ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СВЕРХРЕШЕТКЕ МНОГОДОЛИННОГО ПОЛУПРОВОДНИКА ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Дыкман И. М.

Рассмотрены электромагнитные волны в сверхрешетке многодолинного полупроводника, находящегося в магнитном поле H. Показано, что при одной и той же частоте ω в магнитном поле могут иметь место разные волны с разными зависимостями их волновых векторов от частоты. Число этих волн всегда ограничено и определяется соотношениями параметров сверхрешетки, значениями H и ω. Более подробно рассмотрена волна с наиболее широкими (из возможных) соотношениями между указанными величинами. Связь волнового вектора с частотой у этой волны приблизительно такая же (с точностью до малого параметра q^2), как у обычной электромагнитной волны, распространяющейся в материале с диэлектрической постоянной $\varkappa$, но структура ее существенно отлична от обычной (поперечной) электромагнитной волны.

В работе рассмотрено влияние магнитного поля **H** на электромагнитные волны в сверхрешетке, образованной когерентными лучами в многодолинном полупроводнике. Такая сверхрешетка [1] легко может быть получена, она безынерционна и, что особенно существенно, при общей нейтральности полупроводника в каждой его точке характеризуется заметным различием концентраций электронов в разных долинах. Такая особенность сверхрешетки специфически сказывается на свойствах собственных колебаний и спектре [2] электромагнитных волн, распространяющихся в полупроводнике [3]. Оно, очевидно, проявится и в характеристике электромагнитных волн в полупроводнике, находящемся в постоянном магнитном поле.

Электромагнитные волны в сверхрешетках, помещенных в магнитном поле, рассматривались в ряде работ (см., например, [4, 5]). Впервые они рассматривались в работе [6], в которой сверхрешетка моделировалась потенциалом Кронига—Пенни. Более реальная модель была применена в работе [7]. Автор задал концентрацию носителей в виде $n=n_0+\Delta n\cos Qz$ и численным методом нашел зависимость частоты ω от волнового вектора k при разных значениях $\Delta n/n$ (от $\Delta n/n=0$ до $\Delta n/n=0.4$). Оказалось, что эта зависимость при косинусоидальном законе изменения концентрации носителей даже качественно отличается от зависимости $\omega(k)$, определяемой законом Кронига—Пенни. Поэтому естественно предположить, что и в нашем случае, где суммарная концентрация носителей вообще не зависит от координат, магнитное поле **H** приведет к новым типам волн и новым законам дисперсии.

Итак, пусть магнитное поле **H** направлено параллельно кристаллографической оси [001] многодолинного полупроводника (конкретно — донорного германия). Сверхрешетка образована в нем, как и в работе [2], когерентными лучами, электрический вектор **E** которых параллелен направлению [110]. Эти лучи (энергия квантов которых задается меньшей, чем ширина запрещенной зоны), не изменяя общего числа электронов проводимости, перераспределяют их между долинами. В результате образуются две пары эквивалентных долин с разными электронными концентрациями. В каждой из долин одной и другой пары они приближенно определяются формулами

$$n_1 = {}^1/_2 n(1 - a + b\cos\beta\eta), \quad n_2 = {}^1/_2 n(a - b\cos\beta\eta), \tag{1}$$

где n — полная концентрация электронов проводимости, a и b — параметры сверхрешетки (см. [2]), зависящие от интенсивности и частоты когерентных лучей (a, $b > 0$, $a+b < 1$), β — постоянная сверхрешетки. Она определяется частотой когерентных лучей и углом падения их на поверхность германия. В нашем случае, как и в работе [1], $\beta \approx 10^4$ см$^{-1}$, и поэтому β^{-1} значительно превосходит характерные длины пробега электронов. Рассматриваемая сверхрешетка является, следовательно, классической [2] и дополнительная структура зон в ней не проявляется.

