

01; 05

© 1990 г.

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕЛАКСАЦИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПЕРЕХОДА СВЕРХПРОВОДНИК—НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ

С. Л. Соболев

Рассмотрено влияние процессов релаксации теплового потока на распространение волны переключения в активных средах, в частности на волны перехода сверхпроводник—нормальный металл. Показано, что скорость волны переключения ограничена скоростью распространения тепла в среде и при определенных значениях отношения времени релаксации к характерному времени теплоотдачи, решение неединственно. Получено соотношение для определения скорости распространения волны переключения в зависимости от параметров системы.

1. Автоволновые (АВ) явления в распределенных активных средах наблюдаются в самых различных областях физики, химии, биологии и т. д. [1-9]. Одним из самых распространенных процессов такого типа являются волны переключения однородных состояний системы. Волны переключения описывают переходы сверхпроводник—нормальный металл [1], полупроводник—металл [2], диффузионный—кинетический режим в гетерогенном катализе [3] и др. [4, 5]. Обычно распространение таких волн изучают на основе уравнения теплопроводности параболического типа, которое является следствием закона сохранения энергии и закона Фурье

$$q = -\lambda \text{grad } T,$$

где q — плотность теплового потока, T — температура, λ — коэффициент теплопроводности.

Закон Фурье означает, что возмущения температуры передаются в среде с бесконечно большой скоростью. При решении большинства практических задач такое приближение вполне оправдано. Однако при высоких скоростях распространения АВ в сверхпроводниках [1], при наличии распределенных источников в активной среде с низким порогом возбуждения [3], в твердых телах при низких температурах [6] становятся существенными процессы релаксации, учитывающие конечную скорость распространения возмущений в среде. В вышеперечисленных случаях релаксационные процессы оказывают значительное влияние на скорость, структуру и пределы распространения АВ [7]. Настоящая работа посвящена изучению влияния релаксации теплового потока на распространение тепловых волн переключения. Общность математической модели позволяет применять полученные результаты и к другим типам волн.

2. В общем случае вместо закона Фурье следует пользоваться соотношением, учитывающим релаксацию теплового потока [8],

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda \text{grad } T, \quad (1)$$

где τ — время релаксации, t — время.

При постоянных τ , λ , c из (1) и закона сохранения энергии получим

$$\tau_{\text{ср}} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T + W + \tau \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2)$$

где W — функция источника, c — теплоемкость, ρ — плотность.

Уравнение (2), описывающее распределение температуры в активной среде с учетом релаксации теплового потока, является уравнением гиперболического типа. Этот факт отражает волновой характер распространения тепла в среде с конечной скоростью $v = (a/\tau)^{1/2}$ [8], где $a = \lambda/c\rho$. Уравнение теплопроводности, полученное на основе закона Фурье, параболического типа и следует из (2) при $\tau \rightarrow 0$. Кроме того, (2) отличается от уравнения теплопроводности параболического типа наличием в правой части производной от функции источника. Эта производная, являясь как бы дополнительным источником тепла, может оказывать существенное влияние на АВ процесс. Заметим, что в монографии [6] при выводе релаксационного уравнения производная от функции источника пропущена.

3. Для того чтобы найти распределение температуры в волне, а затем на его основе и скорость распространения АВ процесса, рассмотрим источник тепловыделения, движущийся в одномерной среде с постоянной скоростью V . Предположим также, что из среды существует теплоотвод, интенсивность которого определяется законом Ньютона $\alpha(T - T_0)$, где α — коэффициент теплоотдачи, T_0 — начальная температура. В этом случае функция источника W примет вид

$$W = (Q - \alpha(T - T_0))H^{-1}, \quad (3)$$

где Q — интенсивность тепловыделения, H — толщина слоя, по которому движется источник.

