01

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СВЯЗАННЫХ С УСТАНОВИВШИМИСЯ ПРОЦЕССАМИ КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Я. С. Уфлянд

Показано, что точное решение трехмерных задач стационарного конвективного теплообмена выражается через цилиндрические функции в случае течения Куэтта (плоский и коаксиальный каналы) и через вырожденные гипергеометрические функции для течения Пуазейля (плоский и цилиндрический каналы). До настоящего времени в литературе, сколько нам известно, рассматривались лишь двумерные задачи, причем были получены только приближенные решения (см., например, [1], где дан, в частности, подробный обзор соответствующей литературы).

1. Плоскопараллельный канал

а) Рассмотрение указанных задач начнем с того случая, когда ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое ($0 < x < b$, $-\infty < y, z < +\infty$) вызывается движением его стенок (течение Куэтта). Если считать, что стенка $x=0$ неподвижна, а стенка $x=b$ движется в отрицательном направлении оси z с постоянной скоростью v, то поле скоростей дается формулой [2]

$$v_z = -v\frac{x}{b}. \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что стенка $x=0$ поддерживается при заданном распределении температуры, а температура стенки $x=b$ равна нулю. Тогда рассматриваемая задача заключается в решении уравнения конвективной теплопроводности для температуры $T(x, y, z)$ [3]

$$a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + v\frac{x}{b}\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{1.2}$$

(a — коэффициент температуропроводности),
при граничных условиях

$$T(0, y, z) = f(y, z), \quad T(b, y, z) = 0. \tag{1.3}$$

Если искать частные решения уравнения (1.2) в виде

$$\exp[i(\lambda z + \mu y)]\,\varphi(x), \tag{1.4}$$

то для искомой функции φ получаем уравнение

$$\varphi'' + \left(\nu^2 + \frac{i\lambda v x}{ab}\right)\varphi = 0, \tag{1.3}$$

где введено обозначение

$$\nu^2 = -(\lambda^2 + \mu^2). \tag{1.6}$$

Путем подстановок

$$t = 1 + u\nu x, \quad u = \frac{i\lambda v}{ab\nu^3}, \quad \varphi(x) = \psi(t) \tag{1.7}$$

можно привести (1.5) к следующей форме

$$\psi'' + \frac{t}{u^2}\psi = 0. \tag{1.8}$$

Общее решение последнего уравнения выражается через функции Бесселя [4]

$$\psi = \sqrt{t}\left[AJ_{1/3}\left(\frac{2}{3u}t^{3/2}\right) + BJ_{-1/3}\left(\frac{2}{3u}t^{3/2}\right)\right], \tag{1.9}$$

после чего с учетом второго из условий (1.3) решение поставленной задачи представляется двойным интегралом Фурье

$$T = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda, \mu)\exp\left[i(\lambda z + \mu y)\right]\frac{\Phi(t, \lambda, \mu)}{\Phi(1, \lambda, \mu)}\sqrt{t}\, d\lambda d\mu, \tag{1.10}$$

в котором через Φ обозначена следующая функция:

$$\Phi = J_{-1/3}\left(\frac{2}{3u}t_b^{3/2}\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3u}t^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3u}t_b^{3/2}\right)J_{-1/3}\left(\frac{2}{3u}t^{3/2}\right), \quad t_b = 1 + u\nu b. \tag{1.11}$$

Применяя теперь первое граничное условие (1.3), получаем для неизвестной величины C выражение

$$C = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y, z)\exp\left[-i(\lambda z + \mu y)\right] dy dz, \tag{1.12}$$

на чем и заканчивается процесс получения формального решения рассматриваемой задачи.

Если граничное распределение температуры принять в виде произведения дельта-функций Дирака

$$f(y, z) = \delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0), \tag{1.13}$$

то для функции Грина поставленной задачи из (1.10) и (1.12) получим выражение

$$G(x, y, y_0, z, z_0) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\lambda(z - z_0)\right] \times$$

$$\times\, d\lambda\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\Phi(t, \lambda, \mu)}{\Phi(1, \lambda, \mu)}\sqrt{t}\cos\mu(y - y_0)\, d\mu. \tag{1.14}$$

Аналогичным образом можно получить точное решение соответствующих краевых задач при граничных условиях второго и третьего рода (однородных на движущейся стенке).

