

01

© 1990 г.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ
В МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ФРАКТАЛОВ

Р. Р. Нигматуллин, Н. Н. Сутугин

Предлагается обобщение понятия регулярного фрактала, на основании которого вводится представление о случайных фракталах как способе описания неоднородной среды. На основании принципа статистического самоподобия найдена функция распределения случайных фракталов по величине масштаба η , лежащего в интервале самоподобия $\lambda < \eta < \Lambda$. В рамках модели случайных фракталов рассмотрена диэлектрическая релаксация электрических диполей в гетерогенной среде. Дано объяснение явлению «универсального» отклика, наблюдающегося в аномалиях спада тока деполяризации. Эксперименты по релаксации связанной воды в песчаниках подтверждают основные принципы модели.

Введение

Детальный анализ большого числа экспериментальных данных по диэлектрическим потерям в диэлектриках показывает, что для широкого температурного интервала и частотного диапазона ($0 < f \leq 10^8$ Гц) зависимость тока деполяризации от времени имеет вид

$$J(t) \sim (f_p t)^{-n} \frac{f_p}{f_{\max}} \ll f_p t \ll 1. \quad (1)$$

Здесь f_p — частота, примерно соответствующая пику потерь; n — числовой параметр, значения которого лежат в интервале (0, 1). Закономерность типа (1) присуща широкому классу твердых диэлектриков независимо от их физической структуры, типа химической связи между молекулами вида поляризации (дипольной, наведенной, электронной), что и позволило назвать такое поведение «универсальным» откликом (УО) [1]. Привлечение концепций фрактальной геометрии [2] для объяснения данного явления впервые осуществлено в работах [3–6].

По нашему мнению, в основе явления УО может лежать не одна, а несколько причин, причем неупорядоченность, порожденная фрактальной структурой среды, может оказаться одной из основных. В данной работе, опираясь на микроскопический механизм релаксации электрического диполя по Дебаю [1], в рамках предлагаемой модели случайных фракталов (МСФ) получим закономерность спада тока деполяризации типа (1). Как оказалось, зависимость вида (1) может быть связана с пористостью гетерогенной среды и неоднородностями, обусловленными существованием статистической фрактальной структуры. Данные экспериментов по диэлектрической релаксации связанной воды в песчаниках свидетельствуют о непротиворечивости предлагаемой модели.

Обобщенные фракталы

Как известно [2], объем регулярного фрактала масштаба η , имеющего характеристическую длину Λ , определяется выражением

$$v_f(\eta) = v_0(\eta) N(\eta) = G_f \Lambda^D \eta^{d-D}. \quad (2)$$

Здесь $v_0(\eta) = G_f \eta^d$ — объем элементарной ячейки масштаба η ; $N(\eta) = (\Lambda / \eta)^D$ — число ячеек регулярного фрактала в масштабе η ; d — евклидова размерность ($d=1, 2, 3$); D — фрактальная размерность ($0 < D < 3$); G_f — геометрический форм-фактор, характеризующий форму элементарной ячейки. Так, для отрезка ($d=1$) $G_f=1$, для треугольника ($d=2$) $G_f = \sqrt{3}/4$, для тетраэдра ($d=3$) $G_f = \sqrt{2}/12$, и т. д. Формула (2) отражает два существенных свойства регулярного фрактала: однородности и самоподобия [2], но если не требовать наличия этих свойств, то можно прийти к понятию обобщенного фрактала (ОФ). ОФ можно построить следующим образом.

Разобьем характеристическую длину Λ на k_1 частей, выбрав масштаб $\eta_1 = \Lambda / k_1$. Заполним часть исходного элементарного объема, равного $G_f \Lambda^d$, ячейками масштаба η_1 , число которых p_1 . Суммарный объем этих ячеек равен

$$v_1 = G_f p_1 (\Lambda / k_1)^d = p_1 v_0(\eta_1). \quad (3)$$

При $d=3$ и $p_1 = k_1^3$ из (3) получим $v_1 = G_f \Lambda^d$, что соответствует сплошному (однородному) заполнению исходного объема. Неоднородности появляются при условии $p_1 \neq k_1^3$. На втором этапе проведем аналогичную процедуру для каждой из p_1 ячеек, выбрав масштаб $\eta_2 = \Lambda / k_1 k_2$ и заполнив каждую из них p_2 ячейками. Выполнив этот процесс n раз, получим следующую формулу:

