01; 10

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТИПА «ЗМЕЙКИ» ЧАСТИЧНО КОМПЕНСИРОВАННОГО ПО ТОКУ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

В. П. Григорьев, А. В. Захаров

Рассмотрена крупномасштабная поперечная неустойчивость частично компенсированного по току электронного пучка, обусловленная наличием резонансов связанных поперечных колебаний потоков. Определены инкременты неустойчивости в зависимости от длины волны. Показано, что стабилизация этой неустойчивости происходит на нелинейной стадии в результате зависимости поперечной силы от смещения пучка от равновесной оси.

Для повышения эффективности использования сильноточных электронных пучков в коллективных методах ускорения необходимо рассмотреть вопросы устойчивости пучков относительно крупномасштабных возмущений. Наиболее опасными в этом плане являются возмущения, приводящие к поперечному смещению пучка как целого, — шланговая неустойчивость (мода колебаний с азимутальным числом единица), в результате чего пучок выпадает на элементы конструкции ускорителя или тракта транспортировки. В настоящее время наиболее полно исследована резистивная шланговая неустойчивость, возникающая при прохождении пучка по плазменному каналу сравнительно низкой проводимости [1-4], с инкрементом, спадающим с ростом проводимости плазмы. Шланговая неустойчивость в канале с высокой проводимостью в присутствии плазменного тока рассматривалась только для возмущений с длиной волны намного больше длины волны бетатронных колебаний электронов пучка, когда пучок под действием центробежной силы в поперечном направлении смещается вместе с каналом [5]. Скорость развития неустойчивости при таких возмущениях на линейной стадии и инкремент зависят от массы плазмы, захваченной поперечным движением [5].

Ниже мы рассмотрим поперечную неустойчивость пучка в плазменном канале с высокой проводимостью, когда из-за относительного смещения пучка и канала пучок совершает колебания в «вмороженном» магнитном поле полного тока, а на канал действует поле пучка. При этом рост поперечных колебаний в системе происходит в результате наличия резонансов связанных поперечных колебаний потоков. Механизм развития этой неустойчивости аналогичен электростатической неустойчивости типа «змейки» [6], имеющей место в компенсированных по заряду электронно-ионных пучках и наблюдаемую при коллективном ускорении ионов.

Основные уравнения

Рассмотрим поперечные колебания в системе, состоящей из плазменного канала и распространяющегося вдоль оси z нейтрализованного по заряду и частично скомпенсированного по току электронного пучка с плотностью частиц $n_{b,p}(r)=n^{(0)}_{b,p}\exp(-r^2/r_0^2)$, где r — радиус в цилиндрической системе координат; r_0 — постоянная, характеризующая радиус пучка и плазменного канала; индексы b и p относятся к пучку и каналу соответственно.

В области параметров $4\pi\sigma r_0/c \gg 1$, $\omega r_0/c \ll k_z r_0 \ll 1$ (ω, k_z — частота и волновой вектор колебаний) зарядовыми возмущениями можно пренебречь и рассмотреть токовые взаимодействия пучка с плазменным каналом через «вмороженное» в канал магнитное поле полного тока $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. В этих условиях, вводя вектор смещения пучка и канала $\rho_{b,p}(t, z)$ от равновесной оси ($r=0$), уравнения колебаний пучка и плазменного канала запишем в виде

$$\pi r_0^2 n_b^{(0)} m\gamma \frac{d^2}{dt^2}\rho_b = \frac{1}{c}\int d\mathbf{r}\,[\mathbf{j}_b(|\mathbf{r}_\perp - \rho_b|),\ \mathbf{B}(|\mathbf{r}_\perp - \rho_p|)], \tag{1}$$

$$\pi r_0^2 n_p^{(0)} M \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_p = -\frac{1}{c}\int d\mathbf{r}\,[\mathbf{j}_b(|\mathbf{r}_\perp - \rho_b|),\ \mathbf{B}(|\mathbf{r}_\perp - \rho_b|)], \tag{2}$$

$d/dt=\partial/\partial t+v_b(\partial/\partial z)$; v_b — скорость пучка; $\gamma=((1-(v_b^2/c^2))^{-1/2}$; m, M — масса электрона и иона плазмы; $\mathbf{j}_b=-ev_b n_b(r)\,\mathbf{e}_z$; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы в цилиндрической системе координат; $\mathbf{r}_\perp$ — радиус вектор в поперечном сечении; c — скорость света; e — элементарный заряд; $\beta_b=v_b/c$.