Подставляя (3) в (2) и переходя в систему координат X , связанную с источником, получим уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры в волне с учетом релаксации теплового потока и теплоотдачи в окружающую среду,

$$(1 - V^2/v^2) \frac{d^2 T}{dX^2} - V \left(\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{c\rho H v^2} \right) \frac{dT}{dX} + \frac{Q - \alpha(T - T_0)}{\lambda H} + \frac{V}{Hc v^2} \frac{dQ}{dX} = 0. \quad (4)$$

Перепишем (4) в безразмерных переменных

$$(1 - \varphi^2) \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \varphi(1 + B) \frac{d\theta}{dx} + \omega(x) - B\theta + \varphi \frac{d\omega}{dx} = 0, \quad (5)$$

где $\theta = (T - T_0)(T_m - T_0)^{-1}$ — безразмерная температура, T_m — максимальная температура в волне, $x = X/\tau v$ — безразмерная координата, $\omega = Q\tau/Hc\rho(T_m - T_0)$, $\varphi = V/v$ — безразмерная скорость волны, $B = \tau\alpha/c\rho H$. Параметр B представляет собой отношение времени релаксации теплового потока к характерному времени теплоотдачи из прогретого слоя толщиной H , по которому распространяется волна, в окружающую среду. Как будет показано ниже, в зависимости от величины B может меняться характер процесса распространения АВ переключения.

Решение уравнения (5), полученное методом преобразования Фурье, для произвольной функции тепловыделения $\omega(x)$ имеет вид

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(1 - iu\varphi) \exp(-iu x)}{u^2(1 - \varphi^2) - iu\varphi(1 + B) + B} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) e^{iux} dx du. \quad (6)$$

Преобразовав (6) по теореме о свертке, получим, что при $\varphi \geq 1$ перед фронтом волны $\theta = 0$ (под фронтом волны будем понимать координату начала зоны тепловыделения). Первый член в уравнении (5), определяющий величину и направление «диффузии» тепла в волне, зависит от безразмерной скорости распространения волны φ . Если $\varphi > 1$, то тепло «диффундирует» в направлении, обратном движению фронта волны, и поэтому перед ним среда остается непрогретой. Если $\varphi < 1$, то тепло от источника распространяется в направлении его движения и прогревает среду его фронтом. При $\varphi = 1$ «диффузия» тепла в волне вообще

отсутствует и температура определяется балансом тепла. Таким образом, АВ режимы, механизм распространения которых определяется теплопередачей от источника, возможны только со скоростями $\varphi < 1$. Скорость распространения $\varphi \geq 1$ могут иметь либо АВ с нетепловым механизмом, либо фазовые волны, скорость которых определяется неоднородностью граничных условий или неоднородностью самой системы [9].

4. Рассмотрим в качестве примера распространение тепловой волны со ступенчатой функцией тепловыделения $Q(T)$

$$Q(T) = \begin{cases} Q^* = \text{const}, & T > T^*, \\ 0, & T < T^*. \end{cases} \quad (7)$$

Подобная аппроксимация функции тепловыделения часто используется при изучении АВ процессов различных типов [1-5, 7], в частности при рассмотрении волны перехода сверхпроводник—нормальный металл [1]. Для определенности будем считать, что $T = T^*$ в точке $X = 0$. При $X \rightarrow -\infty$, $T \rightarrow T_0$, при $x \rightarrow +\infty$ $T \rightarrow T_m = T_0 + Q^*/\alpha$. В этом случае АВ процесс представляет собой волну переключения однородных устойчивых состояний системы с температурами T_0 и

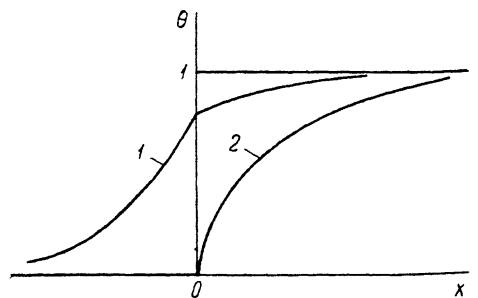


Рис. 1. Зависимости температуры $\theta(x)$ при различных значениях безразмерной скорости волны φ .

1 — $\varphi < 1$, 2 — $\varphi > 1$.