$$v_n = G_f \Lambda^d \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{k_1^d k_2^d \dots k_n^d} = p_1 p_2 \dots p_n v_0(\eta_n), \quad (4)$$

$$\eta_n = \Lambda / (k_1 k_2 \dots k_n).$$

Если определить среднее геометрическое величин k_i , p_i формулами

$$\bar{k} = (k_1 k_2 \dots k_n)^{1/n}, \quad \bar{p} = (p_1 p_2 \dots p_n)^{1/n} \quad (5)$$

и эффективный масштаб разбиения через $\tilde{\eta}$

$$\tilde{\eta} = \frac{\Lambda}{\bar{k}^n}, \quad (6)$$

то формула (4) примет вид

$$v_n(\tilde{\eta}) = v_0(\tilde{\eta}) N(\tilde{\eta}) = G_f \tilde{\eta}^d \left(\frac{\Lambda}{\tilde{\eta}} \right)^{\bar{D}}. \quad (7)$$

Здесь $N(\tilde{\eta}) = (\Lambda / \tilde{\eta})^{\bar{D}}$, а

$$\bar{D} = \frac{\ln \bar{p}}{\ln \bar{k}} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln p_i}{\sum_{i=1}^n \ln k_i} \quad (8)$$

— обобщенная фрактальная размерность. Формула (7) формально похожа на формулу (2), но $\tilde{\eta}$, \bar{D} имеют иной смысл. Формулу (7) можно интерпретировать как объем фрактала, обладающего структурной памятью. Эта память отражается в наличии корреляции между этапами разбиения, характеризуемыми наборами p_i и k_i , которые через $\tilde{\eta}$ и \bar{D} входят в (7). Если $p_i = p$, $k_i = k$ для всех $i=1, 2, \dots, n$, то это свойство коррелированности пропадает и формула (7) переходит в (2), причем D в принятых обозначениях определяется выражением

$$D = \frac{\ln p}{\ln k}. \quad (9)$$

Поэтому есть все основания назвать построенную вышеописанным способом структуру обобщенным фракталом, включающим в себя регулярный фрактал и его комбинации как частный случай.

Внимательный анализ формулы (7) показывает также, что она с успехом может быть применена для описания весьма широкого класса структурных неоднородностей. Действительно, разделим весь объем V на ячейки V_j ($j=1, \dots,$

M), каждая из которых имеет характеристическую длину Λ_j . Если в каждом элементарном физическом объеме V_j осуществить вышеописанную процедуру выделения ОФ, имеющего эффективный масштаб $\bar{\eta}_j$, определяемый формулой (6), то общий объем неоднородности, относящийся ко всему объему V , определится выражением

$$V = \sum_{j=1}^M G(j) \bar{\eta}_j^d \left(\frac{\Lambda}{\bar{\eta}_j} \right)^{\bar{D}_j}. \quad (10)$$

Здесь $G_f(j)$ — геометрический форм-фактор фрактала, расположенного в ячейке j ; \bar{D}_j — обобщенная фрактальная размерность, относящаяся к объему V_j ,

$$\bar{D}_j = \frac{\ln \bar{\rho}^j}{\ln \bar{k}^j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \ln p_i^j}{\sum_{i=1}^{n_j} \ln k_i^j}, \quad (j = 1, \dots, M). \quad (11)$$

Модель случайных фракталов и принцип статистического самоподобия

Модель случайных фракталов (МСФ) основывается на предположении гетерогенной среды как совокупности фракталов со случайными значениями масштаба η , лежащего в интервале (λ, Λ) , где λ имеет смысл минимального масштаба, начиная с которого в среде может образоваться фрактал, а Λ — характеристическая длина, совпадающая с величиной максимального масштаба фрактала. Если масштабы η непрерывно распределены в интервале (λ, Λ) и вероятность встретить масштаб η на отрезке $[\eta, \eta + d\eta]$ равна $W(\eta)d\eta$, то средний объем такого фрактала определится выражением

$$\langle v_f \rangle = \int_{\lambda}^{\Lambda} v_f(\eta) W(\eta) d\eta, \quad (12)$$