Принимая во внимание, что в рассматриваемой системе «вмороженное» поле в канале $\mathbf{B}=B_\theta\mathbf{e}_\theta$, а профиль плотности полного тока $j_s(r)$ с большой степенью точности можно считать пропорциональным профилю плотности тока пучка $j_b(r)$ $[j_s(r)=(1-f_т)\,j_b(r)]$, и используя для определения B_θ уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{B}=(4\pi/c)\,\mathbf{j}_s$, после интегрирования по поперечному сечению в (1), (2) уравнения поперечных колебаний пучка и плазменного канала преобразуем к виду

$$\frac{d^2}{dt^2}\rho_p = -2\omega_\beta^2\rho\left(\frac{r_0^2}{\rho^2}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\rho^2}{2r_0^2}\right)\right], \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_b = 2\delta\omega_\beta^2\rho\left(\frac{r_0^2}{\rho^2}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\rho^2}{2r_0^2}\right)\right]. \tag{4}$$

Здесь $\rho=\rho_b-\rho_p$, $\omega_\beta=(v_b/r_0)(I_s/I_A)^{1/2}$ — частота бетатронных колебаний пучка в поле полного тока $I_s=(1-f_т)$, I_b I_b — ток пучка, $f_т$ — фактор токовой нейтрализации, $I_A=mc^3 v_b\gamma/ec$ — ток Альфвена; $\delta=(m\gamma n_b^{(0)}/Mn_p^{(0)}) \ll 1$. Частота колебаний канала в магнитном поле пучка, как следует из уравнения (4), равна $\omega_k=\delta^{1/2}\omega_\beta$. Из вида правой части уравнений (3), (4) следует также ослабление силы взаимодействия пучка с плазменным каналом при увеличении их относительного смещения. Такая зависимость силы от смещения ρ может привести к ограничению роста амплитуд и насыщению неустойчивости. Ограничиваясь вначале случаем слабой нелинейности по $\rho/r_0 \ll 1$, запишем уравнения движения центров тяжести пучка и плазменного канала (3), (4) с учетом членов третьего порядка по ρ/r_0

$$\frac{d^2}{dt^2}\rho_b = -\omega_\beta^2(\rho_b-\rho_p)\,[1-(\rho_b-\rho_p)^2/4r_0^2] = -\omega_\beta^2 F(\rho), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_p = \omega_k^2 F(\rho). \tag{6}$$

Анализ уравнений движения

Решение начальной задачи для уравнений (5), (6) представим в виде нелинейной плоскополяризованной волны с медленно меняющимися амплитудами

$$\rho_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\rho_{\alpha s}(t,\ z)\exp[is(k_z z-\omega t)] + \text{к. с.} \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в уравнения (5), (6) и отбрасывая производные от ρ_{bs} и ρ_{ps} и нелинейные члены, получим уравнения, определяющие амплитуды в первом приближении,

$$[\omega_\beta^2 - s^2(\omega-k_z v_b)^2]\,\rho_{bs}^{(1)} - \omega_\beta^2\rho_{ps}^{(1)} = 0, \tag{8}$$

$$-\delta\omega_\beta^2\rho_{bs}^{(1)} + (\delta\omega_\beta^2 - s^2\omega^2)\,\rho_{ps}^{(1)} = 0. \tag{9}$$

Из уравнений (8), (9) следует, что $\rho_{bs}^{(1)}=\rho_{ps}^{(1)}=0$ при $s\neq1$, дисперсионное уравнение для $s=1$ и соотношение для амплитуд

$$D=[\omega_\beta^2-(\omega-k_z v_b)^2][\delta\omega_\beta^2-\omega^2]-\delta\omega_\beta^4=0, \tag{10}$$

$$\rho_{p1}^{(1)}=\frac{\delta\omega_\beta^2}{\delta\omega_\beta^2-\omega^2}\rho_{b1}^{(1)}=\alpha\rho_{b1}^{(1)}=\alpha\Phi. \tag{11}$$

Уравнение (10) удобно записать в виде

$$\frac{\delta\omega_\beta^2}{\omega^2}+\frac{\omega_\beta^2}{(\omega-k_z v_b)^2}=1, \tag{12}$$

которое совпадает с дисперсионным уравнением пучковой неустойчивости с заменой плазменных частот пучка и плазмы на ω_β и ω_k соответственно. Уравнение (12) имеет неустойчивое решение в области $0<k_z<(\omega_\beta/v_b)(1+\delta^{1/3})^{3/2}$. Максимальный инкремент достигается при $k_z=k_m=\omega_\beta/v_b$ и равен

$$\zeta_m=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1/3}\omega_\beta=\sqrt{3}\,\mathrm{Re}\,\omega_m,\ \ \omega_m=\omega(k_m). \tag{13}$$

