \equiv 0$, для возмущенного шумом сигнала получаем корреляционный интеграл

$$C_m^*(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon dR R^{m-1} \{ \rho_0(R) + \Delta_R \rho_0(R) \}, \quad (14)$$

где $\rho_0(R) = \int d\Theta \rho(\mathbf{R})$ — усредненная по углам плотность исходного аттрактора. Согласно (5), (13), эта плотность должна удовлетворять соотношению

$$\int_0^\varepsilon dR R^{m-1} \rho_0(R) = C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\nu(m)}, \quad (15)$$

из которого следует, что $\rho_0 \sim R^{m-\nu(m)}$. Выполняя в (14) действия, окончательно получаем

$$C_m^*(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\nu(m)} \left\{ 1 - 2\nu(m) [m - \nu(m)] \frac{\langle a^2 \rangle}{\varepsilon^2} \right\}. \quad (16)$$

Показатель корреляционного интеграла сигнала $x(t)$ равен

$$\begin{aligned} \nu^*(m) &= \\ &= \frac{d \ln C_m^*(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = \nu(m) + 4\nu(m) [m - \nu(m)] \frac{\langle a^2 \rangle}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рис. 1. Зависимость показателя корреляционного интеграла в случае возмущенного шумом сигнала от размерности пространства вложения.

а) для аттрактора Хенона [6] $x_{n+1} = y_n - 1.4x_n^2$, $y_{n+1} = 0.3x_n$ при фиксированных значениях $\varepsilon = 0.5$, $N = 2048$ и различных амплитудах шума α_0 : 1 — 0, 2 — 0.01, 3 — 0.1, 4 — 0.2; б) для аттрактора Макеу—Гласса [7] при фиксированной амплитуде шума $\alpha_0 = 0.003$ и различных значениях ε : 1 — 0.3, 2 — 0.15.

Второе слагаемое в этом выражении связано с наличием флуктуационного шума и обуславливает рост показателя $\nu^*(m)$ с ростом m . При больших m в силу насыщаемости $\nu(m) \rightarrow d$ этот рост линеен

$$\nu^*(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} d + 4d(m-d) \frac{\langle a^2 \rangle}{\varepsilon^2}. \quad (18)$$

Несмотря на отсутствие насыщаемости, знание поправочного члена в (18) позволяет установить размерность аттрактора из зашумленных данных. Алгоритм такого определения сводится к простой графической процедуре (рис. 1). Из (18) видно, что $\nu^*(m)$ совпадает с d при $m=d$. Поэтому для определения d необходимо найти линейную часть в зависимости ν^* от m и продолжить ее в область малых m до пересечения с прямой $\nu^*=m$. Точка пересечения даст искомую размерность аттрактора d . На рис. 1 представлены численные данные этого метода для возмущенных шумом аттракторов Хенона и Макеу—Гласса [7]. Как видно из рисунка, аналитическое продолжение прямых $\nu^*(m)$, полученных при различных соотношениях α_0 и ε , пересекается с прямой $\nu^*=m$ в одной точке, соответствующей размерности невозмущенного аттрактора. Это свидетельствует о справедливости предлагаемого алгоритма.

Измерения проводились на высокоомных кристаллах германия *n*-типа, компенсированного многозарядными примесями никеля. Соотношение концентраций доноров (Sb) и акцепторов (Ni) [2] $2N_{Ni} > N_{Sb} > N_{Ni} \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Плотность дислокаций $N_D \sim 5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-2}$. Образцы имели гантелеобразную форму с размерами суженной части $4 \times 1 \times 1 \text{ мм}$, на торцы которых наносились контакты из Sn. В эксперименте образцы погружались в жидкий азот и освещались лампой накаливания мощностью 200 Вт. С целью обеспечения равномерного по глубине кристалла поглощения света перед образцом ставился охлаждаемый фильтр из чистого Ge. При освещении концентрация свободных электронов в слабом поле ($< 10 \text{ В/см}$) достигала 10^{12} см^{-3} . Электрическая схема

