01

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭФФЕКТА ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. С. Анищенко, А. Б. Нейман

Предложен общий подход к исследованию явления перемежаемости любого типа в системах с квазиаттракторами, основанный на теории достижения границ марковским процессом. Приведены типичные примеры, иллюстрирующие применение этого метода для анализа основных свойств перемежаемости.

Введение

Исследования последних лет выявили одно из типичных бифуркационных явлений, наблюдаемых в диссипативных нелинейных системах с квазигиперболическими свойствами, суть которого состоит в сложном критическом характере взаимодействия множества регулярных и странных аттракторов с изменением параметров. Внутренние бифуркации регулярных и хаотических предельных множеств приводят к эффекту перемежаемости, проявляющемуся в случайном чередовании различных фаз движения. Эффект перемежаемости обладает рядом замечательных статистических свойств, что определяет интерес исследователей к этому явлению. Кроме того, в реальных физических системах с квазиаттракторами под действием флуктуаций возможно возникновение перемежаемости, индуцированной шумами. В зависимости от структуры взаимодействующих аттракторов реализуются различные типы перемежаемости, например цикл—хаос, тор—хаос, хаос—хаос, цикл—цикл и т. д. Несмотря на обилие работ по перемежаемости, до сих пор практически не существует единого и общепринятого подхода к анализу основных свойств этого эффекта. В настоящей статье предпринята попытка применить общий метод описания эффекта перемежаемости, основанный на теории достижения границ марковским процессом. Иллюстрируются основные свойства перемежаемости на примере ряда относительно простых систем.

Основные свойства перемежаемости и типичные модели

В первых работах по перемежаемости [1-2] рассматривалась перемежаемость типа цикл—хаос, вызванная касательной бифуркацией. В дальнейшем стало ясно, что в процессе перемежаемости могут участвовать любые аттракторы, в том числе и странные [3-11]. Пусть в фазовом пространстве имеется несколько аттракторов, разделенных сепаратрисными поверхностями. При изменении управляющих параметров возможно объединение отдельных аттракторов в единое притягивающее множество. При малом превышении управляющим параметром значения, при котором происходит объединение аттракторов, возможна ситуация, когда фазовая точка будет продолжительное время находиться в областях, занимаемых отдельными аттракторами, и совершать редкие переходы между этими областями. В этом случае будем говорить о перемежаемости между взаимодействующими аттракторами. В физических системах возможны взаимодействие аттракторов и перемежаемость, индуцированные флуктуациями.

Динамические системы, демонстрирующие перемежаемость, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. При наличии флуктуаций эти уравнения становятся стохастическими. В области изменения управляющих параметров, где реализуется этот эффект, имеется бесконечное множество траекторий больших периодов [12]. При малых надкритичностях резко возрастает время корреляции процесса, что приводит при численном моделировании к необходимости проводить усреднение на больших временах. Это затрудняет теоретический и численный анализы перемежаемости. Поэтому большинство авторов в качестве моделей используют дискретные отображения [13–19, 5, 6, 10].

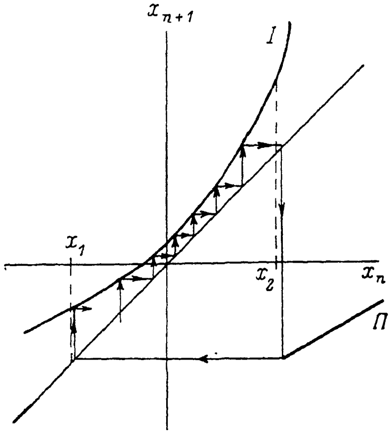

Рис. 1. Отображение $x_{n+1}=x_n+$ $+f(x_n)$.

Одним из универсальных свойств перемежаемости является критическая зависимость времени жизни состояния от параметра

$$\tau_0=|a-a_{кр}|^{-\gamma}=\varepsilon^{-\gamma}, \qquad (1)$$

где ε — параметр надкритичности.

Критический индекс γ не является универсальным и определяется типом перемежаемости. Из (1) видно, что при $a\approx a_{кр}$ время жизни τ_0 резко возрастает, что приводит к появлению в спектре мощности процесса частот, кратных $2\pi/\tau_0$. При малых ε спектр эволюционирует в область низких частот. Процесс перемежаемости не является гауссовым [10, 17–19], что приводит к нарушению центральной предельной теоремы. Зависимость дисперсии от времени приобретает нелинейный характер [10]. Спектр мощности для целого ряда типов перемежаемости на низких частотах имеет «фликкерную» компоненту

$$S(\omega)\sim\omega^{-\alpha}, \quad 0<\alpha\leqslant 1. \qquad (2)$$

Рассмотрим типичную схему для аналитического рассмотрения перемежаемости типа цикл—хаос [15, 16]. В качестве модели используется одномерное отображение вида

$$x_{n+1}=x_n+f(x_n)+g\xi_n,$$
$$|x_n|\ll 1, \quad \langle\xi_n\rangle=0, \quad \langle\xi_n\xi_{n'}\rangle=\delta_{nn'}, \qquad (3)$$

$f(x)$ — некоторая нелинейная функция.

