МАТРИЦА ПЕРЕНОСА ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Н. Л. Чуприков

Сибирский физико-технический институт им. В. Д. Кузнецова при Томском государственном университете, 634050, Томск, Россия
(Получена 25.10.1991. Принята к печати 19.05.1992)

Предложен метод, основанный на матрице переноса, связывающей решения уравнения Шредингера в областях с нулевыми значениями потенциала. Показано, что данная матрица определяется шестью параметрами — длиной волны де Бройля, соответствующей свободной частице, координатами левой и правой границ потенциального барьера (через который происходит «перенос» решения), коэффициентом прохождения и фазовыми характеристиками прошедшей и отраженной волн. Для вычисления последних трех нетривиальных параметров получены рекуррентные соотношения. Получены также необходимые формулы для исследования потенциальных барьеров со ступенькой справа. Предлагаемый метод позволяет исследовать эффект резонансного туннелирования в одномерных квантовых системах, для которых потенциал и эффективная масса частицы представляют собой кусочно-непрерывные функции пространственной переменной.

Как было показано в работе [1], метод матрицы переноса (ММП) (см., например, [2–4]), широко используемый для исследования эффекта резонансного туннелирования в полупроводниковых гетероструктурах, численно неустойчив, если размер структуры превышает несколько сотен ангстрем. Потеря точности происходит при численном перемножении матриц переноса (МП); именно к этому сводится вычисление коэффициента прохождения в традиционном ММП.

Проблема численной неустойчивости, связанная с размером структуры, может быть решена (по крайней мере для структур, размеры которых находятся в разумных пределах), если для расчета параметров туннелирования использовать явные выражения. Последние необходимы также для вывода условий прозрачности исследуемых структур. В настоящее время явные выражения для коэффициента прозрачности получены лишь в некоторых частных случаях [5–8]. Для многобарьерных структур общего вида задача не решена.

В данной работе предлагается ММП, в рамках которого удается получить рекуррентные соотношения для коэффициента прохождения систем одномерных потенциальных барьеров (ОПБ) произвольной формы. Кроме того, соотношения позволяют вычислять две фазовые характеристики — для прошедшей и падающей волн. В случае одного и двух прямоугольных барьеров полученные соотношения совпадают с известными выражениями [5].

Принципиальное отличие предлагаемого подхода от известных вариантов традиционного ММП [2–4] заключается в том, что в данном случае мы рассматриваем класс матриц переноса, существенно более узкий, чем в традиционном ММП. Если в работах [2–4] рассматриваются МП, которые связывают решения уравнения Шредингера в двух областях с произвольными значениями потенциала, то в данном подходе под МП понимаются только такие матрицы, которые связывают решения в областях с нулевыми значениями потенциала. Такие матрицы «переносят» решение уравнения Шредингера через область барьера; матрицы «сшивания», связывающие решения в смежных областях на границе прямоугольного ОПБ, играют здесь вспомогательную роль. Они используются для вычисления волновых функций в области барьера.

Система прямоугольных потенциальных барьеров

Пусть дано уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + [V(x) - E]\psi = 0, \tag{1}$$

где потенциал $V(x)$ — кусочно-непрерывная функция, описывающая систему конечной ширины, составленную из $(N+1)$-го прямоугольного потенциального барьера: $V(x) = V_j$, если $a_j < x < b_j$; или $V(x) = 0$; $j = 1, \ldots, N+1$. Здесь a_j и b_j — левая и правая границы j-го ОПБ. Волновая функция $\Psi(x)$ определена на отрезке $[a_0, b_0]$, непрерывна вместе со своей первой производной ($m = \mathrm{const}$) и удовлетворяет граничным условиям $x = a_0$ и $x = b_0$, которые могут лежать на бесконечности; $a_0 < a_1$, $b_0 > b_{N+1}$.