В длинноволновой области ($k_z^2v_b^2\ll\omega_\beta^2$) решение дисперсионного уравнения (12) имеет вид $\omega(k_z)\simeq i\sqrt{\delta}k_z v_b$ и совпадает с выражением, полученным в [5]. При этом, как следует из выражения (11), $\rho_{p1}^{(1)}=[1+(k_z v_b/\omega_\beta)^2]^{-1}\rho_{b1}^{(1)}\approx\rho_b^{(1)}$, т. е. смещения пучка и плазменного канала совпадают. Таким образом, в длинноволновом пределе рассматриваемая неустойчивость переходит в шланговую неустойчивость, изученную в работе [5], где показано, что она должна обрываться при $k_z\sim v_{T\perp}/v_b r_0$. Учет бетатронных колебаний пучка в самосогласованном магнитном поле приводит к резонансному усилению неустойчивости на длинах волн, близких к длине волны бетатронных колебаний пучка, и при малом параметре δ инкремент (13) значительно превышает максимальное значение инкремента $\sim\sqrt{\delta}\,v_{T\perp}/r_0$ из работы [5]. Амплитуда поперечных смещений пучка в резонансном режиме, как следует из выражений (11), (13), значительно превышает смещения плазменного канала $\rho_{p1}/\rho_{b1}=\alpha\sim\delta^{1/3}$.

Во втором приближении, учитывая (10)—(13), из (5), (6) получим для $s\neq1$, 3 $\rho_{ps}^{(2)}=\rho_{bs}^{(2)}=0$, что является следствием кубической нелинейности, для $s=3$ имеем

$$\begin{pmatrix}\rho_{b3}^{(2)}\\ \rho_{p3}^{(2)}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1\\ (4\delta)^{1/3}\end{pmatrix}\frac{\Phi^3}{128r_0^2}. \tag{14}$$

Из соотношения (14) следует, что амплитуды высших гармоник малы по сравнению с Φ. Поэтому ниже их учитывать не будем. Для амплитуд с $s=1$ имеем

$$[\omega_\beta^2-(\omega_m-k_m v_b)^2]\rho_{b1}^{(2)}-\rho_{p1}^{(2)}\omega_\beta^2-2i(\omega_m-k_m v_b)\frac{d\Phi}{dt}=0, \tag{15}$$

$$-\delta_\beta^2\rho_{b1}^{(2)}-(\omega_\beta^2\delta-\omega_m^2)\rho_{p1}^{(2)}-2i\alpha\omega_m\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0. \tag{16}$$

Умножая уравнение (15) на $\delta\omega_\beta^2-\omega_m^2$ и складывая с уравнением (16), умноженным на ω_β^2, получим уравнение для Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+v_g\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0, \tag{17}$$

где $v_g=(d\omega/dk_z)_{k_z=k_m}\approx v_b/3$ — групповая скорость возмущений.

Решением уравнения (17) с начальным условием $\Phi(t=0)=\Phi_0(z)$ (7) имеет вид $\Phi=\Phi_0(z-v_g t)$, т. е. в данном приближении возмущение сносится вдоль системы с групповой скоростью v_g. При этом из уравнения (18) следует, что

$$\rho_{p1}^{(2)}=\alpha\rho_{b1}^{(2)}-\frac{2i\omega_m\alpha}{\delta\omega_\beta^2-\omega_m^2}v_g\frac{\partial\Phi}{\partial\xi},\ \ \xi=z-v_g t. \tag{18}$$

В третьем приближении, учитывая вторые производные по ξ от Φ и соотношения (10)—(13), (17), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - i \frac{v_q^2}{9\omega_m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = - \frac{i\omega_\beta}{32 r_0^2}\left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_\beta}\right) |\Phi|^2 \Phi e^{2\zeta_m t}. \tag{19}$$

Член, пропорциональный $\partial^2\Phi/\partial\xi^2$, в уравнении (19) описывает диффузионное расплывание волнового пакета и несуществен для начальных возмущений со слабо неоднородной амплитудой, $\nu\Phi_0/\partial\xi \approx 0$. Представляя Φ в виде $\Phi = |\Phi| e^{-i\varphi}$ и отделяя в уравнении (19) действительную и мнимую части, получим уравнения для модуля огибающей $|\Phi|$ и ее фазы φ в пренебрежении расплывания пакета

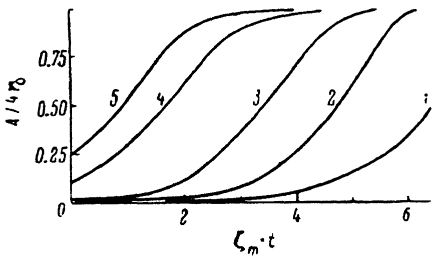
$$\frac{\partial |\Phi|}{\partial t} = - \frac{\zeta_m}{16 r_0^2} |\Phi|^3 e^{2\zeta_m t}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\omega_\beta}{32 r_0^2} |\Phi|^2 e^{2\zeta_m t}. \tag{21}$$