Далее мы будем пользоваться прямоугольной системой координат, в которой оси ξ, η, z параллельны соответственно кристаллографическим направлениям [110], [$\bar{1}$10], [001]. В этой системе высокочастотное электрическое поле $\mathcal{E}e^{-i\omega t}$ напряженности $\mathcal{E}$ (ξ, η, z) и частоты ω связано с плотностью тока j равенствами

$$j_\xi = \frac{i\varkappa\omega_p^2\omega}{4\pi(\omega^2-\omega_c\omega_1)}\left\{\left[1-\frac{m_\parallel - m_\perp}{2m_\parallel + m_\perp}(1-2a+2b\cos\beta\eta)\right]\mathcal{E}_\xi + \frac{3im_\parallel\omega_c}{\omega(2m_\parallel + m_\perp)}\mathcal{E}_\eta\right\},$$

$$j_\eta = \frac{i\varkappa\omega_p^2\omega}{4\pi(\omega^2-\omega_c\omega_1)}\left\{\left[1+\frac{m_\parallel - m_\perp}{2m_\parallel + m_\perp}(1-2a+2b\cos\beta\eta)\right]\mathcal{E}_\eta - \frac{3im_\parallel\omega_c}{\omega(2m_\parallel + m_\perp)}\mathcal{E}_\xi\right\}, \quad (2)$$

$$j_z = \frac{i\varkappa\omega_p^2\omega}{4\pi(\omega^2-\omega_c\omega_1)}\left[1-\frac{3m_\perp\omega_1^2}{\omega(2m_\parallel + m_\perp)}\right]\mathcal{E}_z.$$

Здесь $\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость полупроводника, $m_\parallel$ и $m_\perp$ — эффективные массы электрона в направлениях, параллельном и перпендикулярном оси внутридолинного эллипсоида энергии, и

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{3\varkappa}\left(\frac{2}{m_\perp}+\frac{1}{m_\parallel}\right), \quad \omega_c = \frac{eH}{3c}\left(\frac{2}{m_\parallel}+\frac{1}{m_\perp}\right), \quad \omega_1 = \frac{eH}{m_\perp c}. \quad (3)$$

В приведенных выражениях учтено, что частота ω, по предположению, значительно превосходит частоты столкновений электронов $\nu_\parallel$, $\nu_\perp$, и поэтому опущены все слагаемые порядка $\nu_\parallel/\omega$, $\nu_\perp/\omega$.

Подстановка тока (2) в известные уравнения Максвелла приводит к следующей системе:

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}_\xi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mathcal{E}_\xi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\mathcal{E}_\eta}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2\mathcal{E}_z}{\partial\xi\partial z}+(\gamma_1+\mu\cos\beta\eta)\mathcal{E}_\xi-\frac{3i\omega_c}{2b\omega}\mu\mathcal{E}_\eta = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}_\eta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mathcal{E}_\eta}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\mathcal{E}_\xi}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2\mathcal{E}_z}{\partial\eta\partial z}+(\gamma_2-\mu\cos\beta\eta)\mathcal{E}_\eta+\frac{3i\omega_c}{2b\omega}\mu\mathcal{E}_\xi = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}_\xi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\mathcal{E}_z}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\mathcal{E}_\xi}{\partial\xi\partial z}-\frac{\partial^2\mathcal{E}_\eta}{\partial\eta\partial z}+k_1^2\mathcal{E}_z = 0. \quad (4.3)$$