Очевидно, что в межбарьерной области $(j-1, j)$, которая находится между $(j-1)$-м и j-м барьерами,

$$\psi(x) = A^{(+)}_{(j-1,j)}\exp(i\varkappa_0 x) + A^{(-)}_{(j-1,j)}\exp(-i\varkappa_0 x), \tag{2}$$

где $\varkappa_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$; в области (j), принадлежащей j-ому ОПБ, либо $(E > V_j)$

$$\psi(x) = A^{(+)}_{(j)}\exp(i\varkappa_j x) + A^{(-)}_{(j)}\exp(-i\varkappa_j x), \tag{3}$$

где

$$\varkappa_j = \sqrt{2m(E - V_j)/\hbar^2},$$

либо $(E < V_j)$

$$\psi(x) = A^{(+)}_{(j)}\exp(\varkappa_j x) + A^{(-)}_{(j)}\exp(-\varkappa_j x), \tag{4}$$

где

$$\varkappa_j = \sqrt{2m(V_j - E)/\hbar^2}; \quad j = 1, \ldots, N+1.$$

Из линейности условий сшивания (условий непрерывности), которым должна удовлетворять волновая функция в граничных точках ОПБ, следует, что неизвестные константы для любых двух межбарьерных областей, а также смежных областей, связаны линейными соотношениями. Для межбарьерных областей эти соотношения запишем в виде

$$A_{(j-1,\ j)} = Y_{j\ldots k}A_{(k,\ k+1)},$$

для смежных областей

$$A_{(j-1,\ j)} = \Gamma_j A_{(j)}.$$

Здесь

$$A_{(j-1,j)} = \begin{pmatrix} A^{(+)}_{(j-1,j)} \\ A^{(-)}_{(j-1,j)} \end{pmatrix}, \quad A_{(j)} = \begin{pmatrix} A^{(+)}_{(j)} \\ A^{(-)}_{(j)} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица $Y_{j\ldots k}$, связывающая решения уравнения Шредингера (1) в областях с нулевым потенциалом, — матрица переноса.

Матрицу Γ_j далее будем называть матрицей сшивания.

Число индексов в МП $Y_{j\ldots k}$, равное $n = k - j + 1$, указывает на то, что данная матрица осуществляет перенос решения через n-барьерную систему. Далее в таких случаях мы будем употреблять выражение «n-барьерная МП». Очевидно, нуль-барьерная МП — единичная матрица.

Нетрудно убедиться в том, что для определения общего решения уравнения (1) достаточно вычислить МП $Y_{j...k}$ ($k = 1, ..., N+1$) и матрицы сшивания Γ_j ($j = 1, ..., N$). Поскольку выражения для матриц Γ_j находятся элементарно (см., например, [2, 8]), основная проблема заключается в вычислении МП.

Из определения МП следует, что справедливо рекуррентное соотношение

$$Y_{(1 ... k+1)} = Y_{1 ... k} Y_{k+1}, \tag{5}$$

где $k = 1, ..., N$. Таким образом, зная однобарьерные МП, можно вычислить МП с любым числом индексов, в том числе и $(N+1)$-барьерную МП.

Сшивая волновую функцию в граничных точках a_j и b_j, можно показать, что однобарьерная МП независимо от знака выражения $E - V_j$ приводится к виду

$$Y_j = \begin{pmatrix} q_j & p_j \\ p_j^* & q_j^* \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$q_j = (1/\sqrt{T_j}) \exp [i (\varkappa_0 d_j - I_j)], \quad p_j = \sqrt{R_j / T_j} \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \varkappa_0 s_j + \Phi_j \right) \right],$$

$$d_j = b_j - a_j, \quad s_j = b_j + a_j, \quad R_j = 1 - T_j$$

(заметим, что для матриц сшивания такое представление несправедливо).

Выражения для вещественных параметров T_j, I_j и Φ_j различны для подбарьерного и надбарьерного случаев [для $\varkappa_j$ см. выражения (3) и (4)].

В подбарьерном случае ($E < V_j$)

$$T_j = (1 + \Theta_j^{(+)^2} \operatorname{sh}^2 \varphi_j)^{-1}, \tag{7}$$

$$I_j = \operatorname{arctg} (\Theta_j^{(-)} \operatorname{th} \varphi_j), \tag{8}$$

$$\Phi_j = 0. \tag{9}$$

В надбарьерном случае ($E > V_j$)

$$T_j = (1 + \Theta_j^{(-)^2} \sin^2 \varphi_j)^{-1}, \tag{10}$$

$$J_j = \operatorname{arctg} (\Theta_j^{(+)} \operatorname{tg} \varphi_j), \tag{11}$$

$$\Phi_j = \begin{cases} 0, & \Theta_j^{(-)} \sin \varphi_j > 0, \\ \pi, & \Theta_j^{(-)} \sin \varphi_j < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь и далее функция arctg вычисляется таким образом, чтобы выполнялось условие $\operatorname{arctg} (c \operatorname{tg} F) |_{c=1} = F$, где $c > 0$.

