

01

© 1990 г.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ ФОКУСИРОВКИ ИЗ БИТТЕРОВСКИХ СОЛЕНОИДОВ

В. Н. Канунников, И. И. Логачев

Получены приближенные зависимости для радиальной и аксиальной составляющих магнитного поля в приосевой области биттеровского соленоида. Найдены выражения для расчета поля в фокусирующих системах, составленных из биттеровских соленоидов. Приведены оценки для искажений магнитного поля, вызванных погрешностями юстировки — смещением одного из соленоидов системы, а также его поворотом (наклоном) относительно ее оси.

Введение

Для фокусировки и транспортировки пучков заряженных частиц применяются как соленоиды с постоянной плотностью тока по всему сечению катушки, так и с переменной плотностью тока. Ниже подробно исследован случай, когда плотность тока обратно пропорциональна расстоянию от оси соленоида $j(r) = j_0/r$ и постоянна вдоль оси z . Такой соленоид впервые предложен и применен Биттером (см., например, [1]). Он отличается рядом преимуществ, среди которых возможность получения большой напряженности поля благодаря хорошему теплоотводу и высокой механической прочности, возможность точного изготовления и обеспечения точной установки; условиях совпадения геометрической и магнитной осей соленоида и др.

До сих пор расчеты составляющих магнитного поля для биттеровских соленоидов вне оси проводили численно. Для соленоидов с постоянной плотностью тока известны приближенные соотношения в виде рядов [1, 2], которые описывают поле в ограниченных приосевых объемах (например, только в центре соленоида или только в области его торцов). Ниже решена более общая задача: получены разложения для составляющих поля в произвольной приосевой области биттеровского соленоида. Аналогичным методом получены выражения и для поля соленоидов с постоянной плотностью тока (см. Приложение), которые содержат поправки к известным формулам.

Аналитические аппроксимации для радиальной и аксиальной составляющих поля

Как известно [3], составляющие магнитного поля, создаваемого в некоторой точке пространства (r, z) витком с током I , можно представить в виде

$$H_r = 0.2I \frac{z - z_0}{r [(a+r)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + r^2 + (z - z_0)^2}{(a-r)^2 + (z - z_0)^2} E(k) \right],$$

$$H_z = 0.2I \frac{1}{[(a+r)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - r^2 - (z - z_0)^2}{(a-r)^2 + (z - z_0)^2} E(k) \right]. \quad (1)$$

Здесь H — напряженность магнитного поля в эрстедах; a — радиус витка в см; I — ток в А, протекающий через виток; z_0 — координата центра витка; $K(k)$ —

полный эллиптический интеграл первого рода; $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода; $k^2 = (4ar)/[(a+r)^2 + (z-z_0)^2]$.

В приосевой области воспользуемся разложением в ряд по малому параметру r/β , где $\beta^2 = a^2 + (z-z_0)^2$. В результате получим

$$H_r = 0.3I \frac{\pi a^2 (z-z_0)}{\beta^4} \left(\frac{r}{\beta}\right) \left[1 + \frac{15a^2 - 20(z-z_0)^2}{8\beta^2} \left(\frac{r}{\beta}\right)^2 + O\left(\frac{r^4}{\beta^4}\right)\right],$$

$$H_z = 0.2I \frac{\pi a^2}{\beta^3} \left[1 + \frac{3a^2 - 12(z-z_0)^2}{4\beta^2} \left(\frac{r}{\beta}\right)^2 + O\left(\frac{r^4}{\beta^4}\right)\right]. \quad (2)$$

Переход от одного витка к соленоиду состоит в замене тока I на $jdz_0 da$ и в интегрировании по сечению соленоида $-l_1 \leq z_0 \leq l_1$, $a_1 \leq a \leq b_1$. Для соленоида биттеровского типа $j = j_0/a$. Обозначим ток, протекающий через соленоид, через I и его полное число витков через N , тогда j_0 находится из условия

$$NI = \int_{a_1}^{b_1} da \frac{j_0}{a} \int_{-l_1}^{l_1} dz_0 = j_0 2l_1 \ln \frac{b_1}{a_1},$$