причем здесь и далее предполагается, что функция $W(\eta)$ нормирована на единицу. Для нахождения вида этой функции потребуем, чтобы после проведения усреднения по формуле (12) самоподобный характер структуры сохранился, т. е.

$$\langle v_f \rangle = \bar{G}_f \Lambda^{\bar{D}} \lambda^{d-\bar{D}} = \int_{\lambda}^{\Lambda} v_f(\eta) W(\eta) d\eta. \quad (13)$$

Равенство (13) представляет собой математическое выражение выдвигаемого нами принципа статистического самоподобия (ПССП). Строго говоря, условие (13) вместе с условием нормировки недостаточно для однозначного определения функции $W(\eta)$, но тем не менее можно показать, что функция $W(\eta)$, определенная равенством

$$W(\eta) = \frac{1 + \alpha}{\Lambda (1 - \mu^{1+\alpha})} \left(\frac{\eta}{\Lambda} \right)^{\alpha} \quad (14)$$

($\mu = \lambda/\Lambda$), при некоторых значениях α удовлетворяет ПССП. Вид этой функции и смысл параметра α могут быть обоснованы и поняты с помощью формулы (7) для ОФ, полученной в предыдущем разделе.

Действительно, пусть $k_i = k + q_i$, $p_i = p + \pi_i$, q_i , π_i — малые отклонения от соответствующих значений k_i , p_i . Тогда, записав выражение (7) в виде

$$v_f = G_f \Lambda^d \frac{p^p}{(k^n)^d} \exp \left[\sum_i \ln \left(1 + \frac{\pi_i}{p} \right) - d \ln \left(1 + \frac{q_i}{k} \right) \right] \quad (15)$$

и разлагая $\ln(1+x)$ по малому отклонению $x \ll 1$ ($x = \pi_i/p$, q_i/k), получим следующее выражение:

$$v_f = G_f \Lambda^d \frac{p^n}{(k^n)^d} \exp \left[n \left(\frac{\bar{\pi}}{p} - d \frac{\bar{q}}{k} - \frac{\bar{\pi}^2}{2p^2} + d \frac{\bar{q}^2}{2k^2} + \dots \right) \right]. \quad (16)$$

Здесь $\bar{b}^s = n^{-1} \sum_i b_i^s$ ($s = 1, 2, \dots$) — среднее арифметическое величин π_i , q_i . Вводя масштаб $\eta = \Lambda/k^n$, получим окончательно

$$v_f = G_f \eta^d \left(\frac{\Lambda}{\eta} \right)^D \left(\frac{\Lambda}{\eta} \right)^{D'}. \quad (17)$$

Здесь D' — поправка на размерность регулярного фрактала (формула (9)), определенная выражением

$$D' = (\ln k)^{-1} \left(\frac{\bar{\pi}}{p} - \frac{\bar{\pi}^2}{2p^2} + \dots - d \frac{\bar{q}}{k} + d \frac{\bar{q}^2}{2k^2} + \dots \right). \quad (18)$$

Сравнивая выражение (18) с (13) и (14), нетрудно видеть, что показатель $\alpha = -D'$ и учитывает поправки на размерность регулярного фрактала D при

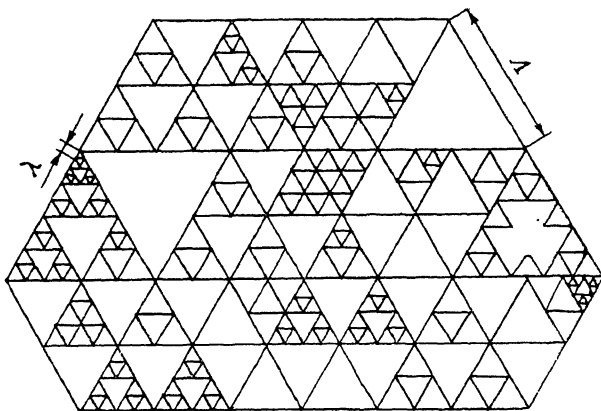


Рис. 1. Фрактальная структура со случайными значениями n .