Для сокращения записи здесь введены

$$\gamma_1 = \frac{\varkappa\omega^2}{c^2}-\frac{\varkappa\omega^2\omega_p^2}{c^2(\omega^2-\omega_c\omega_1)}\left[1-\frac{m_\parallel-m_\perp}{2m_\parallel+m_\perp}(1-2a)\right],$$

$$\gamma_2 = \frac{\varkappa\omega^2}{c^2}-\frac{\varkappa\omega^2\omega_p^2}{c^2(\omega^2-\omega_c\omega_1)}\left[1+\frac{m_\parallel-m_\perp}{2m_\parallel+m_\perp}(1-2a)\right], \quad (5)$$

$$k_1^2 = \frac{\varkappa\omega^2}{c^2}-\frac{\varkappa\omega_p^2\omega^2}{c^2(\omega^2-\omega_c\omega_1)}\left[1-\frac{3m_\perp\omega_1^2}{\omega^2(2m_\parallel+m_\perp)}\right], \quad \mu = \frac{2\varkappa b\omega^2\omega_p^2}{c^2(\omega^2-\omega_c\omega_1)}\,\frac{m_\parallel-m_\perp}{2m_\parallel+m_\perp}.$$

Не останавливаясь на решениях системы (4) для однородного полупроводника, как, например, $\mathcal{E}_\xi=\mathcal{E}_\eta=0$, $\mathcal{E}_z \sim \exp[i(k_2\xi+k_3\eta)]$ при $k_2^2+k_3^2=k_1^2$, или на решениях, характерных для сверхрешетки с пространственно модулированной плотностью заряда носителей, как, скажем, в работе [7], будем искать специфическое для данного типа сверхрешетки решение. Таким решением, в частности, является решение, не зависящее от координаты ξ. Учитывая это, из уравнения (4, 3) найдем

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{2}\left[e^{ik_1\eta}\int e^{-ik_1\eta}\frac{\partial\mathcal{E}_\eta}{\partial z}d\eta + e^{-ik_1\eta}\int e^{ik\eta}\frac{\partial\mathcal{E}_\eta}{\partial z}d\eta\right]. \quad (6)$$

Далее положим

$$\mathscr{E}_\eta = e^{ik_2 z}\varphi(\eta), \tag{7}$$

после чего из уравнения (4. 2) следует

$$\mathscr{E}_\xi = \frac{2b\omega}{3\mu\omega_c}\left[-{}^1/_2 k_1 k_2^2 \Phi(\eta) + i(\gamma_2 - \mu\cos\beta\eta)\varphi(\eta)\right] e^{ik_2 z}, \tag{8}$$

и, наконец, из (4.1) получаем

$$\Big[(\gamma_2 - \mu\cos\beta\eta)\frac{d^2}{d\eta_2} + 2\beta\mu\sin\beta\eta\frac{d}{d\eta} + \gamma_1\gamma_2 - k_2^2(k_1^2 + \gamma_2) - \frac{9\mu^2\omega_c^2}{4b^2\omega^2} + \\ + \mu(\beta^2 + \gamma_2 - \gamma_1 + k_2^2)\cos\beta\eta - \mu^2\cos^2\beta\eta\Big]\left(\frac{d^2\Phi}{d\eta_2} + k_1^2\Phi\right) + k_1^2 k_2^2 \times \\ \times (k_1^2 + k_2^2 - \gamma_1 - \mu\cos\beta\eta)\Phi(\eta) = 0. \tag{9}$$

Мы ввели здесь функцию $\Phi(\eta)$:

$$\Phi(\eta) = e^{ik_1\eta}\int e^{-ik_1\eta}\varphi(\eta)\,d\eta - e^{-ik_1\eta}\int e^{ik_1\eta}\varphi(\eta)\,d\eta, \tag{10}$$

связанную с искомой функцией $\varphi(\eta)$ соотношением

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{2ik_1}\left(\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + k_1^2\Phi\right). \tag{11}$$

В уравнение (9) удобно ввести безразмерную переменную $x = 1/2\beta\eta$ и искать решение в виде

$$\Phi(\eta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \cos 2lx. \tag{12}$$