Вид отображения представлен на рис. 1. Если $x_n\leqslant x_2$, то фазовая точка движется в ламинарном канале *I*. При $x_n>x_2$ происходит переход на участок *II*, который «возвращает» точки в ламинарный канал. Так как $|x_n|\ll 1$, то разностное уравнение (3) можно заменить дифференциальным уравнением [16]

$$\dot{x}=f(x)+g\xi(t),$$
$$\langle\xi(t)\rangle=0, \quad \langle\xi(t)\xi(t')\rangle=\delta(t-t'). \qquad (4)$$

Стохастическому уравнению (4) соответствует уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности $P(x, t)$

$$\partial_t P(x, t)=-\partial_x[f(x)P(x, t)]+\frac{g^2}{2}\partial_{xx}P(x, t) \qquad (5)$$

с начальными, граничными условиями и условием нормировки

$$P(x, 0)=P_0(x), \quad P(x_2, t)=0, \quad \int\limits_{-\infty}^{x_2}P(x, t)\,dx=1. \qquad (6)$$

Стационарное решение уравнения (5) имеет вид

$$P_{st}(x)=\begin{cases}\dfrac{2G_0}{g^2}\exp\left[\dfrac{2}{g^2}\varphi(x)\right]F(x), & x_1\leqslant x\leqslant x_2,\\ \dfrac{2G_0}{g^2}\exp\left[\dfrac{2}{g^2}\varphi(x)\right]F(x_1), & x<x_1,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\int_0^x f(y)\,dy,\quad F(x)=\int_x^{x_2}\exp\left[-\frac{2}{g^2}\varphi(y)\right]dy. \tag{7}$$

Константа G_0 определяется из условия нормировки. Длительность ламинарной фазы, определяемая как интервал времени, в течение которого фазовая точка проходит ламинарный канал, является случайной величиной. Для данной модели существует простая связь средней длительности ламинарной фазы с константной G_0

$$\tau_л=(G_0)^{-1}. \tag{8}$$

При увеличении интенсивности флуктуаций g средняя длительность ламинарной фазы уменьшается [16].

Для расчета спектра мощности процесса используется следующая методика. Реальный процесс x_n заменяется импульсным процессом u_n

$$u_n=\begin{cases}0, & x_n>x_2,\\ 1, & x_n\leqslant x_2.\end{cases} \tag{9}$$

Если процесс x_n считать марковским, то импульсы u_n будут статически независимы [20]. Для нахождения спектра мощности $S_u(\omega)$ импульсного процесса u_n достаточно знать характеристическую функцию длительностей импульсов, т. е. характеристическую функцию длительностей ламинарных фаз $P_2(\omega)$ [6, 7],

$$S_u(\omega)=\operatorname{Re}\frac{1+e^{i\omega}P_2(\omega)}{1-e^{i\omega}P_2(\omega)},\quad P_2(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{P}_2(k)\,e^{i\omega k}, \tag{10}$$

где $\hat{P}_2(k)$ — плотность распределения длительностей ламинарных фаз.

Для определения $\tilde{P}_2(k)$ можно воспользоваться выражением

$$\tilde{P}_2(\tau)\,d\tau=P_B(x_0)\,dx_0, \tag{11}$$

где $P_B(x_0)$ — плотность вероятности возвращения фазовой траектории в ламинарный канал.

В (11) явно не входят флуктуации, кроме того, вычисление $P_B(x_0)$ представляет сложную задачу. Авторы [6, 7] полагают $P_B(x_0)=\text{const}$, что, вообще говоря, неверно. Указанная методика применима лишь для моделей типа (3). В работах [8, 9] развивается общая теория формы спектра для перемежаемости типа цикл—хаос. Для других видов перемежаемости теоретических результатов сравнительно немного. Для каждой конкретной модели фактически применяется свой специфический метод решения.

Применение теории достижения границ марковским процессом для исследования перемежаемости

Предположим, что имеется динамическая система, описываемая системой стохастических дифференциальных уравнений с δ-коррелированными нормальными источниками. Пусть в системе происходит перемежаемость между двумя аттракторами, разделенными в фазовом пространстве границей Г. Уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности $P(x, t)$ запишется в виде

$$\partial_t P(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\partial_{x_ix_i}[B_i(x)\,P(x,t)]-\sum_{i=1}^{N}\partial_{x_i}[A_i(x)\,P(x,t)], \tag{12}$$

где $A_i(x)$, $B_i(x)$ — коэффициенты сноса и диффузии соответственно; $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$; N — размерность фазового пространства системы.