T_m , причем во фронте волны температура определяется третьим неустойчивым однородным состоянием с $T = T^*$ ($T_0 < T^* < T_m$). Из (6)—(7) после интегрирования получим

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{B(1 + \gamma_1 \varphi) \exp \gamma_1 x}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_1}, & x < 0, \\ 1 + \frac{B(1 + \gamma_2 \varphi) \exp \gamma_2 x}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_2}, & x > 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 + \frac{B(1 + \gamma_2 \varphi) \exp \gamma_2 x}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_2} - \frac{B(1 + \gamma_1 \varphi) \exp \gamma_1 x}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_1}, & x > 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\varphi(1+B)}{1-\varphi^2} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi^2(1+B)^2}{(1-\varphi^2)^2} + \frac{4B}{1-\varphi^2} \right)^{1/2}.$$

Распределения температуры в волне $\theta(x)$ (8)—(10) при различных значениях φ представлены на рис. 1. При $\varphi < 1$ температура монотонно возрастает с координатой во всем диапазоне ее изменения (рис. 1, кривая 1). Как уже отмечалось выше, в этом случае прогрев среды перед фронтом волны (т. е. при $x < 0$) обеспечивается «диффузией» тепла от источника, что и поддерживает распространение АВ процесса. Характерной особенностью профиля температуры $\theta(x)$ является наличие излома в точке $x=0$ (рис. 1), что означает скачкообразное изменение градиента температуры во фронте волны. Такое поведение температуры и ее градиента обусловлено видом функции тепловыделения (7) и наличием процессов релаксации (1). Плотность теплового потока q при этом остается непрерывной.

При $\varphi > 1$ тепло в волне «диффундирует» в сторону, противоположную движению волны, и поэтому среда перед ее фронтом остается непрогретой, т. е.

$\theta=0$ при $x < 0$ (см. 1) и кривую 2 (рис. 1). Во фронте волны, так же как и при $\varphi < 1$, зависимость температуры от x имеет излом, градиент температуры меняется скачком, а плотность теплового потока q непрерывна.

Если $\varphi=1$, то «диффузия» тепла в волне вообще отсутствует, поэтому температурный профиль (10) соответствует виду функции тепловыделения (7). Во фронте волны, т. е. при $x=0$, не только градиент, но также температура и тепловой поток меняются скачком. При $\varphi \neq 1$ «диффузия» тепла в волне сглаживает зависимости температуры и теплового потока от координаты и обеспечивает их непрерывность.

5. Процесс переключения однородных устойчивых состояний бистабильной системы происходит тогда, когда ее температура становится равной температуре промежуточного неустойчивого однородного состояния T^* . Следовательно, во фронте волны переключения должно выполняться равенство $T(0)=T^*$ (где $T(0)$ — температура фронта волны), которое служит для определения скорости распространения АВ процесса. В рассматриваемом случае температурный профиль при $x=0$ и $\varphi=1$ имеет разрыв (10). Поэтому для определения скорости АВ процесса следует пользоваться равенством, которое запишем сразу в безразмерном виде

$$\theta^* = \lim_{x \rightarrow -0} \theta(x) \equiv f(\varphi). \quad (11)$$

С физической точки зрения (11) означает, что АВ режимы с тепловым

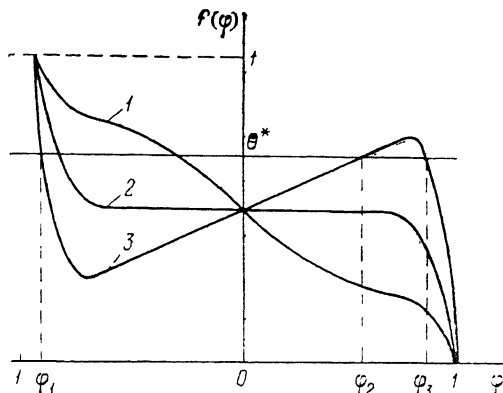


Рис. 2. Зависимости температуры во фронте волны $f(\varphi)$ при различных значениях параметра B .