В обоих случаях

$$\Theta_j^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_j} \pm \frac{\varkappa_j}{\varkappa_0} \right), \tag{13}$$

$$Y_j = \varkappa_j d_j. \tag{14}$$

Легко показать, что $\det Y_j = 1$.

Выражение (6) для МП можно записать и иначе, введя в рассмотрение матричную функцию M шести независимых вещественных аргументов:

$$Y_j = M(\varkappa_0, d_j, s_j, T_j, I_j, \Phi_j). \tag{15}$$

Важность такого представления заключается в том, что оно остается справедливым и для многобарьерной МП. Это можно показать с помощью метода индукции, используя рекуррентное соотношение (5). Таким образом,

$$Y_{1\dots k} = M(\varkappa_0, d_{1\dots k}, s_{1\dots k}, T_{1\dots k}, I_{1\dots k}, \Phi_{1\dots k}), \tag{16}$$

где

$$d_{1\dots k} = b_k - a_1,\ s_{1\dots k} = b_k + a_1,\ R_{1\dots k} = 1 - T_{1\dots k},\ k = 1, \dots, N+1.$$

Параметры $T_{1\dots k}$, $I_{1\dots k}$ и $\Phi_{1\dots k}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$T^{-1}_{1\dots k+1} = 1 + \frac{(\sqrt{R_{1\dots k}} - \sqrt{R_{k+1}})^2}{T_{1\dots k}T_{k+1}} + 4\frac{\sqrt{R_{1\dots k}R_{k+1}}}{T_{1\dots k}T_{k+1}}\cos^2 F_{1\dots k+1}, \tag{17}$$

$$I_{1\dots k+1} = \frac{1}{2}(I_{1\dots k} + I_{k+1} - \Phi_{1\dots k} + \Phi_{k+1})\,\widetilde{I}_{1\dots k+1}, \tag{18}$$

$$\widetilde{I}_{1\dots k+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \sqrt{R_{1\dots k}R_{k+1}}}{1 + \sqrt{R_{1\dots k}R_{k+1}}}\operatorname{tg} F_{1\dots k+1}\right), \tag{19}$$

$$\Phi_{1\dots k+1} = \frac{1}{2}(\Phi_{1\dots k} + \Phi_{k+1} - I_{1\dots k} + I_{k+1})\operatorname{sign}(\beta_{1\dots k+1})\,\widetilde{\Phi}_{1\dots k+1}, \tag{20}$$

$$\widetilde{\Phi}_{1\dots k+1} = \operatorname{arctg}(|\beta_{1\dots k+1}|\operatorname{tg} F_{1\dots k+1}), \tag{21}$$

$$\rho_{1\dots k+1} = \frac{\sqrt{R_{1\dots k}} - \sqrt{R_{k+1}}}{\sqrt{R_{1\dots k}} + \sqrt{R_{k+1}}}, \tag{22}$$

$$F_{1\dots k+1} = \frac{1}{2}(I_{1\dots k} + I_{k+1} - \Phi_{1\dots k} - \Phi_{k+1}) + \varkappa_0 l_{k,k+1}, \tag{23}$$

где $l_{k,k+1} = a_{k+1} - b_k$; $l_{k,k+1}$ — расстояние между k-м и $(k+1)$-м барьерами, которое может быть равным нулю; $k = 1, \dots, N$. Заметим, что МП $Y_{1\dots k}$ и, следовательно, параметры $T_{1\dots k}$, $I_{1\dots k}$ и $\Phi_{1\dots k}$ рассматриваются независимо от задачи туннелирования. Мы нигде не использовали граничные условия, поскольку решаем проблему нахождения общего решения уравнения Шредингера. Однако нетрудно убедиться в том, что параметры $T_{1\dots k}$, $I_{1\dots k}$ и $\Phi_{1\dots k}$ имеют вполне определенный физический смысл: $T_{1\dots k}$ — коэффициент прохождения для волны, движущейся слева направо; $I_{1\dots k}$ описывает фазу прошедшей волны, $\Phi_{1\dots k}$ — фазу отраженной волны. Соответствующие граничные условия для волновой функции, определенной на интервале $(-\infty, \infty)$, имеют следующий вид:

$$A^{(+)}_{(0,1)} = 1, \quad A^{(-)}_{(N+1,N+2)} = 0.$$

Таким образом, в отличие от традиционного ММП в данном подходе получены удобные для вычислений рекуррентные соотношения непосредственно для коэффициента прохождения. В случае двухбарьерных структур рекуррентные соотношения (17)—(23) дают известный результат [5]. Заметим также, что из рекуррентных соотношений (17)—(23) можно получить условия прозрачности с соответствующей наглядной интерпретацией, однако это выходит за рамки исследования данной работы.