Будем интересоваться статистикой времени жизни каждого состояния системы, т. е. временем нахождения фазовой точки на каждом аттракторе. Для этого можно воспользоваться теорией достижения границ [20]. Действительно, время нахождения фазовой точки на одном из аттракторов совпадает с временем первого достижения границы Г. Для вероятности первого достижения границы $p(t, x)$ запишем уравнение Понтрягина [20]

$$\partial_t p(t, x) = \sum_{i=1}^{N} A_i(x)\, \partial_{x_i} p(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} B_i(x)\, \partial_{x_i x_i} p(t, x). \tag{13}$$

Уравнение (13) следует решать при следующих условиях:

$$p(0, x) = 0, \quad p(t, x)|_{x \in \Gamma} = 1. \tag{14}$$

Аналогично записывается уравнение для плотности вероятности времени первого достижения границы $w(t, x)=\partial_t p(t, x)$

$$\partial_t w(t, x) = \sum_{i=1}^{N} A_i(x)\, \partial_{x_i} w(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} B_i(x)\, \partial_{x_i x_i} w(t, x) \tag{15}$$

с условиями

$$w(0, x) = 0, \quad w(t, x)|_{x \in \Gamma} = \delta(t). \tag{16}$$

Запишем теперь уравнения для моментов времени первого достижения границы $T_n(x) = \int_0^\infty t^n w(t, x)\, dt$ [20]

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} B_i(x)\, \partial_{x_i x_i} T_n(x) + \sum_{i=1}^{N} A_i(x)\, \partial_{x_i} T_n(x) = -n T_{n-1}(x),$$

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_n(x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Процесс перемежаемости вблизи критической точки можно разбить на два

$$x(t) = z(t)\, u(t), \tag{18}$$

где $z(t)$ описывает движение фазовой точки на каждом из аттракторов, а $u(t)$ — переходы с одного аттрактора на другой.

Вблизи критической точки эти процессы можно считать статистически независимыми, а $u(t)$ представить в виде импульсного процесса

$$u(t) = \begin{cases} 0, & x \in G_1, \\ 1, & x \in G_2, \end{cases} \tag{19}$$

где G_1 и G_2 — некоторые области фазового пространства, занимаемые аттракторами.

Для спектра мощности процесса $x(t)$ получим

$$S_x(\omega) = S_z(\omega) + \langle z(t) \rangle^2 S_u(\omega). \tag{20}$$

Таким образом, необходимо вычислить спектр мощности импульсного процесса $u(t)$. Для этого достаточно знать плотность распределения длительностей и пауз импульсов, вернее, их характеристические функции. В рассматриваемом случае роль длительностей и пауз импульсов играет время нахождения фазовой точки на каждом из аттракторов или время первого достижения границы Г. Для характеристической функции времени первого достижения границы можно записать уравнение [20]

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} B_i(x)\,\partial_{x_i x_i} W(s,\ x) + \sum_{i=1}^{N} A_i(x)\,\partial_{x_i} W(s,\ x) = sW(s,\ x), \tag{21}$$

$$W(s,\ x) = \int_0^\infty w(t,\ x)\,e^{-st}dt,\quad s\to i\omega,\ \ W(s,\ x)|_{x\in\Gamma} = 1. \tag{22}$$

Используя уравнения (13), (17), (21), можно определить основные статистические характеристики перемежаемости вблизи критического значения управляющего параметра. Возможно рассмотрение и чисто динамического случая. Для этого нужно перейти к пределу $B_i(x)\to 0,\ i=\overline{1,\ N}$

Примеры

Перемежаемость типа цикл—хаос. В качестве модели рассмотрим стандартное отображение типа (3) с $f(x_n)=\varepsilon+ax_n^2$. Осуществляя стандартный переход к дифференциальному уравнению, получим

$$\dot{x} = \varepsilon + ax^2 + g\xi(t),\quad \langle\xi(t)\rangle = 0,\quad \langle\xi(t)\,\xi(t')\rangle = \delta(t-t'). \tag{23}$$

В данном случае в качестве границы нужно взять $x=x_2$ (рис. 1). Уравнение для вероятности первого достижения границы $x=x_2$, $p(t,\ x)$ будет

$$\partial_t p(t,\ x) = \frac{g^2}{2}\,\partial_{xx} p(t,\ x) + (\varepsilon + ax^2)\,\partial_x p(t,\ x),\quad p(0,\ x) = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим вопрос о граничных условиях. При $x=x_2$ имеется поглощающая граница и $p(t,\ x_2)=1$. При $x\to-\infty$ граница будет естественная, на ней необходимо задать условие вида [20] $p(t,\ x)|_{x\to-\infty}=0$. Аналитическое решение уравнения (24) с указанными граничными условиями затруднительно, поэтому решение проводилось численно с применением метода конечных разностей. Результат представлен на рис. 2. Видно, что при $t\to\infty$ $p(t,\ x)\to 1$.

Уравнение для моментов времени первого достижения границы $x=x_2$ имеет вид

$$\frac{g^2}{2}\,\partial_{xx} T_n(x) + (\varepsilon + ax^2)\,\partial_x T_n(x) = -nT_{n-1}(x),\quad T_n(x_2) = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим чисто динамический случай $g\to 0$. Для среднего времени первого достижения границы $\tau=T_1$ получим

$$\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\,x_2 - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\,x\right). \tag{26}$$

Среднее время первого достижения границы $\tau(x)$ совпадает с длительностью ламинарной фазы.