В качестве доминирующего фрактала взят ковер Серпинского.

условию, что в гетерогенной среде возможно выделение доминирующего фрактала.

Формулы (17), (18) позволяют также ответить на вопрос, при каких условиях возможно существование фракталов со случайными значениями масштаба при фиксированном значении α . Случайные фракталы такого типа могут возникнуть при условии, когда n — случайная величина и D' не зависит от n . Если же случайной величиной являются параметры k и p , а η можно считать малой и постоянной величиной, то это будет эквивалентно мультифрактальному подходу [7, 8], который, как оказалось, эффективен для описания флуктуаций типа беспорядка [8]. Наиболее трудным для анализа является случай, когда масштаб η и фрактальная размерность D — случайные величины и нахождение функции распределения $W(\eta, D)$ в том случае является весьма непростой задачей. Отметим также еще одно обстоятельство в пользу выбора фракталов со случайными значениями n . Величины \bar{k} , \bar{p} , определенные формулой (5), при достаточно больших n не зависят от n , что в конечном счете приводит к фракталам со случайным значением масштаба η и размерностью D , не зависящей от n . Пример фрактала со случайными значениями n или со случайными масштабами $\eta(n) = \Lambda/k^n$ ($\Lambda, k = \text{const}$) показан на рис. 1.

Подстановка (14) в правую часть выражения (12) приводит к соотношению

$$\langle v_f \rangle = G_f \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + d - D} \Lambda^d \frac{1 - \mu^{1 + \alpha + d - D}}{1 - \mu^{1 + \alpha}}. \quad (19)$$

Здесь, как и в формуле (14), $\mu = \lambda |\Delta|$. Как правило, область самоподобия занимает большую долю масштабов, поэтому естественно считать, что $\mu \ll 1$.

Анализ выражения (19) в зависимости от величины α и μ приведен в табл. 1. Из таблицы видно, что в первых двух случаях в результате статистического усреднения самоподобный характер структуры сохраняется. В случае 3 система на масштабах порядка Δ становится однородной. В строках 4, 5 описаны переходные случаи; случаи 6—8 имеют смысл только для $D > d$ ($d=1, 2$), $-1 < \alpha < 0$ и могут быть применены для описания статистических свойств фрактальной поверхности с $D > 2$ или фрактальной длины с $D > 1$. Во всех приведенных случаях через \bar{D} обозначена величина

$$\bar{D} = 1 + \alpha + d. \quad (20)$$

Из табл. 1 видно, что в случае 1 D — инвариантная величина, а в случае 2 роль размерности берет на себя величина $\bar{D} = d - |\alpha|$, которую можно оп-

Таблица 1
Область допустимых значений α и μ , для которых выполняется принцип статистического самоподобия

№ случая	Неравенства на α	Неравенства на μ	$\langle v_f \rangle$	\bar{g}_f
$D, \bar{D} < d, D - \bar{D} < 1$				
1	$1 + \alpha < 0$ $1 + \alpha + d - D < 0$	$\mu^{\bar{D}-d} \gg 1$ $\mu^{\bar{D}-D} \gg 1$	$\bar{G}_f \Delta^d \mu^{d-D}$	$G_f \frac{d - \bar{D}}{\bar{D} - \bar{D}}$
2	$1 + \alpha < 0$ $1 + \alpha + d - D < 0$	$\mu^{\bar{D}-d} \gg 1$ $\mu^{\bar{D}-D} \ll 1$	$\bar{G}_f \Delta^d \mu^{d-\bar{D}}$	$G_f \frac{d - \bar{D}}{\bar{D} - D}$
3	$1 + \alpha > 0$ $1 + \alpha + d - D > 0$	$\mu^{\bar{D}-d} \ll 1$ $\mu^{\bar{D}-D} \ll 1$	$\bar{G}_f \Delta^d$	$G_f \frac{\bar{D} - d}{\bar{D} - D}$
4	$1 + \alpha < 0$ $D = \bar{D} = d - \alpha $	$\mu^{\bar{D}-d} \gg 1$	$\bar{G}_f (\ln \mu^{-1}) \Delta^d \Delta^{d-D}$	$G_f (d - D)$
5	$1 + \alpha = 0$ $d - D > 0$	$\mu^{d-D} \ll 1$	$\bar{G}_f (\ln \mu^{-1})^{-1} \Delta^d$	$G_f (d - D)^{-1}$
$D, \bar{D} > d$				
6	$1 + \alpha > 0$ $1 + \alpha + d - D < 0$	$\mu^{\bar{D}-d} \ll 1$ $\mu^{\bar{D}-D} \gg 1$	$\bar{G}_f \Delta^d \mu^{d-\bar{D}}$ $\bar{D} = D - \bar{D} + d$	$G_f \frac{\bar{D} - d}{\bar{D} - \bar{D}}$
7	$1 + \alpha > 0$ $1 + \alpha + d - D = 0$	$\mu^{\bar{D}-d} \ll 1$	$\bar{G}_f \Delta^d \ln \mu^{-1}$	$G_f (\bar{D} - d)$
8	$1 + \alpha > 0$ $d + D < 0$	$\mu^{d-D} \gg 1$	$\bar{G}_f (\ln \mu^{-1})^{-1} \Delta^d \mu^{d-D}$	$G_f (D - d)^{-1}$