Если функция f не зависит от координаты y, то задача из трехмерной превращается в двумерную, когда $T = T(x, z)$, и ее решение представляется в виде однократных квадратур вида (1.10) и (1.12) по переменным λ и z соответственно, причем в формуле (1.6) следует положить $\mu = 0$. В частности, для функции Грина будем иметь

$$G(x, z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(t_0, \lambda, 0)}{\Phi(1, \lambda, 0)}\exp\left[i\lambda(z - z_0)\right]\sqrt{t_0}\, d\lambda, \quad t_0 = t\,|_{\mu=0}. \tag{1.15}$$

б) Переходим к случаю течения Пуазейля в слое $-b < x < +b$, $-\infty < y$, $z < +\infty$, когда профиль скорости выражается формулой [2]

$$v_z = -v_0\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right), \quad v_0 = \frac{b^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{1.16}$$

где η — коэффициент вязкости, $\partial p/\partial z = \mathrm{const}$ — заданный перепад градиента давления.

Тогда вместо (1.2) необходимо решить уравнение

$$a\Delta T + v_0\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{1.17}$$

при заданных граничных условиях на неподвижных стенках $x = \pm b$ канала.

Выбирая для частных решений прежнее выражение (1.4), получаем вместо (1.5) уравнение

$$\varphi'' + \left(q^2 - \frac{i\lambda v_0 x^2}{ab^2}\right)\varphi = 0, \tag{1.18}$$

где положено

$$q^2 = \frac{i\lambda v_0}{a} - \lambda^2 - \mu^2. \tag{1.19}$$

Подстановки

$$\tau = \sqrt{w}\, q^2 x^2, \quad w = \frac{i\lambda v_0}{ab^2 q^4}, \quad \varphi(x) = \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)\chi(\tau) \tag{1.20}$$

преобразуют (1.18) в уравнение

$$\tau\chi'' + \left(\frac{1}{2} - \tau\right)\chi' - \alpha\chi = 0, \quad \alpha = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{w}}\right), \tag{1.21}$$

общее решение которого представляется через вырожденную гипергеометрическую функцию [4]

$$\chi = A\mathscr{F}\left(\alpha, \frac{1}{2}, \tau\right) + B\sqrt{\tau}\,\mathscr{F}\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \tau\right), \tag{1.22}$$

где

$$\mathscr{F}(\alpha, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k z^k}{(\gamma)_k k!},$$

$$(\beta)_k = \beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1); \quad (\beta)_0 = 1. \tag{1.23}$$

Если на стенках канала заданное распределение температуры симметрично

$$T(\pm b, y, z) = f(y, z), \tag{1.24}$$

то в (1.22) следует положить $B = 0$, после чего решение задачи можно записать в следующем виде:

$$T = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda, \mu)\exp\left[i(\lambda z + \mu y) + \frac{1}{2}(\tau_b - \tau)\right]\frac{\mathscr{F}\left(\alpha, \frac{1}{2}, \tau\right)}{\mathscr{F}\left(\alpha, \frac{1}{2}, \tau_b\right)}\,d\lambda d\mu, \tag{1.25}$$

где положено

$$\tau_b = \tau|_{x=b} = \sqrt{w}\, q^2 b^2 = \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{i\lambda v_0}. \tag{1.26}$$

Использование граничного условия (1.24) дает возможность получить для величины C формулу (1.12) и тем самым закончить точное решение задачи.

В случае, когда граничное распределение температуры антисимметрично, т. е.

$$T(\pm b, y, z) = \pm f(y, z) \tag{1.27}$$

в формуле (1. 22) полагаем $A=0$. Решение задачи при произвольном задании температур стенок получается путем разбиения функции $T(x, y, z)$ на четную и нечетную составляющие по переменной x.

Заметим, что в случае течения Пуазейля остаются справедливыми изложенные в конце раздела 1а соображения, относящиеся к другим типам граничных условий, к соответствующей двумерной задаче, а также к построению функции Грина.

в) Если течение в плоскопараллельном канале ($|x| < b$, $|y, z| < \infty$) происходит при одновременном воздействии градиента давления и движения стенок, то точное решение задачи установившегося конвективного теплообмена может быть, как и в разделе 1б, выражено через вырожденные гипергеометрические функции. Действительно, так как в данном случае профиль скоростей имеет вид

$$-v_z = v\frac{b+x}{2b} + v_0\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right), \tag{1.28}$$

где v — скорость движущейся стенки $x=b$ (стенка $x=-b$ неподвижна), то уравнение конвективной теплопроводности

$$a\Delta T - v_z\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{1.29}$$

с помощью подстановок ($v_0 \neq 0$)

$$\xi = x - \frac{vb}{4v_0}, \quad V = v_0 + \frac{v}{2} + \frac{v^2}{16v_0} \tag{1.30}$$

может быть приведено к виду

$$a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \left(V - v_0\frac{\xi^2}{b^2}\right)\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{1.31}$$

аналогичному (1. 17). Использование частных решений (1. 4) приводит к уравнению типа (1. 18) относительно переменной ξ, причем в (1. 19) значение v_0 надо заменить на V, после чего все дальнейшие выкладки аналогичны проведенным в разделе 1б.