Для характеристической функции времени первого достижения границы получим уравнение

$$\frac{g^2}{2}\,\partial_{xx} W(s,\ x) + (\varepsilon + ax^2)\,\partial_x W(s,\ x) = sW(s,\ x),$$

$$s\to i\omega,\quad W(s,\ x)|_{x=x_2} = 1,\quad W(s,\ x)|_{x\to-\infty} = 0. \tag{27}$$

При $g\neq 0$ аналитическое решение уравнения (27) затруднительно, поэтому рассмотрим чисто динамический случай $g\to 0$

$$W(\omega,\ x) = \exp\left[\frac{i\omega}{\sqrt{a\varepsilon}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\,x - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}\,x_2\right)\right].$$

Для получения аналитического выражения спектра мощности еще более упростим задачу. Рассмотрим линейный ламинарный канал, т. е. положим $a=0$. Тогда для $W(\omega,\ x)$ получим

$$W(\omega, x) = \exp[i\omega(x - x_2)/\varepsilon].$$

Проведем усреднение по x, предполагая, что фазовая точка возвращается в ламинарный канал с вероятностью I,

$$W(\omega) = \int_{x_1}^{x_2} W(\omega, x)\, dx = [1 - \exp(-i\omega\tau_0)]/i\omega\tau_0,$$

где

$$\tau_0 = (x_2 - x_1)/\varepsilon.$$

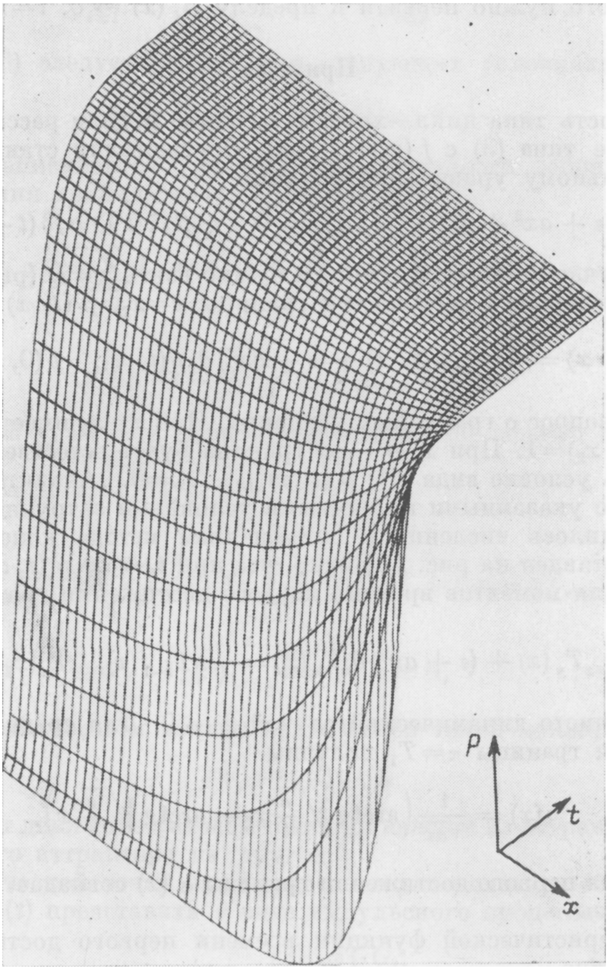

Рис. 2. Вероятность первого достижения границы $p(t, x)$ (изометрическая проекция).

Подставляя найденную характеристическую функцию $W(\omega)$ в формулу (10), получим выражение для спектра мощности процесса $u(t)$

$$S_u(\omega) = \frac{2}{\tau_0}\left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{1 - \left(\frac{\sin \omega\tau_0/2}{\omega\tau_0/2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin \omega\tau_0/2}{\omega\tau_0/2}\right)^2 - 2\left(\sin \omega\, \frac{1 - \cos \omega\tau_0}{\omega\tau_0} + \cos \omega\, \frac{1 - \sin \omega\tau_0}{\omega\tau_0}\right)}. \qquad (28)$$

На рис. 3 показаны зависимости спектра мощности, рассчитанные по формуле (28) (кривая *2*) и с помощью численного моделирования отображения

$$x_{n+1}=\begin{cases} x_n+\varepsilon, & x_n\leqslant x_2,\\ \eta_n, & x_n>x_2,\end{cases}$$

где η_n — случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[x_1, x_2]$ (кривая *1*).