ределить как размерность статистического фрактала. Значения α , для которых выполняется ПССП, лежат в интервале $-4 < \alpha < -1$ при условии выполнения неравенств $0 < D, \bar{D} < d$. Последние три случая соответствуют неравенствам $d < D, \bar{D} < d+1$ и $-1 < \alpha < 0$.

Из вышеприведенного анализа становится очевидным выбор функции распределения $W(\eta)$ в форме (14). Так как по своему смыслу параметр α учитывает возможные искажения формы доминирующего фрактала (формула (18)), то умножение $v_f(\eta)$ на функцию $\sim \eta^\alpha$ оставляет самоподобную структуру инвариантной и приводит к образованию некоторого регулярного фрактала с другим значением фрактальной размерности $D + D'$.

В результате интегрирования по всем возможным значениям масштаба из интервала (λ, Λ) вновь может образоваться статистическая самоподобная

структура, сочетающая в себе различные элементы регулярных фракталов. Из этих рассуждений нетрудно понять случай 3, приводящий к однородной структуре среды на масштабах порядка Λ . Действительно, число элементов регулярного фрактала $N(\eta) = (\Lambda/\eta)^{D-\alpha}$. Уменьшение $D(\alpha) = D - \alpha$ или соответствующее ему увеличение масштаба η приводит к уменьшению $N(\eta)$. В результате усреднения область самоподобия может сузиться настолько, что произойдет «замывание» самоподобной структуры и она в конечном счете будет определяться максимально возможным масштабом элементарной ячейки $\sim \Lambda$.

С учетом формулы (20) выражение (19) может быть переписано в виде

$$\langle v_f \rangle = G_f \frac{D-d}{D-D} \Lambda^d \frac{1-\mu^{D-D}}{1-\mu^{D-D}}. \quad (21)$$

При $\mu \rightarrow 1$ из (21) действительно получаем однородную структуру максимально возможного масштаба Λ , как это и следовало из качественных рассуждений.

Таким образом, представление неоднородной среды в виде совокупности фракталов с различными значениями масштаба и размерности является достаточно гибким. В отличие от модели мультифракталов (см., например, [7, 8]), где учитываются лишь интегрируемые сингулярности ($\lambda=0$) и вводится фиксированный масштаб, в предлагаемой модели благодаря введению нижнего масштаба $\lambda \neq 0$ все степенные особенности становятся интегрируемыми и имеется возможность их рассмотрения на достаточно широком интервале масштабов (λ, Λ).

