

01; 05

© 1990 г.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДА К ПОВЕРХНОСТНОМУ НАГРЕВУ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В. Р. Романовский

Исследована устойчивость сверхпроводящего состояния теплоизолированного комбинированного провода к конечному тепловому возмущению при изменении его внешнего радиуса. Результаты вычислений сравниваются с одномерной теорией. Показано, что критические энергии возмущений, вычисленные в предположении однородного по сечению теплового состояния композита, выше энергий, рассчитанных с учетом многомерного характера протекающих тепловых процессов.

В настоящее время сверхпроводящие магнитные системы широко внедряются в различные области энергетики. Использование сверхпроводящих обмоток в термоядерных реакторах, накопителях энергии, электрогенераторах позволяет создать сильные магнитные поля в больших объемах при малых энергетических затратах. Однако эксплуатация сверхпроводящих устройств требует принятия особых конструктивных мер, вызванных разрушением сверхпроводимости спонтанно действующими внутри обмотки возмущениями. Для обеспечения безаварийной работоспособности сверхпроводящих магнитов были развиты необходимые методы стабилизации [1]. При этом соответствующие исследования, как правило, базировались на простых одномерных моделях [2-4], в основе которых лежит предположение о малости градиента температур в поперечном сечении, справедливое для достаточно тонких проводов. В то же время процессы, протекающие внутри композитов, могут существенно изменять однородность теплового состояния проводника, а значит, условия возникновения и распространения нормальной зоны [1, 5, 6]. В общем случае определение максимально допустимых возмущений следует проводить на основе анализа совместно протекающих тепловых и электродинамических процессов с учетом их многомерности. Но при этом конечный результат не позволяет оценить вклад каждого механизма, их физические особенности. В связи с этим несомненный интерес представляет решение многомерной задачи об устойчивости сверхпроводящего состояния провода к тепловым возмущениям прежде всего с теплофизической точки зрения, когда основное внимание уделяется тепловому механизму, в основном ответственному за развитие возмущения в комбинированном проводе.

Рассмотрим в рамках анизотропной среды прямолинейный теплоизолированный комбинированный провод цилиндрического сечения конечной протяженности $-l \leq x \leq l$ и заданного радиуса $0 < r < r_0$ с равномерно распределенным по сечению транспортным током. Это допущение необходимо для того, чтобы провести сопоставление с уже известными одномерными результатами [4]. Однако оно может быть без особого труда снято введением соответствующего неравномерного распределения тока по сечению композита.

Пусть в начальный момент времени на часть боковой поверхности $-l_0 \leq x \leq l_0$ равномерно охлажденного провода в течение заданного времени

$0 < t \leq t_0$ воздействует осесимметричный тепловой поток с известной плотностью $f(x, t)$, в результате действия которого выделяется общая энергия

$$E = 2\pi r_0 \int_{-l_0}^{l_0} \int_0^{t_0} f(x, t) dx dt.$$

Будем определять изменение температуры провода из решения задачи

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{S^2} \rho(T), \quad T(x, r, 0) = T_0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad T \Big|_{x=l} = T_0, \quad \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = f(x, t). \quad (1)$$

Здесь c , λ_x , λ_r — усредненные значения теплоемкости и коэффициентов теплопроводности композита, I — ток, S — площадь поперечного сечения, T_0 — температура хладагента, $\rho(T)$ — эффективное сопротивление композита [1]

$$\rho(T) = \rho_0 \begin{cases} 1, & T > T_{CB}, \\ (T - T_C)/(T_{CB} - T_C), & T_C \leq T \leq T_{CB}, \\ 0, & T < T_C = T_{CB} - (T_{CB} - T_0) \frac{I}{I_C}, \end{cases}$$

где ρ_0 — удельное электросопротивление матрицы, T_{CB} — критическая температура сверхпроводника при нулевом токе для заданной индукции магнитного поля, I_C — критический ток.