Принимая граничные условия в виде

$$T(-b, y, z) = f(y, z), \quad T(b, y, z) = 0, \tag{1.32}$$

получаем следующее решение:

$$T = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda, \mu)\exp\left[i(\lambda z + \mu y) + \frac{1}{2}(\tau_{-b} - \tau)\right]\frac{\varkappa(\lambda, \mu, \tau)}{\varkappa(\lambda, \mu, \tau_{-b})}\,d\lambda d\mu, \tag{1.33}$$

где положено

$$\varkappa = \sqrt{\tau_{+b}}\,\mathscr{F}\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \tau_{+b}\right)\mathscr{F}\left(\alpha, \frac{1}{2}, \tau\right) -$$

$$-\sqrt{\tau}\,\mathscr{F}\left(\alpha, \frac{1}{2}, \tau_{+b}\right)\mathscr{F}\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \tau\right), \tag{1.34}$$

$$\tau = \sqrt{w}\,q^2\xi^2, \quad \tau_{\pm b} = \sqrt{w}\,q^2 b^2\left(1 \mp \frac{v}{4v_0}\right)^2, \tag{1.35}$$

причем величина C по-прежнему дается формулой (1. 12).

2. Цилиндрический канал (течения Пуазейля)

В случае граничных условий первого рода задача установившегося конвективного теплообмена в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости состоит в нахождении распределения температуры $T(r, \varphi, z)$ из уравнения ($0 \leqslant r < b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $|z| < \infty$ — цилиндрические координаты)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{v}{a}\frac{\partial T}{\partial z}=0, \tag{2.1}$$

где (ср. (1.16))

$$v=v_0\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right),\quad v_0=\frac{b^2}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{2.2}$$

при краевом условии

$$T(b,\ \varphi,\ z)=f(\varphi,\ z). \tag{2.3}$$

Имея в виду разложение в ряд Фурье по угловой и в интеграл Фурье по осевой координатам, будем искать частные решения уравнения (2.1) в следующей форме:

$$\exp\left[i(n\varphi+\lambda z)\right]R(r);\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots. \tag{2.4}$$

Тогда из (2.1) для функции R находим уравнение

$$R''+\frac{R'}{r}+\left(\sigma^2-\frac{i\lambda v_0 r^2}{ab^2}-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0, \tag{2.5}$$

в котором введено обозначение

$$\sigma^2=\frac{i\lambda v_0}{a}-\lambda^2. \tag{2.6}$$

После подстановок

$$s=\sqrt{\rho}\,\sigma^2 r^2,\quad \rho=\frac{i\lambda v_0}{ab^2\sigma^4},\quad R(r)=\exp\left(-\frac{s}{2}\right)\omega(s) \tag{2.7}$$

уравнение (2.4) переходит в следующее:

$$s\omega''+(1-s)\omega'-\beta\omega-\frac{n^2}{4s}\omega=0,\quad \beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\rho}}, \tag{2.8}$$

отличающееся по типу от уравнения для вырожденной гипергеометрической функции (ср. (1.21)) наличием последнего члена. Однако если положить

$$\omega(s)=s^{n/2}\theta(s), \tag{2.9}$$

то после преобразований для функции θ получаем уравнение

$$s\theta''+(n+1-s)\theta'-\left(\frac{n}{2}+\beta\right)\theta=0, \tag{2.10}$$

общее решение которого представляется через вырожденные гипергеометрические функции первого и второго рода [4] с параметрами $\alpha=n/2+\beta$, $\gamma=n+1$. Если учесть еще требование ограниченности решения при $r\to 0$, то следует положить

$$\theta=C\mathscr{F}\left(n+\frac{1}{2},\ n+1,\ s\right), \tag{2.11}$$

после чего решение задачи представляется в виде следующего разложения:

$$T=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda z)\,d\lambda\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(\lambda)\exp\left[in\varphi+\frac{1}{2}(s_b-s)\right]\times$$

$$\times\frac{\mathscr{F}\left(\dfrac{n}{2}+\beta,\ n+1,\ s\right)}{\mathscr{F}\left(\dfrac{n}{2}+\delta,\ n+1,\ s_b\right)}\left(\frac{s}{s_b}\right)^{n/2},\quad s_b=s|_{r=b}. \tag{2.12}$$

Используя граничное условие (2.3), для искомой величины C_n получаем значение

$$C_n = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\varphi, z) \exp[-i(n\varphi + \lambda z)]\, d\varphi dz, \tag{2.13}$$

чем и определяется формальное решение поставленной задачи.

