

01; 11

© 1990 г.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА РАСПЫЛЯЕМЫХ ИОНАМИ ПОВЕРХНОСТЯХ

В. А. Курочкина, А. И. Морозов

Найден класс двумерных автомодельных профилей на распыляемой ионами поверхности. Обнаружена многозначность аналитических решений. Обсуждаются вопросы построения однозначных профилей.

В нашей работе [1] было начато систематическое рассмотрение теории эволюции двумерных возмущений $z(x, t)$ поверхности, подвергаемой бомбардировке моноскоростным ионным потоком $f_i \sim \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$.

Если направить ось z навстречу падающему пучку (рис. 1), то уравнение, определяющее эволюцию двумерных возмущений, будет иметь вид

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nu S_0 F(\beta) \quad (1a)$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \Phi\left(\frac{\partial z}{\partial k}\right) = 0, \quad z(x, 0) = z_0(x_0). \quad (1b)$$

Здесь ν — плотность падающего потока, S_0 — коэффициент распыления при падении пучка ионов нормально к поверхности, β — угол падения, $F(\beta)$ —

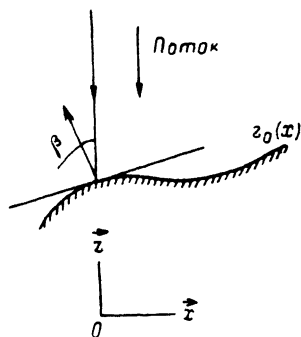


Рис. 1.

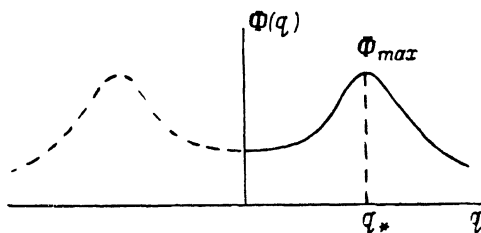


Рис. 2.

угловая зависимость коэффициента распыления, $\tau = \nu S_0 t$ — «нормированное» время, $\partial z / \partial x = \text{tg } \beta$, $q = \text{tg } \beta$, $\Phi(q) = F(\text{arc tg } q)$.

Если поверхность можно считать локально изотропной, то типичный вид $\Phi(q)$ представлен на рис. 2. Подчеркнем здесь принципиальное наличие максимума функции Φ_{max} при некоем q_* .

Решение задачи Коши для уравнения (1b) можно построить методом характеристик [2]

$$\begin{aligned} q &= z'(x - w_x(q)\tau), \\ z &= -w_x(q)\tau + z_0(x - w_x(q)\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь q — параметр; w_x, w_z — «нормированные» компоненты характеристической скорости, которые определяются выражениями

$$w_x(q) = \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q}, \quad w_z(q) = \left(\Phi(q) - q \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \right). \quad (3)$$

В [3] были изучены «стационарные» решения (2), которые описывают движущиеся с постоянной скоростью профили неизменной формы. В данной работе будут рассмотрены растущие пропорционально времени «автомодельные» профили.

Автомодельные кривые

При анализе решений (2) удобно разрешить первое относительно x и подставить во второе. Получим систему функций линейных относительно τ

$$\begin{aligned} x &= w_x(q) \tau + x_0(q), \\ z &= -w_z(q) \tau + z_0(q). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $x_0(q) \Rightarrow Z_0(x_0)$.

Зависимости $x_0(q)$ и $z_0(q)$ являются достаточно произвольными начальными функциями, однако их произвол ограничен условием

$$\frac{dz_0}{dx_0} = q. \quad (5)$$

«Стационарные» профили, рассмотренные в [3], — это такие профили, у которых, за исключением одиночных точек,

$$w_x(q) = \text{const}, \quad w_z(q) = \text{const}. \quad (6)$$

Простейший класс нестационарных профилей мы получим, положив при $\tau = 0$,

$$x_0 = w_x \tau_0, \quad z_0 = -w_z \tau_0, \quad \tau_0 = \text{const}. \quad (7)$$