откуда

$$j_0 = \frac{NI}{2l_1 \ln \left(\frac{b_1}{a_1}\right)}. \quad (3)$$

После интегрирования, не учитывая в результате члены четвертого порядка по r/β и более высоких порядков, получаем следующее выражение для радиальной составляющей магнитного поля:

$$H_r = 0.1\pi IN (L_1 + L_2 r^2) r, \quad (4)$$

где

$$L_1 = \frac{1}{2l_1 \ln \left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \left[\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + (z-l_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + (z-l_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + (z+l_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + (z+l_1)^2}} \right], \quad (5)$$

$$L_2 = \frac{1}{16l_1 \ln \left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \left\{ \frac{2(z-l_1)^2 - b_1^2}{[b_1^2 + (z-l_1)^2]^{3/2}} - \frac{2(z-l_1)^2 - a_1^2}{[a_1^2 + (z-l_1)^2]^{3/2}} + \frac{2(z+l_1)^2 - a_1^2}{[a_1^2 + (z+l_1)^2]^{3/2}} - \frac{2(z+l_1)^2 - b_1^2}{[b_1^2 + (z+l_1)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (6)$$

Аналогично радиальной составляющей находится и продольная:

$$H_z = 0.1\pi IN (M_1 + M_2 r^2), \quad (7)$$

где

$$M_1 = \frac{1}{l_1 \ln \left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \ln \left\{ \frac{[(z-l_1) + \sqrt{b_1^2 + (z-l_1)^2}][z+l_1 + \sqrt{a_1^2 + (z+l_1)^2}]}{[(z-l_1) + \sqrt{a_1^2 + (z-l_1)^2}][z+l_1 + \sqrt{b_1^2 + (z+l_1)^2}]} \right\}, \quad (8)$$

$$M_2 = \frac{1}{4l_1 \ln \left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \left\{ \frac{z+l_1}{[a_1^2 + (z+l_1)^2]^{3/2}} - \frac{z+l_1}{[b_1^2 + (z+l_1)^2]^{3/2}} + \frac{z-l_1}{[b_1^2 + (z-l_1)^2]^{3/2}} - \frac{z-l_1}{[a_1^2 + (z-l_1)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (9)$$

Первое слагаемое в (7) совпадает с известным выражением для поля на оси биттеровского соленоида [1]. Зависимость продольного поля от радиуса содержится во втором слагаемом с M_2 .

Аналогичные расчеты были проведены также для соленоидов с постоянной по сечению плотностью тока; отличие состоит в виде функций L_1 , L_2 , M_1 , M_2 (см. Приложение).

Графики входящих в выражение (4) функций $L_1(z)$ и $L_2(z)$ для соленоида с $l_1=40$ см, $a_1=5$ см, $b_1=10$ см, $N=200$ представлены на рис. 1. Зависимость радиальной составляющей магнитного поля $H_r(r, z)$ (4) для трех значений радиуса (r , см: 1 — 0.5, 2 — 1, 3 — 2) и результаты расчетов на ЭВМ точным интегрированием первого из выражений (1) представлены

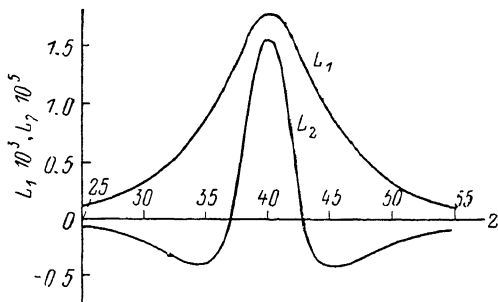


Рис. 1. Функции $L_1(z)$ и $L_2(z)$ для соленоида с различными параметрами.

Координата z (см) отсчитывается от центра соленоида.

на рис. 2. Второе слагаемое (с L_2) в выражении (4) при $r \leq 1$ см на два порядка меньше первого слагаемого (с L_1). Поэтому при некоторых расчетах биттеровских соленоидов членом с L_2 можно пренебрегать.

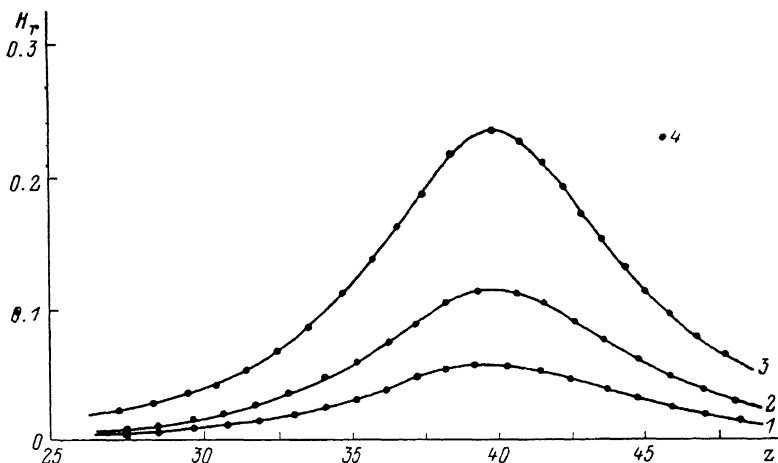


Рис. 2. Зависимость радиальной составляющей магнитного поля $H_r(r, z)$ (Э/А) от аксиальной координаты z (см) для трех значений радиуса.