Потенциальные барьеры произвольной формы

Рекуррентные соотношения (17)—(23) позволяют вычислять МП $Y_{(1)}$ для ОПБ произвольной формы (индекс заключен в круглые скобки, чтобы отличать данную матрицу от МП, соответствующей прямоугольному барьеру). Действительно, пусть ОПБ, расположенный в области (a, b), описывается гладкой ограниченной функцией $V(x)$. Решения в областях слева и справа от ОПБ находятся элементарно. Пусть решение слева

$$\psi(x) = A_l^{(+)} \exp(i\varkappa_0 x) + A_l^{(-)} \exp(-i\varkappa_0 x), \tag{24}$$

справа от барьера

$$\psi(x) = A_r^{(+)} \exp(i\varkappa_0 x) + A_r^{(-)} \exp(-i\varkappa_0 x). \tag{25}$$

Пусть также МП $Y_{(1)}$, связывающая решения (24) и (25),

$$A_l = Y_{(1)} A_r.$$

Из теоремы существования и единственности решения краевой задачи для уравнения Шредингера следуют существование и единственность матрицы $Y_{(1)}$.

Чтобы вычислить МП $Y_{(1)}$, разобьем интервал (a, b) на N равных интервалов шириной $\Delta_N = (b - a)/N$. На каждом интервале (a_j, a_{j+1}), где $a_j = a + (j-1)\Delta_N$, аппроксимируем функцию $V(x)$ константой $V_j = V(x_j^{(0)})$; $x_j^{(0)} = a + (2j-1)\Delta_N/2$; $j = 1, \ldots, N$. В точках $x = a_j$ $(j = 2, \ldots, N)$ значение потенциала $V(x)$ заменим нулевым значением. Это нужно для включения необходимых в данном подходе межбарьерных областей [напомним, что рекуррентные соотношения (17)—(23) справедливы и в том случае, когда расстояние между барьерами равно нулю, т. е. когда межбарьерная область представляет собой точку].

В результате разбиения мы получаем систему прямоугольных барьеров, описываемую функцией $V_N(x)$, которая аппроксимирует исходную функцию $V(x)$ с некоторой заданной точностью. Процедура решения уравнения Шредингера с потенциалом $V_N(x)$ описана выше. Пусть $\psi_N(x)$ — волновая функция, а $Y_{1\ldots N}$ — соответствующая МП системы прямоугольных барьеров. Согласно выражению (16), эта матрица имеет следующий вид:

$$Y_{1\ldots N} = M(\varkappa_0, d, s, T_{1\ldots N}, I_{1\ldots N}, \Phi_{1\ldots N}), \tag{26}$$

где $d = b - a$, $s = b + a$.

Увеличим число N, чтобы точнее аппроксимировать потенциал $V(x)$, и построим ряд потенциалов $V_N(x)$ и соответствующие ряды МП $Y_{1\ldots N}$ и волновых функций $\psi_N(x)$. Пусть $\tilde{V}(x) = \lim\limits_{N\to\infty} V_N(x)$, $\tilde{\psi}(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \psi_N(x)$ для всех x. Очевидно, потенциалы $\tilde{V}(x)$ и $V(x)$ — эквивалентные функции [9], так как бесконечное множество точек $(x = a_j;\ j = 1, \ldots, N)$, в которых они не совпадают (на конечную величину), — счетное множество, т. е. множество меры — нуль. В этом случае функции $\tilde{\psi}(x)$ и искомая волновая функция $\psi(x)$ совпадают всюду в области определения: $\psi(x) \equiv \tilde{\psi}(x)$. Это следует из теоремы существования и единственности решения краевой задачи для уравнения Шредингера в классе функций, непрерывных вместе со своей первой производной. Таким образом, искусственное «зануление» потенциала $V(x)$ на счетном множестве точек не «портит» исходный потенциал в том смысле, что обе задачи имеют одно и то же решение.