Решение уравнения (20) при $\Phi\,(t=0) = \Phi_0\,(z)$ имеет вид

$$|\Phi| = \Phi_0(\xi)\,[1 + \Phi_0^2(\xi)\,(e^{2\zeta_m t} - 1)/16 r_0^2]^{-1/2}. \tag{22}$$

Зависимость полной амплитуды колебаний $A = |\Phi| \exp(\zeta_m t)$ от времени приведена на рисунке. Из рисунка следует, что для малых начальных возмущений $(\Phi_0/4r_0) \leqslant 0.03$ амплитуда поперечных колебаний пучка медленно растет во времени. Насыщение роста амплитуды колебаний достигается за времена, равные



Зависимость амплитуды колебаний электронного пучка от времени.

1 — $(\Phi_0/4r_0)=0.001$, *2* — 0.005, *3* — 0.02, *4* — 0.1, *5* — 0.25.

нескольким постоянным роста ζ_m^{-1}, и амплитуда при насыщении равна $A_s = 4r_0$. Режиму насыщения, как следует из (21), соответствует изменение частоты колебаний $\Delta\,\omega_s = \omega_\beta/2$.

Полученное значение амплитуды насыщения выходит за рамки применимости уравнений (5), (6). Поэтому для оценки характера движения системы при больших амплитудах рассмотрим точные уравнения (3), (4) и покажем, что они имеют решение в виде стационарной волны. Действительно, в этом случае, учитывая, что все величины являются функциями от $\xi = \omega t - k_z z$ для относительного смещения $\rho = \rho_b - \rho_p$, можно получить уравнение

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\rho = -\omega_\beta^2 \frac{2r_0^2}{\rho}\left[1 - \exp\left(-\frac{\rho^2}{2r_0^2}\right)\right]\left[\frac{1}{(\omega - k_z v_b)^2} + \frac{\delta}{\omega^2}\right], \tag{23}$$

представляющее уравнение нелинейного осциллятора в потенциале

$$U(\rho) = \omega_\beta^2 r_0^2 \left[\frac{1}{(\omega - k_z v_b)^2} + \frac{\delta}{\omega^2}\right] \int_0^{x_0} [1 - \exp(-x)]\,\frac{dx}{x}, \quad x_0 = \frac{\rho^2}{2r_0^2}. \tag{24}$$

Из первого интеграла уравнения (23) $(1/2)(d\rho/d\xi)^2 + U(\rho) = C = \text{const}$ и вида потенциала следует, что ρ ограничено при любом конечном значении C и имеет вид нелинейной волны с некоторым периодом.

Таким образом, нелинейность силы взаимодействия пучка с плазменным каналом приводит к насыщению роста амплитуды колебаний.

Рассматриваемая в данной работе неустойчивость развивается приблизительно в той же области параметров, что и резистивная шланговая неустойчивость, инкремент которой для моноэнергетических пучков имеет порядок $\sqrt{\omega_\beta \tau_d}$ [3, 5], и нелинейная стабилизация происходит на амплитудах $A_s \sim$

$\sim 1.7 r_0$ [4]. Из сравнения инкрементов резистивной и рассматриваемой неустойчивостей следует, что преимущественное возбуждение неустойчивости типа «змейки» в системе будет наблюдаться при выполнении условия

$$\partial^{1/3} (\omega_\beta \tau_d)^{1/2} = \left(\frac{m\gamma n_b}{M n_p}\right)^{1/3} \left(\frac{I_s}{I_A}\right)^{1/4} \left(\frac{4\pi\sigma r_0 \beta_b}{c}\right) > 1, \tag{25}$$

т. е. в высокопроводящей плазме с легкими ионами при частичной токовой нейтрализации релятивистского электронного пучка. Следует отметить, что с точки зрения потерь электронов пучка в результате возбуждения поперечных колебаний неустойчивость типа «змейки» более опасна, так как она стабилизируется на более высоких амплитудах.

Список литературы

[1] *Lee E. P.* // Phys. Eluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327.
[2] *Аранчук Л. Е., Вихарев В. Д., Горев В. В.* и др. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 4. С. 1280—1295.
[3] *Григорьев В. П., Захаров А. В., Шулаев Н. С.* // Изв. вузов. Физика. 1986. № 4. С. 84—89.
[4] *Григорьев В. П., Диденко А. Н., Захаров А. В.* // Изв. вузов. Физика. 1987. № 10. С. 78—81.
[5] *Иванов А. А., Рудаков Л. И.* ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 4. С. 1332—1341.
[6] *Kochkarev D. G., Zenkevich P. R.* // Particle Accelerators. 1972. Vol. 3. N 1. P. 1—9.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
при Томском политехническом
институте им. С. М. Кирова

Поступило в Редакцию
11 ноября 1988 г.