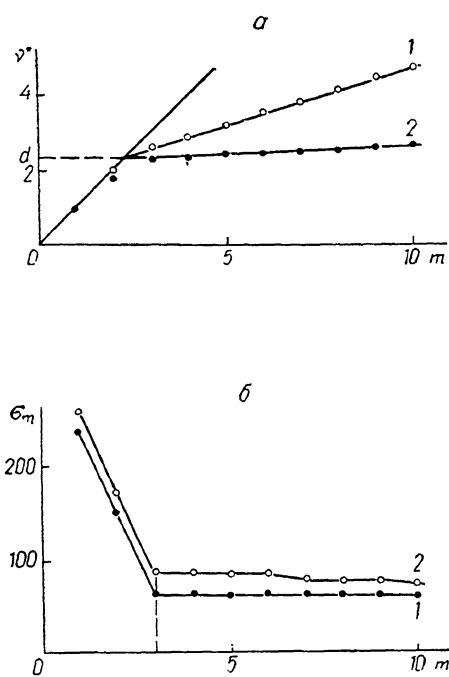


Рис. 2. Зависимость показателя корреляционного интеграла (а) и дисперсии (б) хаотических автоколебаний в *n*-Ge(Ni) от размерности пространства вложения при $E_0 = 50 \text{ В/см}$.

ε: 1 — 32, 2 — 64.

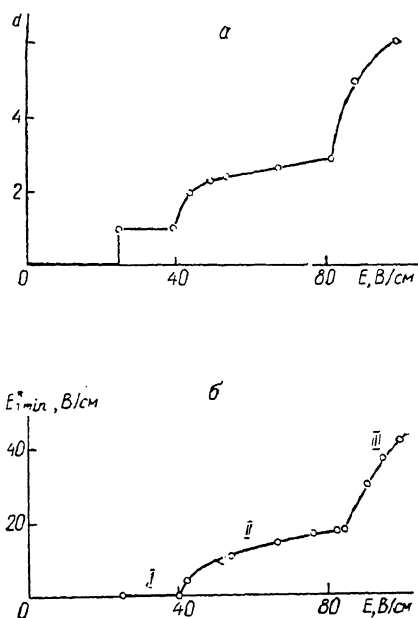


Рис. 3. Зависимость корреляционной размерности (а) и минимальной амплитуды синхронизации (б) от величины постоянного приложенного к образцу электрического поля.

состояла из последовательно соединенных регулируемого источника постоянного напряжения, образца *n*-Ge(Ni) и сопротивления нагрузки R_H . Переменный сигнал, возникающий на нагрузке R_H , исследовался с помощью спектроанализатора и через 1024-канальный АЦП с частотой стробирования $f = 8 \text{ кГц}$ записывался в ЭВМ для расчета размерности.

Результаты расчета размерности при фиксированном значении напряженности электрического поля из $N = 2048$ точек по формулам (2) и (3) представлены на рис. 2. Несмотря на отсутствие насыщаемости в зависимости ν^* от m , согласно методике, исключающей влияние шумов, можно установить размерность аттрактора: $d = 2.3$. В зависимости дисперсии σ_m от m наблюдается излом при $m = 3$. Эти две величины находятся в полном соответствии между собой, поскольку для размещения аттрактора размерностью $d = 2.3$ требуется минимум трехмерное фазовое пространство. Зависимость размерности от напряженности поля представлена на рис. 3, а. Две последние точки в этой зависимости удалось определить лишь по формуле (3).

При исследовании порога синхронизации автоколебаний в электрическую цепь дополнительно включался источник гармонического сигнала. В результате в образце создавалась напряженность электрического поля $E_0 + E_1 \sin 2\pi f_1 t$. При каждом фиксированном значении частоты f_1 путем увеличения амплитуды E_1 система выводилась в режим периодических колебаний с частотой f_1 . Эта синхронизация колебаний в зависимости от E_1 носила пороговый характер. На рис. 4, а показана зависимость порогового значения напряженности поля E_1^* от f_1 в разных режимах автоколебаний, спектры которых представлены на рис. 4, б. Она имеет вид кривой с явно выраженным минимумом, лежащим в области характерной частоты автоколебательной системы. Минимальное значение