В данной постановке граничное условие при $x=0$ описывает симметрично расположенный относительно начала координат поверхностный источник тепловыделения. Оно введено для простоты проводимого анализа. При рассмотрении протяженных возмущений ($l, l_0 \rightarrow \infty$), когда перенос тепла в продольном направлении становится незначительным, в задаче (1) необходимо опустить член, учитывающий продольную теплопроводность. В этом случае вместо полной энергии возмущение характеризуется плотностью энергии на единицу длины

$$E_l = 2\pi r_0 \int_0^{t_0} f dt.$$

Сопоставим в рамках обобщенного анализа влияние поперечного размера провода на его тепловую стабильность как с точки зрения расчета одномерного, так и двумерного температурного поля. Предположим, что при варьировании внешнего радиуса r_0 останутся без изменения коэффициент заполнения композита сверхпроводником и плотность тока. Введем безразмерные переменные

$$X = \frac{x}{L_x}, \quad R = \frac{r}{L_r}, \quad i = \frac{I}{I_C}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_{CB} - T_0},$$

$$\tau = \frac{\lambda_x}{c L_x^2} t,$$

относительно которых задача (1) записывается в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + i^2 \begin{cases} 1, & \Theta > 1, \\ (\Theta - 1 + i)/i, & 1 - i \leq \Theta \leq 1, \\ 0, & \Theta < 1 - i, \end{cases}$$

$$\Theta(X, R, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{x=0} = 0, \quad \Theta \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = F(X, \tau), \quad (2)$$

где

$$L_{x,r} = \sqrt{\frac{\lambda_{x,r} S^2 (T_{CB} - T_0)}{I_C^2 \rho_0}}, \quad F = \frac{L_r f}{\lambda_r (T_{CB} - T_0)}, \quad L = \frac{l}{L_x}, \quad R_0 = \frac{r_0}{L_r}.$$

Будем моделировать возмущение исходного теплового состояния композита прямоугольным во времени импульсом тепла

$$F = \begin{cases} F_0 = \text{const}, & 0 \leq X \leq X_0, \tau < \tau_0, \\ 0, & X_0 < X \leq L, \tau \geq \tau_0, \end{cases}$$

а численное определение критической плотности возмущения F_q , для которой при $F_0 < F_q$ происходит восстановление сверхпроводимости, а при $F_0 > F_q$ ее разрушение, будем проводить аналогично тому, как это описано в [4]. Процесс заключался в задании последовательности значений $F_0 = F_0^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, \dots$. Для каждой величины $F_0^{(s)}$ проводился расчет температурного поля с целью определения конечного теплового состояния композита после действия возмущения. Поиск прекращался, если разница между текущим и предыдущим значениями $F_0^{(s)}$ становилась меньше заданной точности

$$F_q = F_0^{(s)}, \quad |F_0^{(s)} - F_0^{(s-1)}| < \delta.$$

Для сопоставления данных вычислений F_q с результатами одномерной теории безразмерную критическую энергию удобно нормировать на характерную энергию $E_x = cSL_x(T_{CB} - T_0)$, используемую в одномерной теории [4]. Тогда окончательное выражение для расчета искомой безразмерной энергии имеет вид

$$\varepsilon_q = \frac{2}{R_0} \int_0^{X_0} \int_0^{\tau_0} F_q dX d\tau$$

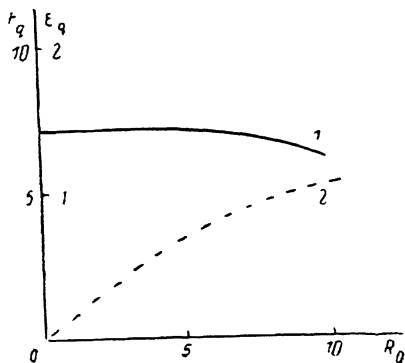


Рис. 1. Зависимость приведенной энергии ε_q (1) и критической плотности теплового потока F_q^q (2) от радиуса при $X_0=1$, $\tau_0=1$, $i=0.5$.