Диэлектрическая релаксация в модели случайных фракталов

Пусть в однородной ячейке объема $v_0(\eta)$ релаксация групп молекул или атомов описывается формулой Дебая

$$p(\eta, t) = P_{0v_0}(\eta) \exp\left[-\frac{t}{T_{0v_0}(\eta)}\right]. \quad (22)$$

Здесь $\lambda < \eta < \Lambda$, где, как и ранее, λ — минимальный, а Λ — максимальный масштаб фрактального самоподобия; $T_0 = \tau_0/v_0(\lambda)$, τ_0 — время релаксации единичного диполя в $v_0(\lambda)$ — ячейке минимального масштаба λ . Если в среде $N(\eta)$ — это число ячеек масштаба η , то релаксация группы электрических диполей, локализованных в объеме $v_f(\eta) = v_0(\eta) N(\eta)$, определится выражением

$$P(\eta, t) = P_{0v_f}(\eta) \exp\left[-\frac{t}{T_{0v_f}(\eta)}\right]. \quad (23)$$

При переходе от (22) к (23) мы использовали гипотезу Ш. И. Боголюбова об иерархии времен релаксации, согласно которой время установления квазиравновесия в некотором выделенном объеме масштаба η пропорционально его величине [9]. Отметим также, что в записи выражений (22), (23) фактически предполагается, что существует некоторый механизм, устанавливающий состояние квазиравновесия для близкорасположенных диполей, занимающих объем $v_f(\eta)$. В качестве такого механизма может выступать диагональная часть диполь-дипольного взаимодействия, которое не меняет величины суммарной поляризации, но обеспечивает перераспределение энергии между диполями. Прямой расчет, включающий в себя проблему многих тел, выполнить чрезвычайно трудно, поэтому, как это делается во многих задачах магнитной релаксации [10], существование такого взаимодействия просто постулируется. Нам неизвестны работы по вычислению времени ориентационной поляризации в системе электрических диполей, связанных между собой диполь-дипольным взаимодействием, но аналогичные расчеты, выполненные для магнитных спинов в жидкостях [11], качественно подтверждают справедливость формулы (23).

Из (23) легко получить закон релаксации поляризации, распределенной с вероятностью $W(\eta)$ по всем фракталам с масштабами (λ, Λ),

$$\langle P(t) \rangle = P_0 \int_{\lambda}^{\Lambda} v_f(\eta) W(\eta) \exp\left[-\frac{t}{T_0 v_f(\eta)}\right] d\eta. \quad (24)$$

Дифференцируя (24) по времени, получим выражение для тока деполяризации

$$\frac{J(t)}{J_0} = - \int_{\lambda}^{\Lambda} W(\eta) \exp\left[-\frac{t}{T_0 v_f(\eta)}\right] d\eta, \quad (25)$$

где $J_0 = P_0/T_0$.

Если количество статистических фракталов на масштабах $\eta \sim \Lambda$ равно

$$M = \frac{V}{v_f(\Lambda)}, \quad (26)$$

где V — объем образца, и, согласно (2), $v_f(\Lambda) = G_f \Lambda^d$, то для суммарного тока деполяризации имеем

$$\frac{J(t)}{J_0} = M \frac{\langle J(t) \rangle}{J_0}. \quad (27)$$

Выбрав функцию распределения $W(\eta)$ в форме (14), после подстановки в уравнение (25) получаем следующее выражение:

$$\frac{J(t)}{J_0} = - \frac{(1+\alpha)M}{\Lambda^{1+\alpha} - \lambda^{1+\alpha}} \int_{\lambda}^{\Lambda} \eta^{\alpha} \exp\left[-\frac{t}{T_0 v_f(\eta)}\right] d\eta. \quad (28)$$

После интегрирования по частям, принимая во внимание выражение (26), для суммарного тока деполяризации получаем окончательно

$$\frac{J(t)}{J_0} = \frac{nM}{\mu^{1+\alpha} - 1} (f_p t)^{-n} [\gamma(n, f_p t) - \gamma(n, f_p t \mu^{D-3})]. \quad (29)$$

Здесь введены обозначения

$$f_p = (T_0 G_f \Lambda^3)^{-1}, \quad n = \frac{|1+\alpha|}{3-D}, \quad \mu = \frac{\lambda}{\Lambda},$$

а также через $\gamma(n, x)$ обозначена неполная гамма-функция (см. формулу (6.5.3) в [12]).

Поскольку $T_0 = \tau_0 |v_0(\lambda)|$, а $v_0(\lambda) = G_f \lambda^3$, то для частоты пика диэлектрических потерь можно написать другую формулу

$$f_p = \frac{\mu^3}{\tau_0}. \quad (30)$$

Показатель степени n с учетом (20) переписывается в виде

$$n = \frac{3-D}{3-D}, \quad (31)$$

где евклидова размерность $d=3$.