Видно хорошее соответствие аналитического и численного результатов. Из рис. 3 следует, что спектр мощности $S_n(\omega)$ не имеет «фликкерной» компоненты $\omega^{-\alpha}$. Это обусловлено тем, что плотность распределения длительностей ламинарных фаз в данном случае является равномерной, т. е. не имеет временных «хвостов», что в свою очередь связано с линейностью ламинарного канала. Для процессов, имеющих спектр типа $\omega^{-\alpha}$, характерно наличие больших хвостов у плотности распределения длительностей [21, 22]. В случае нелинейного

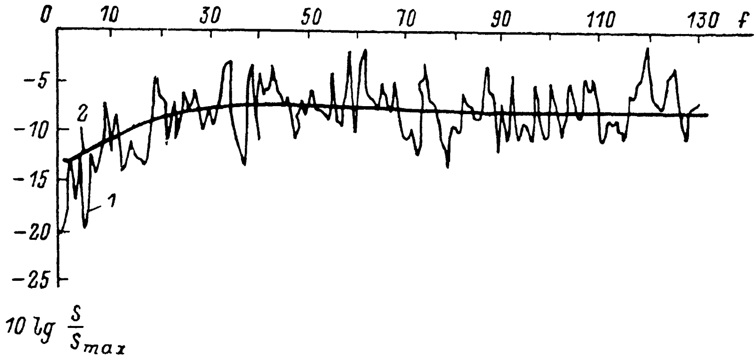

Рис. 3. Спектр мощности отображения $x_{n+1}=\varepsilon+x_n$.

ламинарного канала $a\neq 0$ $\mu\varepsilon\to 0$ плотность распределения длительностей ламинарных фаз имеет большие хвосты и в спектре мощности появляется «фликкерная» компонента [7, 9].

Перемежаемость типа цикл—цикл, возникающая под действием шумов при бифуркациях удвоения. Пусть имеется динамическая система, которая при $a=a_0$ испытывает бифуркацию удвоения периода. При этом число неподвижных точек в отображении Пуанкаре также удваивается. Рассмотрим влияние малых аддитивных флуктуаций на механизм удвоения вблизи точки бифуркации. В качестве модели используем отображение Фейгенбаума

$$x_{n+1}=1-ax_n^2+g\xi_n, \tag{29}$$

где ξ_n — нормальный δ-коррелированный шум с нулевым средним.

При отсутствии флуктуаций бифуркация удвоения происходит при $a=a_0=0.75$. При значительном удалении по параметру a от a_0 ($a=0.76$—0.77) фазовый портрет при интенсивности шума $g^2=0.001$ показан на рис. 4, *а* и представляет собой две области, в которые попадает фазовая точка через итерацию. При незначительном отклонении параметра от значения a_0 ($a\approx 0.751$) фазовый портрет существенно изменяется (рис. 4, *б*). Два отдельных аттрактора объединяются, образуется единый аттрактор. Этот эффект можно достичь, увеличивая интенсивность шума g. Таким образом, мы имеем перемежаемость между двумя регулярными аттракторами, индуцированную шумом.

Рассмотрим методом численного моделирования эволюцию спектра мощности системы (29) при изменении параметра a. На рис. 5 (кривая *2*) показана низкочастотная часть спектра при $a=0.749$, т. е. до бифуркации удвоения. Аналогичную форму имеет спектр мощности при $a\geqslant 0.76$. При $a=0.751\geqslant a_0$ форма спектра существенно изменяется. Спектр эволюционирует в область низких частот (рис. 5, кривая *1*). Это связано с наличием длительных отходов от среднего значения $\langle x_n\rangle$ при перемежаемости, что ведет к увеличению времени корреляции. Вычисления показали, что время корреляции $\tau_{кор}$ удовлетворяет универсальной критической зависимости вида (1)

$$\tau_{кор} \sim |a - 0.75|^{-\gamma}, \quad \gamma \approx 0.5.$$

Указанное явление хорошо наблюдается в эксперименте на генераторе с инерционной нелинейностью. Однако из-за технических шумов низкочастотную компоненту в спектре трудно регистрировать. Сделать вывод о наличии перемежаемости позволяет наблюдение отображения Пуанкаре методом стробоскопической подсветки.

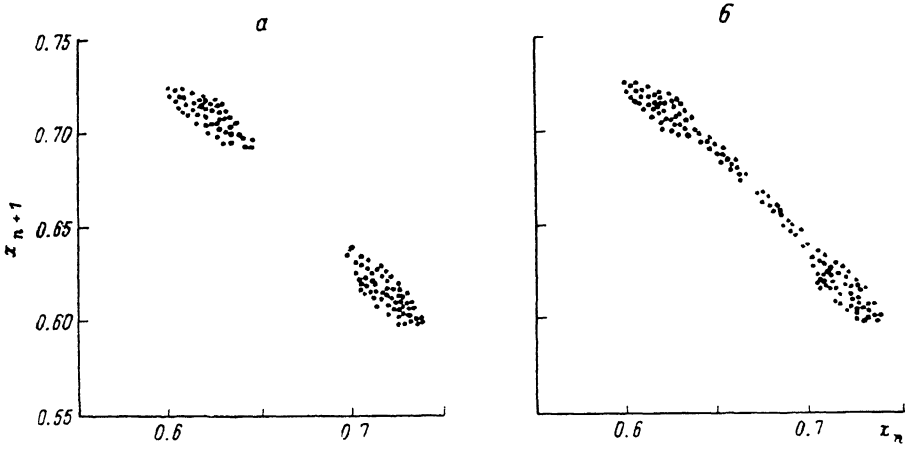

Рис. 4. Фазовый портрет системы (29).