В дальнейшем в целях упрощения вычислений учтем, что при актуальных для нашей задачи значениях частоты $\omega \gg 10^{14}$ с$^{-1}$, $\beta \simeq 10^4$ см$^{-1}$, электронной концентрации $n \simeq 10^{16}$ см$^{-3}$, напряженности магнитного поля $H \simeq 10^4$ Э и (в германии) $m_\parallel \gg m_\perp$ имеют место неравенства $\omega^2 \gg \omega_p$, $\omega^2 \gg \omega_c = \omega_1$. Поэтому с большой точностью

$$\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx k_1^2 \equiv \gamma, \quad \frac{9\mu^2\omega_c^2}{4b^2\omega^2} \ll \gamma^2, \tag{13}$$

и это позволяет упростить[1] уравнение (9), записав его так:

$$(1 - q\cos 2x)\frac{d^4\Phi}{dx^4} + 4q\sin 2x\frac{d^3\Phi}{dx^3} + 4[2\lambda - 2s + q(1 + s - \lambda)\cos 2x - \\ - q^2\lambda\cos^2 2x]\frac{d^2\Phi}{dx^2} + 16\lambda\sin 2x\frac{d\Phi}{dx} + 16[(\lambda - s)^2 + q\lambda\cos 2x - \\ - q^2\lambda^2\cos^2 2x]\Phi(\eta) = 0, \tag{14}$$

где

$$s = \frac{k_2^2}{\beta^2}, \quad q = \frac{\mu}{\gamma}, \quad \lambda = \frac{\gamma}{\beta^2}. \tag{15}$$

Согласно вышесказанному, $q < 1$ (и даже $q \ll 1$). Поэтому в нижеследующем уравнении

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l \{[l^4 - 2(\lambda - s - {}^1/_4 q^2) l^2 + (\lambda - s)^2 - {}^1/_2 q^2\lambda^2]\cos 2lx - \\ - {}^1/_2 q[(l-1)^2(l^2 - \lambda) + l^2 s]\cos 2(l-1)x - {}^1/_2 q[(l+1)^2(l^2 - \lambda) + l^2 s] \times \\ \times \cos 2(l+1)x + {}^1/_4 q^2\lambda(l^2 - \lambda)[\cos 2(l-2)x + \cos 2(l+2)x]\}, \tag{16}$$

---

[1] Замена, согласно (13), трех параметров одним в уравнении (9) не имеет принципиального значения и не отражается на качественном характере решения. Оно может быть получено и без учета приближений (13), но окажется при этом неоправданно громоздким, что затруднит качественную оценку результата.

полученном после подстановки в (14) функции (12), можно искать коэффициенты A_l в виде ряда по степеням q: $A_l = \sum_{j=0}^{\infty} A_{lj} q^j$.

При фиксированных значениях λ (т. е. частоты ω) уравнение (16) оказывается уравнением на собственные значения параметра s, а значит, и на собственные значения вектора k_2. Параметр s при этом тоже получается в виде ряда по степеням q: $s = \Sigma s_j q^j$, коэффициенты которого s_j, так же как и коэффициенты[2] A_{ij}, зависят от условия нормировки функции $\Phi(\eta)$. Различные нормировки Φ приводят к различным значениям s, а это означает, что в заданной сверхрешетке и заданном магнитном поле $\mathbf{H}$ при одной и той же частоте ω может, в принципе, реализоваться целый спектр волн с различными волновыми векторами k_2.

Нас, естественно, будут интересовать решения, соответствующие положительным значениям параметра s, т. е. решения, соответствующие реальным значениям волнового вектора k_2. Одним из таких решений, справедливым при любом значении λ или, иначе говоря, при наиболее широком соотношении значений ω, β, H (в пределах, разумеется, принятых выше положений), является $\Phi(\eta)$ с нормировкой $A_0 = 1$. При такой нормировке параметр s принимает два значения

$$s = \lambda + {}^1/_2\lambda^2 q^2 - {}^7/_{32}\lambda^4 q^4 + 0(q^6), \qquad (17.1)$$

$$s = \lambda + {}^1/_2\lambda(\lambda - 1) q^2 - {}^1/_{32}\lambda(\lambda - 1)^2 (7\lambda + 4) q^4 + 0(q^6). \qquad (17.2)$$