Сплошная кривая — расчеты по приближенной формуле (4), 4 — результаты точного расчета на ЭВМ.

На рис. 3 приведены графики функций $M_1(z)$ и $M_2(z)$ для того же соленоида. Как и в случае с L_1 и L_2 , функция M_2 на два порядка меньше M_1 . Зависимость продольной составляющей поля от z для трех значений радиуса ($r=0, 1, 2$ см) представлена на рис. 4. На этом же рисунке приведены результаты точных расчетов на ЭВМ путем интегрирования выражений (1).

Поле в системе биттеровских соленоидов и влияние погрешностей их юстировки

Выражения (4) и (7) позволяют рассчитать поле в системе из нескольких соленоидов. Рассмотрим два соосных соленоида, расположенных друг за другом, и получим приближенные выражения для составляющих поля в приосевой области. Пусть число их витков N_1 и N_2 , токи I_1 и I_2 , длины $2l_1$ и $2l_2$, длина промежутка между ними 2Δ . Внутренний и внешний радиусы соленоидов обозначим через a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно. Поле соленоида в системе координат, связанной с его центром (r, z') , дается выражениями (4) и (7). Аналогичные вы-

ражения справедливы для составляющих поля второго соленоида, но в системе координат, связанной с его центром (r, z''). Перейдем в систему координат с центром в середине промежутка между соленоидами

$$z' = z + (l_1 + \Delta), \quad z'' = z - (l_2 + \Delta). \quad (10)$$

Учитывая принцип суперпозиции и пренебрегая зависимостью от радиуса (т. е. не учитывая L_2 , что при $r/a \leq 0.2$ вносит погрешность в несколько процентов), запишем радиальную составляющую в виде

$$H_r = 0.1\pi (I_1 N_1 L_1^I + I_2 N_2 L_1^{II}) \cdot r, \quad (11)$$

где L_1^I и L_1^{II} даются выражением (5) после замены переменных (10).

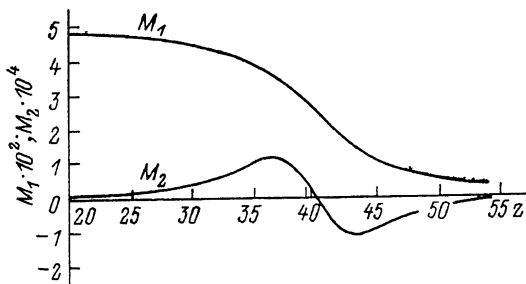


Рис. 3. Функции $M_1(z)$ и $M_2(z)$ для соленоида с параметрами $l_1=40$ см, $a_1=5$ см, $l_2=10$ см, $N=200$.

Воспользовавшись выражением (7) и выполняя аналогичные преобразования, получаем

$$H_z = 0.1\pi (I_1 N_1 M_1^I + I_2 N_2 M_1^{II}), \quad (12)$$

где M_1^I и M_1^{II} даются выражением (6) после замены (10), квадратичной зависимостью поля от радиуса (членом с M_2) мы пренебрегли.

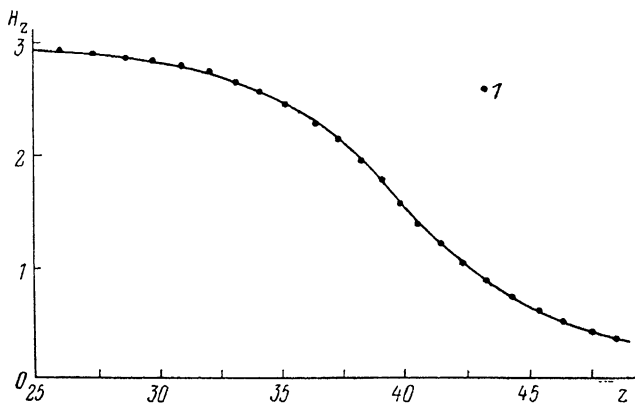


Рис. 4. Зависимость продольной составляющей магнитного поля $H_z(r, z)$ (Э/А) от аксиальной координаты z (см) для трех значений радиуса.