Пусть $\tilde{Y}_{(1)} = \lim\limits_{N\to\infty} Y_{1\ldots N}$. Учитывая выражение (16) и то, что вид функции M не зависит от номера N, получаем

$$\tilde{Y}_{(1)} = M(\varkappa_0, d, s, \tilde{T}, \tilde{I}, \tilde{\Phi}), \tag{27}$$

где

$$\tilde{T} = \lim_{N\to\infty} T_{1\ldots N},\quad \tilde{I} = \lim_{N\to\infty} I_{1\ldots N},\quad \tilde{\Phi} = \lim_{N\to\infty} \Phi_{1\ldots N}.$$

Очевидно, поскольку функции $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ всюду совпадают, искомая МП $Y_{(1)}$ равна матрице $\tilde{Y}_{(1)}$ (27). Из условия существования и единственности матрицы $\tilde{Y}_{(1)}$ следуют существование и единственность пределов (27).

При расчете параметров $\tilde{T}$, $\tilde{I}$ и $\tilde{\Phi}$ с использованием рекуррентных соотношений (17)—(23), естественно, возникает вопрос о численной устойчивости при больших значениях N (заметим, что данная проблема отличается от проблемы численной устойчивости традиционного ММП, указанной в работе [1]). Строгого аналитического исследования численной устойчивости рекуррентных соотношений не проводилось. Однако некоторые оценки, а также контрольные численные расчеты показали, что с ростом числа итераций ошибка накапливается достаточно медленно.

Сделаем еще одно замечание. Очевидно, так же как и в случае системы прямоугольных ОПБ, мы можем исследовать систему ОПБ произвольной формы. Выражения (16) для МП и рекуррентные соотношения (17)—(23) справедливы и в этом случае. Параметры однобарьерных матриц должны быть вычислены заранее. Для этого нужно использовать или соотношения (7)—(14), если барьер прямоугольный, или соотношение (27), если барьер произвольной формы.

Система потенциальных барьеров со «ступенькой»

Описанный выше формализм легко обобщается на случай, когда, например, справа от системы барьеров имеется потенциальная «ступенька». Это соответствует практически важному случаю, когда к гетероструктуре приложено внешнее электрическое поле. Пусть δV — приложенная разность потенциалов, так что справа от ступеньки $V(x) = -\delta V (\delta V \geqslant 0)$; заметим, что полученные далее формулы справедливы и в более общем случае, когда $E + \delta V \geqslant 0$.

Чтобы получить матрицу Y_t для структуры «система барьеров + ступенька», связывающую решение в области справа от ступеньки с решением в области слева от системы барьеров (очевидно, матрица Y_t в соответствии с данным выше определением не является матрицей переноса), нужно умножить МП системы барьеров на матрицу сшивания, характеризующую ступеньку. Расчеты показывают, что искомая матрица имеет следующий вид:

$$Y_t = \begin{pmatrix} Q & P \\ P^* & Q^* \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где

$$Q = \frac{\alpha}{\sqrt{T_t}} \exp\left[i\left(\varkappa a_{st} - \varkappa_0 a - I_t\right)\right],$$

$$P = \alpha \left[\sqrt{\frac{R_t}{T_t}} \exp\left(i\left(-\varkappa a_{st} - \varkappa_0 a + \Phi_t\right)\right)\right],$$

$$T_t^{-1} = 1 + \frac{(\sqrt{R} - \gamma\sqrt{R_{st}})^2}{TT_{st}} + 4\gamma\frac{\sqrt{RR_{st}}}{TT_{st}}\cos^2 F,$$

$$I_t = \frac{1}{2}\left(I - \Phi - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \gamma\sqrt{RR_{st}}}{1 + \gamma\sqrt{RR_{st}}}\operatorname{tg} F\right),$$

$$\Phi_t = \frac{1}{2}\left(\Phi - I + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sign}(\xi)\operatorname{arctg}(|\xi|\operatorname{tg} F),$$

$$F = \frac{1}{2}\left(I + \Phi + \frac{\pi}{2}\right) + \varkappa_0 l, \quad l = a_{st} - b,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_0}}, \quad \gamma = \operatorname{sign}(\varkappa_0 - \varkappa),$$

$$\xi = \frac{\sqrt{R} - \gamma\sqrt{R_{st}}}{\sqrt{R} + \gamma\sqrt{R_{st}}}, \quad \varkappa = h^{-1}\sqrt{2m(E + \delta V)},$$

$T_{st} = 4\varkappa_0\varkappa/(\varkappa_0 + \varkappa)^2$ — коэффициент прохождения ступеньки, $R_{st} = 1 - T_{st}$ — коэффициент отражения ступеньки, параметры T, R, I и Φ характеризуют систему потенциальных барьеров без ступеньки, a и b — координаты левой и правой границ системы ОПБ, a_{st} — координата ступеньки ($b < a_{st} < b_0$), T_t — коэффициент прохождения всей структуры.