Применим для исследования этого явления теорию достижения границ. Для этого рассмотрим дважды примененное отображение Фейгенбаума

$$x_{n+1} = 1 - a + 2a^2x_n^2 - a^3x_n^4. \tag{30}$$

При $a < 0.75$ отображение (30) имеет одну устойчивую неподвижную точку

$$x_0 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a. \tag{31}$$

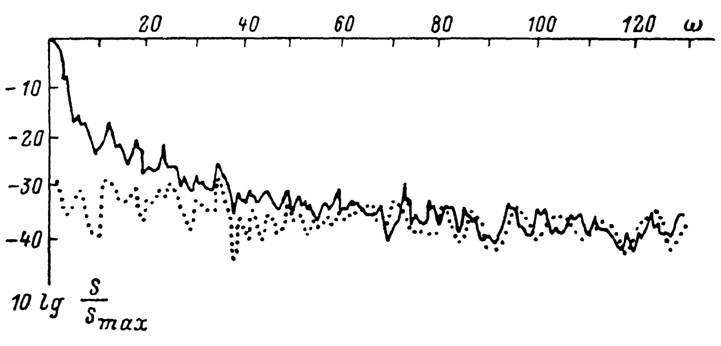

Рис. 5. Низкочастотная часть спектра мощности системы (29) при различных значениях параметра a.

При $a \geqslant 0.75$ точка x_0 становится неустойчивой и образуются две устойчивые точки x_1 и x_2: $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$. Введем новую переменную $y = x - x_0$. Очевидно, что при $a \geqslant 0.75$ $|y| \ll 1$. Для y получим отображение

$$\begin{gathered} y_{n+1} = C_0 + C_1y_n + C_2y_n^2 + C_3y_n^3 + C_4y_n^4, \\ C_0 = 1 - a - x_0 + 2a^2x_0^2 - a^3x_0^3, \\ C_1 = 4a^2x_0 - 4a^3x_0^3, \quad C_2 = 2a^2 - 6a^3x_0^2, \\ C_3 = -4a^3x_0, \quad C_4 = -a^3. \end{gathered} \tag{32}$$

Отнимем от обеих частей (32) y_n

$$y_{n+1}-y_n=C_0+(C_1-1)\,y_n+C_2y_n^2+C_3y_n^3+C_4y_n^4.$$

Так как $|y|\ll 1$ при $a\geqslant 0.75$, то можно совершить переход к дефференциальному уравнению

$$\dot{y}=C_0+(C_1-1)\,y+C_2y^2+C_3y^3+C_4y^4+g\xi(t). \tag{33}$$

В (33) введен аддитивный δ-коррелированный нормальный шум малой интенсивности. Стохастическому дифференциальному уравнению (33) соответствует уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности $P(y,\ t)$

$$\partial_t P(y,\ t)=-\partial_y\Big[(C_0+(C_1-1)\,y+C_2y^2+$$
$$+C_3y^3+C_4y^4)\,P(y,\ t)\Big]+\frac{g^2}{2}\,\partial_{yy}P(y,\ t). \tag{34}$$

При следующих граничных условиях и условии нормировки:

$$P(-\infty,\ t)=P(\infty,\ t)=0,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}P(y,\ t)\,dy=1.$$

Стационарное решение уравнения (34) имеет вид

$$P_{st}(y)=\frac{C}{g^2}\exp\left\{\frac{2}{g^2}\left[C_0y+(C_1-1)\frac{y^2}{2}+C_2\frac{y^3}{3}+C_3\frac{y^4}{4}+C_4\frac{y^5}{5}\right]\right\}, \tag{35}$$

где константа C определяется из условий нормировки.

График функции $P_{st}(y)$ при $a=0.76$, $g^2=0.001$ представлен на рис. 6, *а*. Максимумы функции распределения соответствуют неподвижным точкам $y_1=x_1-x_0$ и $y_2=x_2-x_0$, а минимум — седловой точке x_0.

Отметим, что данную задачу можно интерпретировать как движение частицы под действием флуктуаций в потенциале

$$\varphi(y)=-C_0y-(C_1-1)\,y^2/2-C_2y^3/3-C_3y^4/4-C_4y^5/5,$$

имеющем две «ямы».

Рассмотрим статистику времени перехода из одной потенциальной ямы в другую. В качестве границ используем значения $y_1=x_1-x_0$ и $y_2=x_2-x_0$. Уравнение для вероятности первого достижения границ y_1, y_2 $p(t,\ y)$ запишется в виде

$$\partial_t p(t,\ y)=[C_0+(C_1-1)\,y+C_2y^2+C_3y^3+C_4y^4]\,\partial_y p(t,\ y)+$$
$$+\frac{g^2}{2}\,\partial_{yy}p(t,\ y) \tag{36}$$

с начальным и граничными условиями

$$p(0,y)=0,\ p(t,y_1)=p(t,y_2)=1.$$

Вид зависимости $p(t,\ y)$, полученный численным интегрированием уравнения (36), показан на рис. 6, *б*. Зная $p(t,\ y)$, определяем плотность вероятности времени перехода $w(t,\ y)=\partial_t p(t,\ y)$. Усредняя по y, получим

$$w(t)=\int\limits_{y_1}^{\infty}w(t,\ y)\,P_{st}(y)\,dy.$$

График функции $w(t)$ представлен на рис. 6, *в*. Зависимость $w(t)$ близка к экспоненциальному распределению. Если теперь ввести импульсный процесс

$$u(t)=\begin{cases}1, & y\leqslant y_0,\\ 0, & y>y_0,\end{cases}$$

то распределение длительностей и пауз импульсов приблизительно будет соответствовать экспоненциальному закону. В [23] показано, что в этом случае спектр мощности процесса на низких частотах будет иметь форму лоренциана.