Сплошная линия — расчеты по приближенной формуле (7), 1 — данные точных расчетов на ЭВМ.

Для систем из соленоидов с постоянной плотностью тока меняется только вид функций $L_1^I, L_1^{II}, M_1^I, M_1^{II}$.

Погрешность юстировки одного соленоида можно представить в виде суммы погрешностей, связанных со смещением и поворотом оси соленоида относительно оси системы.

Для расчета искажений поля, обусловленных параллельным смещением соленоида, воспользуемся выражениями (4) и (7). Используем декартову систему координат x, y, z . Примем, что смещение соленоида произошло вдоль

оси y на величину δ . Произведем замену переменных $x=x'$, $y=y'-\delta$, $z=z'$. Тогда

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &= A \{L_1(z) + L_2(z)[x^2 + (y + \delta)^2]\} x, \\ H_y(x, y, z) &= A \{L_1(z) + L_2(z)[x^2 + (y + \delta)^2]\} (y + \delta), \\ H_z(x, y, z) &= A \{M_1(z) + M_2(z)[x^2 + (y + \delta)^2]\}, \\ A &= 0.1\pi IN. \end{aligned} \quad (13)$$

Считая, что смещение мало ($\delta/a_1 \ll 1$), разложим поле в ряд по малому параметру δ/a_1 . В цилиндрической системе координат в присоединенной области получаем следующие выражения для составляющих поля:

$$\begin{aligned} H_r &= AL_1(z)(r + \delta \sin \varphi), \\ H_\varphi &= AL_1(z)\delta \cos \varphi, \\ H_z &= AM_1(z). \end{aligned} \quad (14)$$

Искажение, обусловленное несоосностью элементов фокусирующей системы, локализовано в области $r \sim \delta$ и сравнимо по величине с радиальной составляющей неискаженного поля.

Рассмотрим теперь искажения, возникающие при повороте (наклоне) оси соленоида. Пусть ось соленоида повернута относительно оси системы в плоскости (y, z) на угол α . В декартовой системе координат (x', y', z') , связанной с соленоидом,

$$H_r = AL_1(z')r', \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = AM_1(z'). \quad (15)$$

При малом $\alpha \ll 1$ составляющие поля в системе x, y, z можно разложить по этому параметру

$$\begin{aligned} H_x &= A \left[L_1(z) - \frac{\partial L_1(z)}{\partial z} \alpha y \right] x, \\ H_y &= A \left[L_1(z) y - \frac{\partial L_1(z)}{\partial z} \alpha y^2 + L_1(z) \alpha z - \alpha M_1(z) \right], \\ H_z &= A \left\{ M_1(z) + \alpha \left[L_1(z) - \frac{\partial M_1(z)}{\partial z} \right] y \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

На оси системы ($x=0, y=0$) выражения (16) упрощаются

$$\begin{aligned} H_x &= 0, \\ H_y &= A [L_1(z) \cdot z - M_1(z)] \alpha, \\ H_z &= AM_1(z). \end{aligned} \quad (17)$$

Как видно из выражений (17), поворот в плоскости (y, z) приводит к появлению на оси системы отличной от нуля составляющей H_y . В первом порядке разложения H_x и H_y совпадают с соответствующими величинами для системы с соосными элементами ($\alpha=0$).

В качестве примера на рис. 5 для соленоида с упоминавшимися параметрами представлена зависимость $H_y(z)$ при $\alpha=0.5, 1^\circ$ (0.0085, 0.017 рад), $I=100$ А, $a_1=5$ см, $b_1=10$ см, $l_1=40$ см, $N=200$.

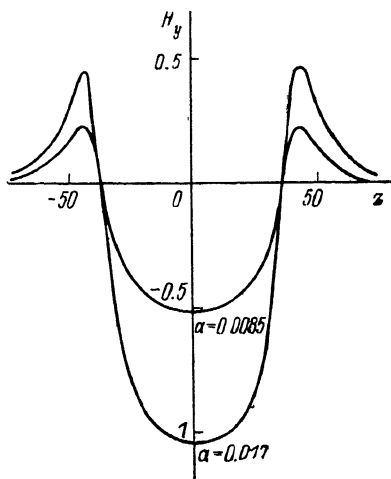


Рис. 5.