Функции Φ равны соответственно:

$$\Phi(\eta) = 1 + \Big[-\lambda q + \frac{\lambda}{16}(7\lambda^2 + 13\lambda - 4) q^3 - \frac{\lambda}{1152} 464\lambda^4 + 648\lambda^3 + 633\lambda^2 - 584\lambda + 144) q^5 + \ldots\Big] \cos\beta\eta +$$
$$+ \Big[\frac{1}{8}\lambda(\lambda - 1) q^2 - \frac{\lambda}{576}(40\lambda^3 + 16\lambda^2 - 101\lambda + 36) q^4 + \ldots\Big] \cos 2\beta\eta +$$
$$+ \Big[-\frac{\lambda}{144}(\lambda - 1)(\lambda - 4) q^3 + \ldots\Big] \cos 3\beta\eta + \ldots, \qquad (18.1)$$

$$\Phi(\eta) = 1 + \Big[-\lambda q + \frac{\lambda}{16}(\lambda - 1)(7\lambda + 4) q^3 + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{288}(-116\lambda^3 + 10\lambda^2 + 79\lambda + 36) q^5 + \ldots\Big] \cos\beta\eta +$$
$$+ \Big[\frac{1}{8}\lambda(\lambda - 1) q^2 - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{144}(10\lambda^2 - 4\lambda - 9) q^4 + \ldots\Big] \cos 2\beta\eta +$$
$$+ \Big[-\frac{\lambda}{144}(\lambda - 1)(\lambda - 4) q^3 + \ldots\Big] \cos 3\beta\eta + \ldots \qquad (18.2)$$

Искомое решение задачи с учетом (18), а также (6)—(8) имеет вид

$$\mathcal{E}_x = -\frac{k_2}{2k_1} \sum_{l=0}^{\infty} l\beta A_l \sin l\beta\eta e^{-i(\omega t - k_2 x)},$$

$$\mathcal{E}_\eta = \frac{1}{2ik_1} \sum_{l=0}^{\infty} (k_1^2 - l^2\beta^2) A_l \cos l\beta\eta e^{-i(\omega t - k_2)x}, \qquad (19)$$

$$\mathcal{E}_\eta = \frac{b\omega}{3\mu\omega_0 k_1} \sum_{l=0}^{\infty} [(\gamma_2 - \mu\cos\beta\eta)(k_1^2 - l^2\beta^2) - k_1^2 k_2^2] A_l \cos l\beta\eta e^{-i(\omega t - k_2 x)}.$$

Оно представляет две электромагнитные волны с пространственно изменяющимися амплитудами. Поскольку при принятых условиях $\omega > \omega_p, \omega_c, \omega_1$

---

[2] A_{ij} и s_j находятся из уравнения (14) после подстановки в него (12) и последующего приравнивания нулю выражений, содержащих одинаковые степени при каждой функции $\cos 2lx$.

не только $q < 1$, но и $\lambda q < 1$, обе волны (18. 1) и (18. 2) мало отличаются друг от друга. У них обеих параметр $s \approx \lambda$ и, согласно (5) и (15), $k_2^2 \approx \varkappa H \omega^2/c^2$.

Волновой вектор k_2 распространяющихся в сверхрешетке (1) электромагнитных волн (19) оказался связанным с частотой ω таким же соотношением, как и обычная волна в однородном материале с диэлектрической проницаемостью $\varkappa$. Однако структура волн (19) существенно отличается от волн в однородном материале. Сверхрешетка (1) в магнитном поле $\mathbf{H}$ приводит к появлению нового типа электромагнитных волн.