и для безразмерной плотности энергии ($X_0 \rightarrow \infty$)

$$e_q = \frac{2}{R_0} \int_0^{\tau_0} F_q d\tau.$$

Следует отметить, что характерная величина энергии E_x зависит от площади поперечного сечения композита. Поэтому значения ε_q и e_q не являются явными функциями, описывающими изменение устойчивости от внешнего радиуса. Назовем эти значения приведенными, так как они показывают отличие результатов расчета критических энергий по одномерной и двумерной моделям. Поэтому в этих терминах основным результатом одномерной теории [4] является независимость значений ε_q и e_q от внешнего радиуса.

На рис. 1 построены кривые приведенной энергии и критической плотности тепловыделения в зависимости от внешнего радиуса при действии локального импульсного возмущения. Видно, что при малых R_0 приведенная энергия практически не изменяется. Однако с ростом поперечного размера композита ε_q уменьшается. Соответствующее изменение критической плотности показывает наличие двух характерных областей: при малых R_0 практически линейного участка роста кривой $F_q(R_0)$ и области слабой зависимости F_q от внешнего радиуса при достаточно больших R_0 . Аналогичный характер имеют зависимости $e_q(R_0)$ и $F_q(R_0)$ для бесконечно протяженного источника поверхностного нагрева (рис. 2). Но в отличие от локального возмущения область, где $e_q \sim \text{const}$, значительно меньше. Последняя, как следует из расчетов, увеличивается с ростом тока и продолжительности теплового воздействия. Соответственно температурное поле в поперечном направлении при изменении этих параметров становится более однородным.

Приведенные на рис. 1, 2 кривые устойчивости были вычислены при фиксированной длительности импульса. Ее увеличение приводит к увеличению критических энергий, так как при этом все большая часть подводимой энергии рассеивается в проводнике. Оценим влияние длительности возмущения для бесконечно протяженного источника тепловыделения. Результаты расчета e_q и F_q как функции τ_0 для двух значений внешнего радиуса приведены на рис. 3. Видно, что возмущения с длительностью импульса $\tau_0 \leq 1$ относятся к практически мгновенным. Для локальных возмущений этот диапазон, естественно, будет больше. Рис. 3 также наглядно показывает, как с увеличением внешнего радиуса уменьшается адиабатичность нагрева.

Полученные результаты позволяют оценить область изменения исходных параметров, при которых происходящие в композите процессы не зависят от радиальной координаты. Воспользуемся для этого известным условием, согласно

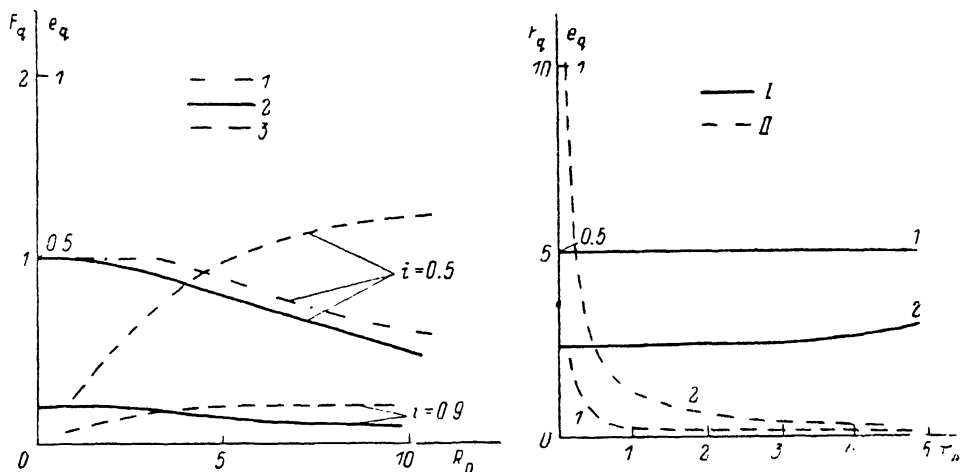


Рис. 2. Результаты расчета критических параметров возмущения при $X_0 \rightarrow \infty$.