Аппроксимация разности неполных гамма-функций, проведенная с помощью формул (6.5.3), (6.5.4), (6.5.29) и (6.5.32) из [12], показала, что для области времен $\mu^{-D} \ll t | \tau_0 \ll \mu^{-3}$ выражение (32) имеет вид, аналогичный зависимости [1],

$$|J(t)| \simeq J_0 \frac{M \Gamma(n+1)}{\mu^{D-d} - 1} (f_p t)^{-n}. \quad (32)$$

Таким образом, из МСФ следует существование временных интервалов, где зависимость тока деполяризации от времени носит степенной характер.

Сравнение с экспериментом

Для того чтобы провести сравнение предложенной полуфеноменологической теории с экспериментальными данными по диэлектрическим потерям, необходимо знание пористости рассматриваемых образцов, выражение для которой мы сейчас и получим. Если определить пористость как отношение общего объема пор V_p ко всему объему тела V , то, исходя из предложения о том, что поры в среде образуют некоторую фрактальную структуру, в рамках МСФ, рассмотренной во втором разделе, имеем

$$V_p = M \langle v_f \rangle.$$

Здесь $\langle v_f \rangle$ — объем статистического фрактала, даваемый формулой (21), а M определено выражением (26). Поэтому пористость фрактальной среды определяется соотношением

$$m = \frac{V_p}{V} \frac{\langle v_f \rangle}{v_f(\Delta)} = \frac{\bar{D} - 3}{\bar{D} - D} \frac{1 - \mu^{\bar{D}-D}}{1 - \mu^{\bar{D}-3}}. \quad (33)$$

В работе [14] приводятся экспериментальные данные по измерению диэлектрической релаксации молекул воды в песчаниках Ливии (рис. 2) и Персии

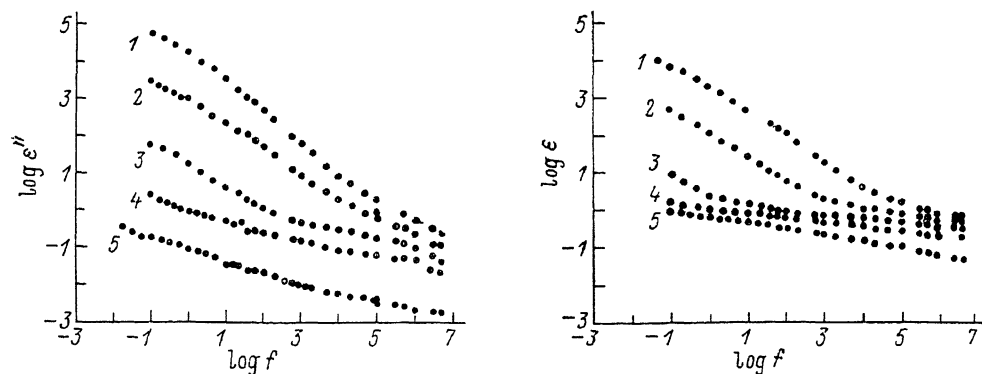


Рис. 2. Диэлектрические потери песчаника Ливии как функции частоты в двойном логарифмическом масштабе при различных влажностях h , взятые из работы [13].

Частота f измеряется в герцах. 1 — 95, 2 — 74, 3 — 33, 4 — 12 %, 5 — 0.

Рис. 3. Диэлектрические потери песчаника Персии как функции частоты в двойном логарифмическом масштабе при различных влажностях h из [13].

1 — 94, 2 — 54, 3 — 33, 4 — 12 %, 5 — 0.