Приложение

Для более полной характеристики решения уравнения (14) приведем (опустив доказательства) следующие данные: 1) параметр s разлагается только по четным степеням q; 2) коэффициенты $A_{lj}=0$ при $j < l$ и $j=l+1+2j'$, где $j'=0, 1, 2, \ldots$; 3) коэффициент A_{ll} равен

$$A_{ll} = (-1)^l \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots[\lambda-(l-1)^2]}{(l!)^2\, 2^{l-1}}. \qquad (\text{П. } 1)$$

Отсюда видно, что ряд (12) быстро убывает с ростом l.

Другие нормировки функции (12) тоже приводят к волнам аналогичной структуры. Параметр s, определяющий вектор k_2 при нормировке $A_1=1$, равен $s=\lambda-1-{}^5/_{12}\lambda^2 q^2+O(q^4)$, $s=\lambda-1-{}^1/_{12}(5\lambda^2-\lambda-4)\,q^2+O(q^4)$. При более общей нормировке $A_l=1$ $(l>1)$

$$s = \lambda - l^2 - \frac{\lambda^2}{2(4l^2-1)} q^2 + O(q^4),$$
$$s = \lambda - l^2 - \frac{1}{2(4l^2-1)}[\lambda^2 + (2l^2-1)\lambda - l^2(3l^2-1)]\, q^2 + O(q^4). \qquad (\text{П. } 2)$$

Важно отметить, что увеличение l в нормировочном коэффициенте требует увеличения λ, т. е. увеличения частоты ω. Поэтому при фиксированной ω реализоваться могут лишь такие волны, у которых s больше нуля, и, значит, $l^2 < \lambda$, т. е. $l^2 < \varkappa\omega^2/\beta^2 c^2$.

В заключение отметим, что уравнение (14) (как и уравнение Матье) допускает еще решения

$$\Phi_2(x) = \sum_{l=1}^{\infty} B_l \sin 2lx, \quad \Phi_3(x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \cos(2l+1)x, \quad \Phi_4(x) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \sin(2l+1)x. \qquad (\text{П. } 3)$$

Все они описывают волны, аналогичные рассмотренным выше. Коэффициенты B_l даже весьма близки к A_l, а параметр s при всех нормировках $B_l=1$ (при $l>1$) точно совпадает с (П. 2).

Весьма близки друг к другу и волны $\Phi_3(x)$ и $\Phi_4(x)$ в (П. 3). Параметр этих волн $s \approx \lambda - \left(\frac{2l+1}{2}\right)^2$ при всех нормировках $C_l = D_l = 1$ и более точно (при $l > 1$)

$$s = \lambda - \left(\frac{2l+1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{8l(l+1)} q^2 O(q^4), \quad s = \lambda - \left(\frac{2l+1}{2}\right)^2 -$$
$$- \frac{1}{32l(l+1)}[4\lambda^2 + 2(4l^2+4l-1)\lambda - {}^1/_4(2l+1)^2(12l^2+12l-1)\, q^2 + O(q^4)]. \qquad (\text{П. } 4)$$

Здесь тоже фиксированная частота ω ограничивает число волн.

Список литературы

[1] Дыкман И. М., Томчук П. М. // ФТП. 1987. Т. 21. В. 9. С. 1612—1618.
[2] Дыкман И. М. // ФТП. 1989. Т. 23. В. 4. С. 621—626.
[3] Дыкман И. М., Томчук П. М. // ФТП. 1988. Т. 22. В. 4. С. 768—772.
[4] Tselis A., Cruz G. G., Quinn J. J. // Sol. St. Commun. 1983. V. 47. N 1. P. 43—45.
[5] Kushwaha M. S. // Phys. St. Sol. (b). 1986. V. 136. N 2. P. 757—762.
[6] Baynham A. C., Boardman A. D. // J. Phys. C. 1968. V. 1. N 3. P. 363—367.
[7] Narahari Achar B. N. // Phys. St. Sol. (b). 1988. V. 143. N 1. P. 235—242.

Институт полупроводников АН УССР
Киев

Получена 14.08.1990
Принята к печати 11.09.1990