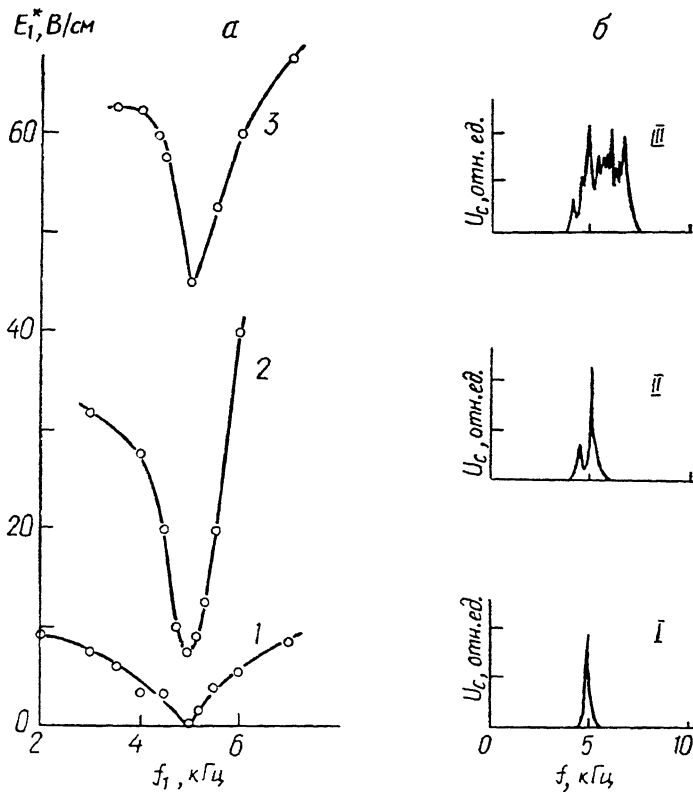


Рис. 4. Зависимость пороговой амплитуды синхронизации от частоты синхронизирующего поля (а) и спектры колебаний фототока в n -Ge(Ni) (б) при различных значениях постоянного поля.

E_0 , В/см: 1 — 40, 2 — 50, 3 — 110.

амплитуды $E_{1\min}^*$, срывающее систему со странного аттрактора и приводящее ее в режим периодических колебаний, согласно [2], и может служить критерием стохастичности. Зависимость амплитуды $E_{1\min}^*$ от напряженности постоянного электрического поля E_0 , меняющего автоколебательные режимы системы, представлена на рис. 3, б. Из сопоставления кривых рис. 3 видна явная корреляция между амплитудным порогом синхронизации и размерностью странного аттрактора. Характерные изломы в кривых разделяют различные режимы автоколебаний. В слабых полях (область I) наблюдаются различные режимы колебания с единичной размерностью и нулевым порогом синхронизации. В средних полях (область II) наблюдается режим, близкий к квазипериодическому, с двумя несоизмеримыми частотами. В сильных полях (область III) этот режим переходит в многомерный хаос, характеризующийся большим числом степеней свободы.

Таким образом, наблюдаемая корреляция между амплитудным порогом синхронизации и размерностью странного аттрактора показывает, что порог синхронизации также является хорошей характеристикой динамического

хаоса, доступной для непосредственного измерения. Представленные результаты являются прямым доказательством динамической природы шума в исследуемом материале.

Список литературы

- [1] Бумялене С., Ласене Г., Пирагас К., Ченис А. // Лит. физ. сб. 1988. Т. 28. № 5. С. 569—574.
- [2] Кузнецов Ю. И., Ланда П. С., Ольховой А. Ф., Перминов С. М. // ДАН СССР. 1985. Т. 281. В. 2. С. 291—294.
- [3] Bumeliene S. B., Pozhela Yu. K., Pyragas K. A., Tamaševičius A. V. // Physica. 1985. V. 134B. P. 293—298.
- [4] Grassberger P., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 5. P. 346—349.
- [5] Čenys A., Pyragas K. // Phys. Lett. A. 1988. V. 129. N 4. P. 227—230.
- [6] Henon M. // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69.
- [7] Mackey M., Glass L. // Science. 1977. V. 197. P. 287—289.

Институт физики полупроводников
АН ЛитССР
Вильнюс

Получена 15.12.1989
Принята к печати 30.03.1990