Учет пространственной зависимости эффективной массы частицы

Описанная выше схема расчета параметров МП легко обобщается на случай, когда эффективная масса частицы зависит от пространственной координаты $m = m(x)$. Пусть m_0 — эффективная масса частицы в области слева от системы «барьеров» и в «межбарьерных» областях, m_j — эффективная масса частицы в области j-го барьера (кавычки сделаны ввиду того, что в данном разделе барьерной считаем ту область пространства, в которой либо потенциал $V(x)$ не равен нулю, либо $m_j \neq m_0$, либо оба условия выполняются одновременно); m_{st} — эффективная масса частицы в области справа от ступеньки (как и в случае барьера, справа от ступеньки либо $\delta V \neq 0$, либо $m_{st} \neq m_0$, либо выполняется и то и другое).

Напомним, что если эффективная масса частицы не постоянна, то условие непрерывности потока эквивалентно условию непрерывности отношения производной $\psi'(x)$ к эффективной массе частицы (см., например, [4]). Чтобы это учесть, достаточно в выражениях (13) для параметров Θ_j^+ и Θ_j^-, а также в (28) для параметров α, γ и T_{st} заменить $\varkappa_0$ на $\varkappa_0/m_0$, $\varkappa_j$ — на $\varkappa_j/m_j$, $\varkappa$ — на $\varkappa/m_{\text{СТ}}$, а сами величины $\varkappa_0$, $\varkappa_j$ и $\varkappa$ [взяты из выражений (2)—(4) и (28)] вычислять с учетом значения эффективной массы частицы в соответствующей области.

Очевидно, так же как и в случае ОПБ производной формы, предлагаемый формализм может быть использован для исследования систем ОПБ с произвольной зависимостью эффективной массы частицы от пространственной координаты.

Заключение. В работе показано, что одномерному стационарному уравнению Шредингера можно однозначно сопоставить МП как функцию шести параметров: волнового числа волны де Бройля свободной частицы, ширины потенциального барьера, удвоенной координаты центра барьера, коэффициента прохождения и двух фаз, характеризующих прошедшую и отраженную волны. Значения параметров МП зависят от энергии частицы, ширины и формы потенциального барьера. Для вычисления последних трех нетривиальных параметров МП получены рекуррентные соотношения, позволяющие исследовать системы потенциальных барьеров произвольной формы (в том числе со ступенькой справа) с произвольной зависимостью эффективной массы от пространственной координаты. Заметим также, что при написании данной статьи использовались материалы работы [10].

В заключение автор выражает признательность Г. Ф. Караваеву за неоднократные полезные обсуждения результатов работы, а также С. Н. Гриняеву, В. Г. Тютереву и В. Н. Чернышову за критические замечания, сделанные при обсуждении данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] D. Y. K. Ko, J. C. Inkson. Phys. Rev. B, **38**, 9945 (1988).
[2] Туннельные явления в твердых телах (под ред. Э. Бурштейна, С. Лундквиста), 421. М. (1973).
[3] M. Ya. Azbel. Phys. Rev. B, **28**, 4106 (1983).
[4] J. Peng, H. Chen, S. Zhou. J. Phys.: Cond. Mat., **1**, 5451 (1989).
[5] А. С. Тагер. Электрон. техн. Электроника СВЧ, **9**, 21 (1987).
[6] H. Yamamoto, Y. Kanie. Phys. St. Sol. B, **160**, K97 (1990).
[7] H. Yamamoto, Y. Kanie, K. Taniguchi. Phys. St. Sol. B, **162**, K25 (1992).
[8] H. Yamamoto, Y. Kanie, K. Taniguchi. Phys. St. Sol. B, **154**, 195 (1989).
[9] П. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, 543. М. (1976).
[10] Н. Л. Чуприков. Деп. в ВИНИТИ АН СССР. № 492-В91. М. (1991).

Редактор В. В. Чалдышев