1 — e_q при $\tau_0=10$, 2 — e_q , 3 — F_q при $\tau_0=1$.

Рис. 3. Зависимость приведенной энергии e_q (I) и критической плотности возмущения F_q (II) от длительности возмущения при $X_0 \rightarrow \infty$, $i=0.5$.

1 — $R_0=1$, 2 — 10.

которому перепад температуры по радиусу мал, если характерное время радиальной диффузии тепла с r_0^2/λ_r будет много меньше времени действия возмущения. В безразмерной форме необходимое условие одномерности температурного профиля имеет вид

$$R_0 < \sqrt{\tau_0}.$$

Данная оценка не учитывает влияние дополнительного джоулева нагрева от участка нормальной зоны. Тем не менее не трудно проверить, что она удовлетворительно описывает условия, при которых критическая энергия для бесконечно протяженного возмущения слабо зависит от радиуса. Этот результат показывает малый вклад джоулева тепла в общий нагрев от теплового потока, переводящего композит в нормальное состояние (данный вывод также подтверждается увеличением области одномерности температурного поля с увеличением тока).

Воспользуемся записанным условием для оценки длительности импульса, приводящего к одномерному распределению температуры. Полагая $c \sim 10^3$ Дж/(м³·К), $\lambda_r \sim 10^2$ Вт/(м·К), $r_0 \sim 10^{-3}$ м, найдем, что при $t_0 > 10^{-5}$ с для расчетов правомерна одномерная модель.

Проведенные вычисления показывают, что учет тепловых процессов, происходящих в поперечном сечении, приводит к занижению критических энергий по сравнению с энергиями, вычисленными по одномерной теории. Разница между ними монотонно увеличивается с ростом внешнего радиуса и становится

тем больше, чем протяженнее возмущение, меньше его длительность и ток. При относительно больших поперечных размерах провода разрушение сверхпроводимости слабо зависит от R_0 . Этот факт говорит о наличии характерного поперечного размера токонесящего элемента, при превышении которого критическая плотность возмущения практически не зависит от внешнего радиуса.

Отмеченные особенности обусловлены спецификой образования и распространения нормальной зоны внутри токонесящего элемента в зависимости от его поперечного размера. В одномерной теории нагрев провода по его сечению предполагается равномерным, тогда критическая энергия вычисляется в соответствии с изменением его температурного поля в продольном направлении. При этом допустимые температуры локального нагрева сердцевинки композита могут значи-

тельно превышать соответствующую критическую температуру. Двумерный расчет подтверждает наличие подобных состояний, когда температурное поле вдоль ра-

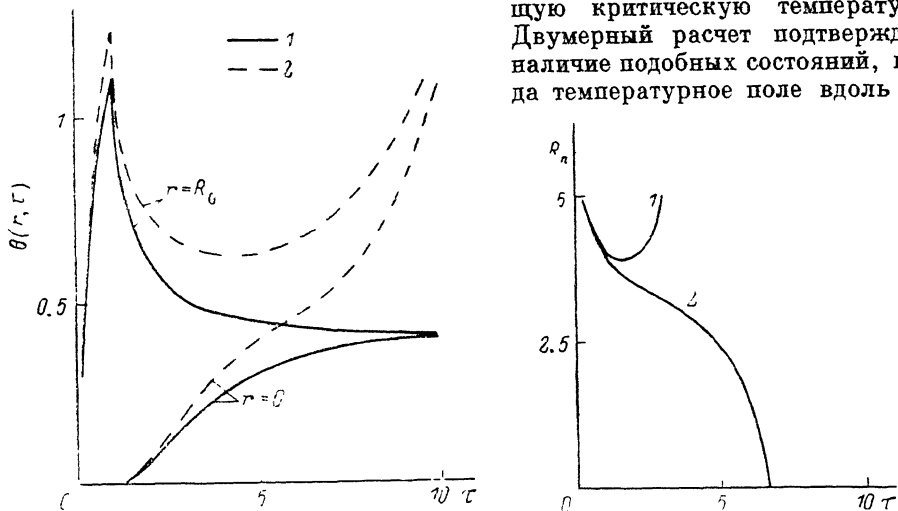


Рис. 4. Изменение температуры композита во времени при $R_0=5$, $\tau_0=1$, $i=0.5$ в случае действия бесконечно протяженного возмущения.