Используя (3), нетрудно убедиться, что условие (5) выполнимо. Подставляя (7) в (4), получаем

$$x = w_x (\tau + \tau_0), \quad z = -w_z (\tau + \tau_0) \quad (8)$$

или

$$\frac{z}{\tau + \tau_0} = G\left(\frac{x}{\tau + \tau_0}\right), \quad (9a)$$

т. е. решение оказывается автомодельным. Без ограничения общности можно считать, что $\tau_0 \rightarrow 0$, и тогда

$$\frac{z}{\tau} = G\left(\frac{x}{\tau}\right). \quad (9б)$$

Замечательной особенностью построенного класса профилей является то, что их вид в основном определяется видом функции $\Phi(q)$ (см. ниже). Однако автомодельные профили порождают две взаимосвязанные трудности. Первая из них связана с конечными размерами автомодельных профилей: если Γ — собственно автомодельный профиль, то он находится в контакте с неким «внешним» участком распыляемой поверхности Γ_* , эволюция которых, вообще говоря, не вписывается в автомодельный закон эволюции Γ . Подробнее проблему стыков Γ с «неавтомодельными» участками Γ_* мы рассмотрим ниже.

Вторая трудность связана с наличием максимума у функции $\Phi(q)$. Это приводит к тому, что функция (9б) оказывается принципиально многозначной [2]. В результате встает проблема «отсекания лишних ветвей» автомодельной кривой $z = \tau G(x/\tau)$. При этом важно подчеркнуть, что многозначность не есть специфическое свойство автомодельного решения (8), а есть общее свойство (1) при $\Phi(q)$, имеющем экстремум. Остановимся на нем подробнее на примере автомодельных профилей. Для наглядности будем рассматривать функцию $\Phi(q)$, описываемую следующим образом:

$$\Phi(q) = (1 + q^2)e^{-\alpha^2 q^2}, \quad (10)$$

где $\alpha = \text{const}$.

В этом случае компоненты характеристической скорости равны

$$\begin{aligned} w_x &= 2qe^{-\alpha^2 q^2} [1 - \alpha^2(1 + q^2)], \\ w_z &= e^{-\alpha^2 q^2} [1 + (2\alpha^2 - 1)q^2 + 2\alpha^2 q^4]. \end{aligned} \quad (11a)$$

Учитывая вытекающую из (3) связь производных $(\partial w_x)/(\partial q)$; $(\partial w_z)/(\partial q)$ приходим к выводу, что экстремумы w_x , w_z существуют в одной точке q_* , а условие экстремума $\Phi(q)$ дает

$$\alpha^2 < 1. \quad (11b)$$

Характеристическая компонента скорости w_x оказывается при всех $\alpha^2 < 1$ знакопеременной величиной, тогда как компонента w_z может быть как знако-