1 — $B < B^*=1$, 2 — $B=B^*=1$, 3 — $B > B^*=1$.

механизмом распространения возможны только при ненулевой глубине прогрева системы l перед фронтом волны. Только в этом случае источник тепловыделения способен инициировать процесс в прилегающих к нему слоях системы, поддерживая тем самым АВ режим. Поэтому существует минимальное значение глубины прогрева l_{\min} , такое, что АВ режимы с $l < l_{\min}$ невозможны. Как уже отмечалось выше, $l < l_{\min}$ может быть при распространении нетепловых АВ или при распространении фазовых волн. Величина l_{\min} при $\varphi \rightarrow 1$ определяется шириной зоны изменения функции тепловыделения от минимального до максимального значения, которая в (7) приблизительно принималась равной нулю. Выражение (11) с учетом (8) можно переписать в следующем виде:

$$\theta^* = \frac{B(1 + \gamma_1 \varphi) \exp(-\gamma_1 l_{\min})}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_1} \equiv f(\varphi). \quad (12)$$

Уравнения (11), (12), правая часть которых обозначена $f(\varphi)$, служат для определения безразмерной скорости распространения АВ процесса φ . Зависимость правой части уравнения (12) $f(\varphi)$, представляющая собой безразмерную температуру во фронте волны, при различных значениях параметра B представлена на рис. 2. Абсциссы точек пересечения кривой $f(\varphi)$ с прямой $\theta^* = \text{const}$ равны скоростям распространения АВ режимов волны переключения. Если $B < B^*=1$ (рис. 2, кривая 1), то $f(\varphi)$ монотонно уменьшается при увеличении φ от -1 до 1. Поэтому существует только одна точка пересечения $f(\varphi)$ и $\theta^* = \text{const}$ и, следовательно, единственный АВ режим. Если $B > B^*$, то кривая $f(\varphi)$ имеет локальные минимум f_{\min} и максимум f_{\max} (рис. 2, кривая 3). При $\theta^* > f_{\max}$ и $\theta^* < f_{\min}$, как и в предыдущем случае, $f(\varphi)$ и $\theta^* = \text{const}$ пересекаются в одной точке, и при таких значениях параметров существует единственный АВ режим. Если $f_{\min} < \theta^* < f_{\max}$, то точек пересечения $f(\varphi)$ с $\theta^* = \text{const}$ три. Им соответствуют АВ режимы с различными скоростями распространения $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ (рис. 2). Неединственность АВ режимов распространения волн

переключения при $B > B^* = 1$ обусловлена процессами релаксации теплового потока [7]. Наличие в уравнениях теплопроводности (2), (4), производной от источника, приводит при $\varphi < 0$ к уменьшению температуры во фронте волны, а при $\varphi > 0$ — к увеличению. Если $B < B^*$, то такое влияние незначительно, а при $B > B^*$ у кривой $f(\varphi)$ образуются локальные минимум и максимум. Нemoжотонность зависимости $f(\varphi)$ при $B > B^*$ и приводит к неединственности АВ режимов распространения волн переключения (анализ устойчивости этих режимов требует специального рассмотрения).

На рис. 3, 4 представлены зависимости $f(\varphi)$ при различных значениях параметров l_{\min} и B (точка $f(\varphi) = 0.5$, $\varphi = 0$ является центром симметрии для кривых $f(\varphi)$ (рис. 2)). При $l_{\min} = 0.01$ (рис. 3) кривые $f(\varphi)$, соответствующие различным значениям B , стремятся к нулю при $\varphi \rightarrow 1$ более плавно, чем при $l_{\min} = 0.001$ (рис. 4). Увеличение параметра B приводит к росту безразмерной температуры во фронте волны $f(\varphi)$ как при $l_{\min} = 0.01$, так и при $l_{\min} = 0.001$ (рис. 3, 4).