1 — $F_0=0.8$ (докритическое возмущение), 2 — $F_0=1$ (закритическое возмущение).

Рис. 5. Изменение длины нормальной зоны при $R_0=5$, $\tau_0=1$, $i=0.5$ ($X_0 \rightarrow \infty$).

диуса практически однородно и нормальная зона быстро заполняет поперечное сечение. Для данных проводов (термически тонких) устойчивость к локальным возмущениям будет зависеть главным образом от продольной теплопроводности матрицы. С ростом внешнего радиуса неоднородность распределения температуры приобретает более выраженный характер (рис. 4, 5). Возникают такие состояния, когда в начальный момент необратимого распространения нормальной зоны центральная часть провода еще не нагрелась до соответствующей критической температуры. В этом случае основные процессы, ответственные за восстановление или разрушение сверхпроводимости, происходят прежде всего в радиальном направлении и протекают в достаточно локальной области композита, прилегающей к источнику возмущения. Конечное состояние подобных токонесящих элементов (термически массивных) определяется количеством подведенной энергии, необходимой для заполнения нормальной зоной именно этой локальной части провода. Если подведенное тепло превышает максимально допустимое, то нормальная зона распространяется на такое расстояние, на котором выделяемое джоулево тепло превышает отводимый теплопроводностью тепловой поток и нормальная зона необратимо заполняет токонесящий элемент. Поскольку для нагрева локальной части сечения до критической температуры необходимо меньше энергии, чем для нагрева всего сечения, то критические энергии, вычисленные с учетом многомерного характера распространения нормальной зоны, будут ниже, чем в одномерной теории. Из сказанного также следует объяснение, почему при относительно больших значениях внешнего радиуса критическая плотность возмущения весьма слабо зависит от R_0 , а также роли

поперечной теплопроводности в устойчивости термически массивных компози- тов. Кроме этого, нетрудно понять влияние неоднородного распределения тока по сечению провода на значения критических энергий.

Таким образом, решение двумерной задачи об устойчивости сверхпроводящего композита к импульсному поверхностному возмущению позволило выявить физические особенности разрушения его сверхпроводящего состояния с учетом тепловых процессов, происходящих в поперечном сечении. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Одномерная теория расчета критических энергий в случае импульсного поверхностного нагрева теплоизолированного провода приводит к завышенным значениям допустимых энергий по сравнению с реально действующими.

2. Критические энергии, вычисленные с учетом многомерного характера распространения возмущения, меньше критических энергий, определяемых по одномерной модели. Различие между ними тем больше, чем больше радиус провода, протяженность возмущения, и уменьшается с ростом длительности импульса и тока.

3. Устойчивость сверхпроводящего состояния термически тонких проводов к поверхностному локальному возмущению в основном зависит от процессов, происходящих в продольном направлении, а термически массивных — от процессов переноса тепла в поперечном сечении.

Список литературы

- [1] *Альтов В. А., Зенкевич В. Б., Кремлев М. Г., Сычев В. В.* Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.
- [2] *Chen W. Y., Purcell J. R.* // *J. Appl. Phys.* 1978. Vol. 49. N 6. P. 3546—3553.
- [3] *Schmidt C.* // *Cryogenics.* 1978. Vol. 18. N 10. P. 605—610.
- [4] *Романовский В. Р.* // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.* 1984. № 4. С. 115—119.
- [5] *Милиц Р. Г., Рахманов А. Л.* Неустойчивости в сверхпроводниках. М.: Наука, 1984. 264 с.
- [6] *Klimenko E. Yu., Martovetsky N. N.* // *IEEE Trans. Magn.* 1988. Vol. 24. N 2. P. 1167—1169.

Поступило в Редакцию

11 января 1989 г.

В окончательной редакции

12 июня 1989 г.