Полагая

$$f(\varphi, z) = \delta(\varphi - \varphi_0)\,\delta(z - z_0), \tag{2.14}$$

получаем, как и в разделе 1, следующее выражение для функции Грина:

$$G(r, \varphi, \varphi_0, z, z_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[i\lambda(z - z_0)\, d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \times$$

$$\times \exp\Big[in(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}(s_b - s)\Big]\Big(\frac{s}{s_b}\Big)^{n/2} \frac{\mathcal{F}\left(\frac{n}{2} + \beta, n + 1, s\right)}{\mathcal{F}\left(\frac{n}{2} + \beta, n + 1, s_b\right)}. \tag{2.15}$$

Тем же методом можно получить точное решение соответствующей задачи при граничных условиях второго или третьего рода.

В том случае, когда граничная функция f не зависит от угловой координаты φ, мы приходим к соответствующей двумерной (осесимметричной) задаче, решение которой $T(r, z)$ представляется интегралом Фурье по параметру λ (значение n равно нулю). Функция Грина для этого случая имеет следующий вид:

$$G(r, z, z_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[i\lambda(z - z_0) + \frac{1}{2}(s_b - s)\Big] \frac{\mathcal{F}(\beta, 1, s)}{\mathcal{F}(\beta, 1, s_b)}\, d\lambda. \tag{2.16}$$

Заметим, что сходные осесимметричные задачи с помощью аппарата вырожденных гипергеометрических функций ранее рассматривались в работе [5], однако точное решение было получено только при условии пренебрежения осевой растечкой тепла.

3. Коаксиальный канал

Пусть в области между двумя концентрическими бесконечными цилиндрами ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $|z| < \infty$) поток скоростей создан путем вращения внутреннего цилиндра с угловой скоростью ω (внешний цилиндр неподвижен). Тогда имеется только одна составляющая скорости [2]

$$v = v_\varphi = Ar + \frac{B}{r}, \quad A = -\frac{\omega r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{\omega r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \tag{3.1}$$

и задача сводится к решению уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{v}{ar}\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \tag{3.2}$$

при граничных условиях, которые для определенности принимаем в виде

$$T(r_1, \varphi, z) = 0, \quad T(r_2, \varphi, z) = f(\varphi, z). \tag{3.3}$$

Выбирая частные решения (3.2) в форме (2.4), для функции $R(r)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{r}(rR')' - \left(p^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0, \tag{3.4}$$

где положено

$$p^2 = \lambda^2 + \frac{inA}{a}, \quad m^2 = n^2 + \frac{inB}{a}. \tag{3.5}$$

Так как решениями уравнения (3.4) являются модифицированные функции Бесселя $I_m(pr)$ и $K_m(pr)$, то решение, удовлетворяющее однородному краевому условию (3.3), может быть построено в виде двойного разложения

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda z)\, d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\lambda) \exp(in\varphi) \frac{R_n(r, \lambda)}{R_n(r_2, \lambda)}, \tag{3.6}$$

где введены функции

$$R_n = K_m(pr_1)\, I_m(pr) - I_m(pr_1)\, K_m(pr). \tag{3.7}$$

Используя оставшееся второе условие (3.3), находим искомые величины $C_n(\lambda)$ по формуле (2.13), что и дает решение рассматриваемой задачи.

Если функция f не зависит от осевой координаты z, то имеем плоскую задачу $T=T(r, \varphi)$, причем $\lambda=0$ и решение дается рядом по линейной комбинации (3.7) модифицированных функций Кельвина.

Список литературы

[1] *Цой П. В.* Методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1984. 383 с.
[2] *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., 1955. 519 с.
[3] *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.: ОНТИ, 1937. 998 с.
[4] *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
[5] *Шаповалов В. В.* Автореф. канд. дис. Л., 1967.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
31 января 1989 г.