(рис. 3). Зависимость диэлектрической восприимчивости от частоты, соответствующая соотношению (1), имеет вид

$$\chi''(f) \sim \varepsilon''(f) \sim f^{n-1} f_p \leq f \leq f_{\max}.$$

Из приведенных графиков можно извлечь значения f_p и n , входящие в формулу (32). Если известны τ_0 и m , то по этим данным можно найти μ , D и \bar{D} . Согласно многочисленным данным [1], время релаксации электрического диполя связавшей воды имеет порядок $\tau_0 \sim 10^{-9}$ с. Пористость исследуемых образцов измерена экспериментально и, согласно [14], составляет величину порядка 32 % для песчаника Ливии и 44 % для песчаника Персии. Зная f_p из формулы (30), можно определить $\mu = (f_p \tau_0)^{1/3}$. Используя экспериментальные значения m и n , с помощью формул (33) и (31) вычислялись величины фрактальных размерностей D и \bar{D} . Результаты расчетов приведены в табл. 2. Первые пять строк соответствуют песчанику Ливии, остальные — Персии; первая, вторая и четвертая колонки таблицы соответствуют измеренным значениям μ , показателям n и влажностям h . В третьей, пятой и шестой колонках таблицы вычислены значения μ и фрактальных размерностей D , \bar{D} по формулам (30),

(31), (33). Из данных таблицы следует, что значения D и \bar{D} лежат в разумных пределах, что является доказательством внутренней непротиворечивости предложенной модели.

Заключение

Таким образом, рассмотрение диэлектрической релаксации в рамках предложенной МСФ дает объяснение тому факту, что явление «универсального» отклика характерно для неоднородных в данном случае фрактальных диэлек-

Т а б л и ц а 2
Результаты обработки экспериментальных данных по песчаникам Ливии и Персии

f_p	n	μ	$h, \%$	D	\bar{D}
10^4	0.49	$2.15 \cdot 10^{-2}$	0.94	2.41	2.71
10^4	0.54	$2.15 \cdot 10^{-2}$	0.74	2.41	2.68
10^3	0.78	10^{-2}	0.33	2.55	2.65
10^2	0.81	$4.6 \cdot 10^{-3}$	0.12	2.62	2.69
10^{-2}	0.75	$2.15 \cdot 10^{-4}$	0	2.75	2.81
10^6	0.85	10^{-1}	0.95	2.34	2.44
10^4	0.88	$2.15 \cdot 10^{-2}$	0.54	2.61	2.66
10^2	0.91	$4.64 \cdot 10^{-3}$	0.33	2.73	2.75
10^{-1}	0.86	$4.64 \cdot 10^{-4}$	0.12	2.80	2.83
10^{-1}	0.84	$4.64 \cdot 10^{-4}$	0	2.80	2.83

триков. Кроме того, рассмотренная модель приводит к промежуточной временной или частотной асимптотике, наблюдающейся на эксперименте, а также дает объяснение тому факту, что n практически не зависит от температуры [1].

Список литературы

- [1] Jonscher A. K., Dielectric Relaxation in Solids. London: Chelsea Dielectric Press, 1983. 380 p.
- [2] Mandelbrot B. Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. A. Freeman, 1982. 468 p.
- [3] Mehaute A. L., Gaiber A., Delay M. // FILIPPI C. R. Acad. Sci. (France). 1982. Vol. 294. P. 835—837.
- [4] Mehaute A. L., Grepy G. // Sol. St. Ionics. 1983. Vol. 9/10, P. 17—30.
- [5] Nigmatullin R. R. // Phys. Stat. Sol. B. 1986. Vol. 133. P. 425—430.
- [6] Niklasson G. A. // J. Appl. Phys. 1987. Vol. 62. P. 1—14.
- [7] Halsey T. C., Jensen M. H., Kadanoff L. P. et al. // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 1141—1151.
- [8] Pietronero K., Siebesma A. P. // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 1098—1101.
- [9] Зубарев Д. И. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 408 с.
- [10] Александров И. В. Теория магнитной релаксации. М.: Наука. 1975. 400 с.
- [11] Юльметьев Р. М. // ТМФ. 1977. Т. 30. С. 264—281.
- [12] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. Гл. 5—6.
- [13] Shahidi M., Hasted J. B., Jonscher A. K. // Nature. 1975. Vol. 258. P. 595—596.
- [14] Shahidi M. Electrical properties of absorbed water. Thesis. London: Birbeck College, 1977. 185 p.

Казанский
государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило в Редакцию
29 декабря 1987 г.
В окончательной редакции
16 ноября 1988 г.