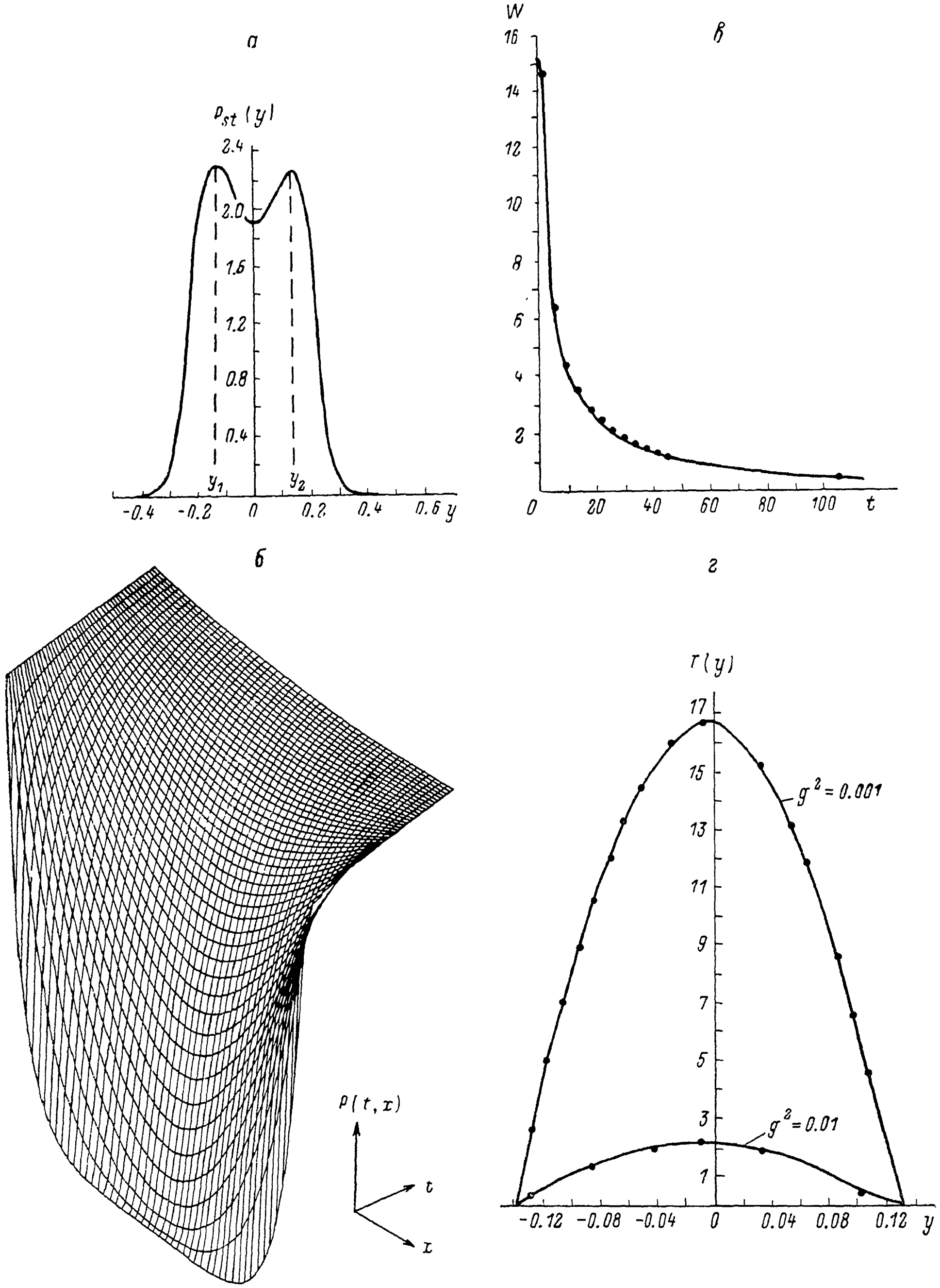

Рис. 6. Стационарная плотность вероятности $P_{st}(y)$ (*а*), вероятность достижения границ y_1, y_2 $p(t, y)$ (*б*), плотность вероятности времени первого достижения границы $w(t)$ (*в*) и среднее время перехода $T_1(y)$ при различных интенсивностях шума (*г*).