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы. Радиальная составляющая поля в приосевой области биттеровского соленоида ($r/a \leq 0.2$) составляет несколько процентов от продольной. Учет зависимости акспальной составляющей поля от радиуса приводит в указанной области к поправкам величиной $\leq 1\%$. Сравнение с результатами точных расчетов на ЭВМ показывает, что радиальную зависимость поперечной и продольной составляющих поля можно описать простыми аналитическими выражениями, которые хорошо работают в области $r \leq 0.2a$, где a — внутренний радиус соленоида.

Полученные аппроксимации применены для оценки погрешностей поля, вызванных смещением и наклоном одного из элементов фокусирующей системы относительно ее оси. Рассчитаны искажения поля для соленоида длиной 80 см, при его осевом смещении на 1 см и наклоне на 1° . В первом случае возникает поперечное поле, которое совпадает по величине с максимальной радиальной составляющей неискаженного поля на радиусе 1 см, но зависит и от азимута. Наклон соленоида на 1° приводит к искажению поля, сравнимому с искажением при параллельном смещении оси соленоида на 1 см.

Полученные в работе результаты найдут применение при расчетах динамики фокусируемого пучка, а также при оценках допусков на точность юстировки магнитной системы.

Авторы благодарят Б. Ф. Бабенко за проведение численных расчетов и А. А. Косарева за полезные обсуждения.

Приложение

Аналогично случаю биттеровского соленоида получены выражения для радиальной и акспальной составляющих поля соленоида с постоянной плотностью тока по сечению катушки. Приведем эти выражения:

$$H_r(r, z) = 0.1\pi IN [L_1(z) + L_2(z)r^2]r,$$

$$L_1(z) = \frac{1}{2l_1(b_1 - a_1)} \left\{ \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + (z + l_1)^2}} + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + (z - l_1)^2}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + (z - l_1)^2}} - \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + (z + l_1)^2}} + \ln \frac{|b_1 + \sqrt{b_1^2 + (z - l_1)^2}| |a_1 + \sqrt{a_1^2 + (z + l_1)^2}|}{|a_1 + \sqrt{a_1^2 + (z - l_1)^2}| |b_1 + \sqrt{b_1^2 + (z + l_1)^2}|} \right\},$$

$$L_2(z) = \frac{1}{16l_1(b_1 - a_1)} \left\{ \frac{b_1^2 + 4b_1^2(z - l_1)^2}{(z - l_1)^2 [b_1^2 + (z - l_1)^2]^{3/2}} - \frac{b_1^2 + 4b_1^2(z + l_1)^2}{(z + l_1)^2 [b_1^2 + (z + l_1)^2]^{3/2}} - \frac{a_1^2 + 4a_1^2(z - l_1)^2}{(z - l_1)^2 [a_1^2 + (z - l_1)^2]^{3/2}} + \frac{a_1^2 + 4a_1^2(z + l_1)^2}{(z + l_1)^2 [a_1^2 + (z + l_1)^2]^{3/2}} \right\},$$

$$H_z(r, z) = 0.1\pi IN [M_1(z) + M_2(z)r^2],$$

$$M_1(z) = \frac{z + l_1}{l_1(b_1 - a_1)} \ln \frac{|b_1 + \sqrt{b_1^2 + (z + l_1)^2}|}{|a_1 + \sqrt{a_1^2 + (z + l_1)^2}|} - \frac{z - l_1}{b_1(b_1 - a_1)} \ln \frac{|b_1 + \sqrt{b_1^2 + (z - l_1)^2}|}{|a_1 + \sqrt{a_1^2 + (z - l_1)^2}|},$$

$$M_2(z) = \frac{1}{4l_1(b_1 - a_1)(z + l_1)} \left\{ \frac{b_1^3}{[b_1^2 + (z + l_1)^2]^{3/2}} - \frac{a_1^3}{[a_1^2 + (z + l_1)^2]^{3/2}} \right\} - \frac{1}{4l_1(b_1 - a_1)(z - l_1)} \left\{ \frac{b_1^3}{[b_1^2 + (z - l_1)^2]^{3/2}} - \frac{a_1^3}{[a_1^2 + (z - l_1)^2]^{3/2}} \right\}.$$

Список литературы

- [1] Монтегмери Д. Б. Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. М.: Мир, 1971. 359 с.
- [2] Афанасьев Ю. Б., Студенцов Н. В., Хорев В. Н. Средства измерений параметров магнитного поля. Л.: Энергия, 1979. 425 с.
- [3] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.

Поступило в Редакцию
30 ноября 1988 г.
В окончательной редакции
5 апреля 1989 г.