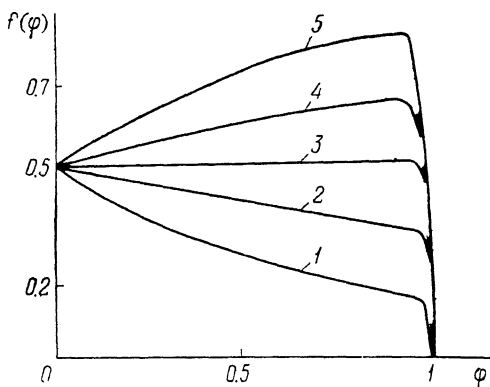
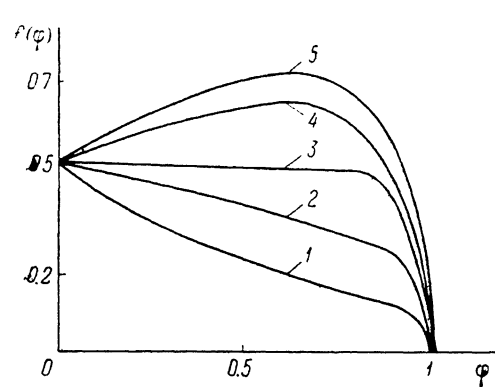


Рис. 3. Зависимости температуры во фронте волны $f(\varphi)$ при $l_{\min} = 0.01$ и различных значениях B .

1 — $B = 0.1$, 2 — 0.5, 3 — 1, 4 — 2, 5 — 3.

Рис. 4. Зависимости температуры во фронте волны $f(\varphi)$ при $l_{\min} = 0.001$.

Значения параметра B такие же, как и на рис. 3.

6. Основные выводы заключаются в следующем.

1. При низких температурах или при высоких скоростях распространения волн переключения становятся существенными процессы релаксации теплового потока (1). В этом случае уравнение теплопроводности в покоящейся среде (2) гиперболического типа, а коэффициент при второй производной в уравнении (4), описывающем распределение температуры в движущейся с постоянной скоростью волне, зависит от отношения скоростей волны V и скорости распространения тепла в среде v . Кроме того, в (2) и (4) входит производная от функции тепловыделения, которая является как бы дополнительным источником тепла, величина которого зависит как от вида самой функции тепловыделения, так и от значения скорости волны V .

2. Скорость распространения тепловых АВ переключения ограничена скоростью распространения тепла в среде $v = (a/\tau)^{1/2}$. Со скоростями $V \geq v$ могут распространяться либо фазовые волны, либо нетепловые АВ.

3. Зависимость температуры от координаты во фронте волны имеет излом, а при $V > v$ среда перед фронтом волны остается непрогретой (рис. 1).

4. Если $B < B^* = 1$, то существует только один АВ режим распространения волны переключения. При $B > B^* = 1$ процессы релаксации теплового потока приводят к неединственности АВ режимов. В этом случае существует три стационарных АВ режима с различными скоростями распространения.

В заключение автор выражает благодарность С. М. Щаталовой за проведение численных расчетов.

Список литературы

- [1] *Гуревич А. В., Минц Р. Г.* Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках. М.: ИВТАН, 1987. 165 с.
- [2] *Калафати Ю. Д., Сербинов И. А., Рябова Л. А.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 637—641.
- [3] *Барелко В. В.* // Проблемы кинетики и катализа. М.: Наука, 1981. С. 61—80.
- [4] *Мержанов А. Г., Ружанов Э. И.* // УФН. 1987. Т. 151. С. 553—593.
- [5] *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Язго В. Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [6] *Гутфельд Р. В.* // Физическая акустика. М.: Мир, 1973. Т. 5. С. 267—329.
- [7] *Соболев С. Л.* Препринт ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1988.
- [8] *Лыков А. В.* Тепломассообмен. Справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.
- [9] *Рыбанин С. С., Соболев С. Л.* // Препринт ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1986. С. 12.

Институт химической
физики (Отделение) АН СССР
№/о Черноголовка Московской обл.

Поступило в Редакцию
21 декабря 1988 г.