Расчет среднего времени перехода с одного аттрактора на другой произведем по формуле

$$T_1(y) = \int_0^\infty tW(t, y)\,dt.$$

На рис. 6, *г* показана зависимость $T_1(y)$ — среднего времени перехода от y при различных значениях интенсивности шума. Видно, что при возрастании интенсивности флуктуаций время перехода резко сокращается. Отметим, что аналогичный анализ можно провести и для последующих бифуркаций удвоения периода.

Перемежаемость типа хаос—хаос. Перемежаемость типа хаос—хаос обсуждалась в работах [3-5]. В [5] была предложена простая модель для исследования свойств этого вида перемежаемости

$$x_{n+1} = 1 - a + 2a^2x_n^2 - a^3x_n^4,$$

которая представляет собой дважды примененное отображение Фейгенбаума (30). При $a=a^* \approx 1.401...$ на базе неподвижных точек x_1 и x_2 образуются два независимых странных аттрактора, разделенных седловой точкой x_0. При $a=a^{**} \approx 1.5437...$ происходит кризис этих аттракторов, в результате которого они объединяются и образуется единый аттрактор. При этом фазовая точка продолжительное время находится в областях, занимаемых ранее отдельными аттракторами, и совершает перескоки из одной области в другую. Эволюция спектра мощности процесса полностью аналогична перемежаемости, индуцированной шумом при бифуркации удвоения: при $a \leqslant a^{**}$ спектр мощности близок к спектру белого шума. При $a \geqslant a^{**}$ спектр мощности эволюционирует в область низких частот, как показано на рис. 5. С помощью численного моделирования в [5] показано, что время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ удовлетворяет универсальной критической зависимости

$$\tau_{\text{кор}} \sim |a - a^{**}|^{-\gamma}, \quad \gamma \approx 0.5.$$

Аналогичный результат получен в работе [4] на модели генератора с инерционной нелинейностью.

Заключение

Разные виды перемежаемости, обусловленные различными бифуркационными механизмами, порождающими это явление, тем не менее обладают некоторыми общими универсальными свойствами: критической зависимостью времени корреляции от параметра, формой спектра мощности.

Для описания свойств перемежаемости любого типа в работе предлагается методика, основанная на теории достижения границ марковским процессом. В качестве границ следует выбирать сепаратрисные поверхности в фазовом пространстве, разделяющие взаимодействующие аттракторы. Этот подход дает возможность определить статистику времени достижения границы, т. е. статистику ламинарных фаз и турбулентных всплесков, и позволяет вблизи критической точки получить спектр мощности процесса. Основные трудности данной методики связаны с необходимостью решения уравнений в частных производных со сложными граничными условиями.

Список литературы

[1] *Manneville P., Pomeau Y.* // Phys. Lett. 1979. Vol. 75A. N 1. P. 2—8.
[2] *Manneville P., Pomeau Y.* // Phys. D. 1980. Vol. 1. N 2. P. 219—226.
[3] *Arecchi F. T., Badii R., Politi A.* // Phys. Rev. 1985. Vol. 32A. N 1. P. 402—408.
[4] *Анищенко В. С.* // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. Вып. 10. С. 629—633.
[5] *Анищенко В. С., Нейман А. Б.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 17. С. 1063—1066.
[6] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
[7] *Kohyama T., Aizawa Y.* // Prog. Theor. Phys. 1984. Vol. 71. N 5. P. 917—929.
[8] *Shobu K., Ose T., Mori H.* // Prog. Theor. Phys. 1984. Vol. 71. N 3. P. 458—473.
[9] *Mori H., So B. C., Kuroki A.* // Phys. D. 1986. Vol. 21. N 2. P. 355—370.
[10] *Geisel T., Thomae S.* // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52A. N 22. P. 1936—1939.
[11] *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Саратов, 1986. Ч. 2. 198 с.
[12] *Eckmann J.-P.* // Rev. Mod. Phys. 1981. Vol. 53. N 4. P. 643—654.
[13] *Bussak M. N., Meunier C.* // J. Phys. 1982. Vol. 43. N 4. P. 585—589.
[14] *Meunier C., Bussac M. N., Laval G.* // Phys. D. 1982. Vol. 4. N 2. P. 236—243.
[15] *Пиковский А. С.* // Препринт ИПФ АН СССР. № 39. Горький, 1981. 12 с.

[16] *Ланда П. С., Стратанович Р. Л.* // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 1. С. 65—69.
[17] *Fujisaka H.* // Prog. Theor. Phys. 1984. Vol. 71. N 3. P. 513—523.
[18] *Fujisaka H., Inoue M.* // Prog. Theor. Phys. 1985. Vol. 74. N 1. P. 20—30.
[19] *Inoue M., Kawaguchi T., Fujisaka H.* // Phys. Lett. 1986. Vol. 115A. N 4. P. 139—142.
[20] *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
[21] *Вайнштейн Л. А., Рождественский В. В.* // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. Вып. 6. С. 2142—2151.
[22] *Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е.* // Изв. Вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 9. С. 1151—1157.
[23] *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1974. Т. 1. 550 с.

Поступило в Редакцию
25 июля 1988 г.