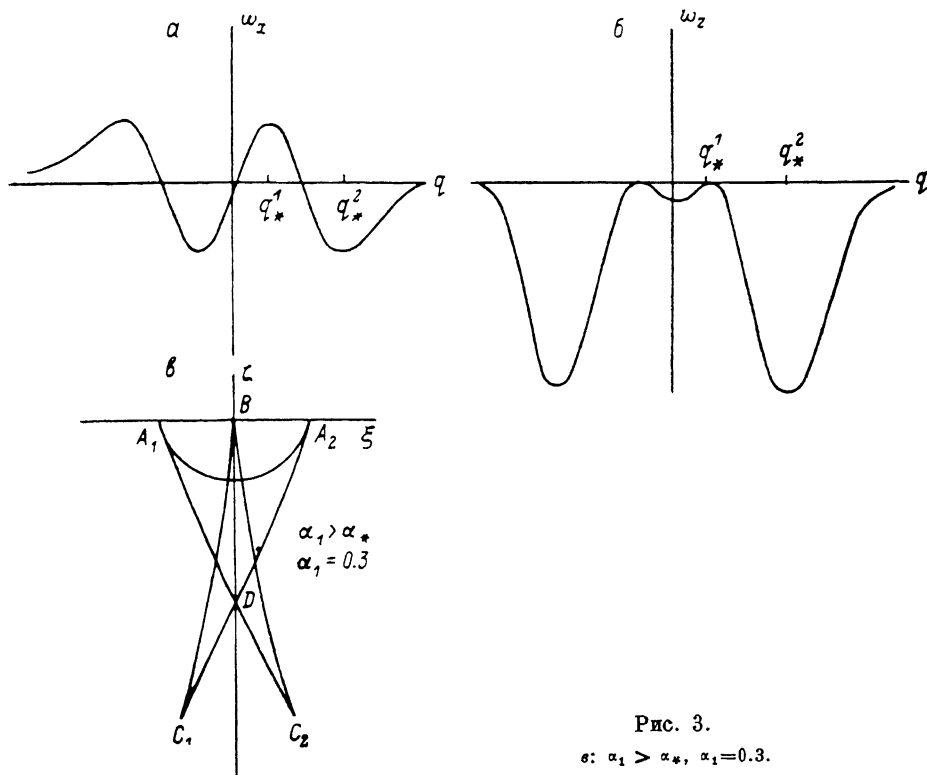


Рис. 3.

в: $\alpha_1 > \alpha_*$, $\alpha_1 = 0.3$.

постоянной (при $\alpha_*^2 < \alpha^2 < 1$), так и знакопеременной (при $\alpha_*^2 > \alpha^2 > 0$), где $\alpha_*^2 = (3/2 - \sqrt{2})$. При $q \rightarrow \infty$ обе компоненты w_x и w_z стремятся к нулю. На рис. 3, а, б представлено изменение компонент характеристической скорости $w_x(q)$ и $w_z(q)$ для $\Phi(q)$, описываемой (10) при $\alpha_1 = 0.3$. На рис. 3, в представлена автомодельная кривая для этого случая

$$\zeta = G(\xi),$$

где $\xi = \frac{x}{\tau}$, $\zeta = \frac{z}{\tau}$.

Эта кривая имеет весьма экзотический вид («шаман-кривая»), причем одному значению ξ могут соответствовать ни одно, два или четыре значения ζ . Таким образом, автомодельные кривые оказываются многозначными. Вид «шаман-кривых» не зависит от конкретного вида $\Phi(q)$, а определяется только наличием максимума у $\Phi(q)$ и стремлением к нулю Φ при $q \rightarrow \infty$.

Неоднозначными являются автомодельные кривые и в том случае, когда $\Phi(q)$ монотонна, а ее производная имеет экстремум

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= 2 - e^{-\alpha^2 q^2}, \\ w_x &= 2\alpha^2 q e^{-\alpha^2 q^2}, \quad w_z = 2 - e^{-\alpha^2 q^2} (1 + 2\alpha^2 q^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Вид автомодельной кривой $\zeta = G(\xi)$ для случая (12) близок к треугольнику и является неоднозначным.

Наконец, если $\Phi(q)$ и $\Phi'(q)$ не имеют экстремумов, то w_x, w_z монотонны, а автомодельная кривая однозначна

$$\begin{aligned}\Phi(q) &= 1 + q^2, \quad w_x = 2q, \quad w_z = 1 - q^2, \\ \zeta &= 1 - \frac{1}{4}\zeta^2.\end{aligned}\quad (13)$$

О проблеме многозначности решений уравнения (1)

Многозначность автомодельного решения уравнения (1) является общим свойством решений уравнения типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0 \quad (14a)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (14b)$$

которое подробно рассмотрено в работах [2, 4]. Уравнение (1) приводится к виду (14) дифференцированием по x

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(q)}{\partial x} = 0, \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad (15a), (15b)$$

где $q \equiv \partial z / \partial x$.

Особенностью решений квазилинейных уравнений типа (14) является существование разрывных решений даже при гладких начальных условиях. Разрывное решение уравнения (14) может быть получено как предел (при $\varepsilon \rightarrow 0$) непрерывного решения уравнения [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (16)$$

Вопрос о выборе устойчивых и явно неустойчивых профилей решается анализом характеристических кривых и начального профиля. При этом разрывное решение уравнения (14) устойчиво, если число характеристик, «приходящих» на разрыв слева и справа равно двум.

Детали эволюции неустойчивых профилей, когда характеристики выходят из точек разрыва для случая функции $\Phi(q)$, представленной на рис. 2, требует специальных исследований. Отметим, что выявленное многообразие эволюции профилей поверхности при бомбардировке моноскоростным пучком ионов заслуживает проведения специальных экспериментов для уточнения математической постановки задачи.

Некоторые типы разрывных автомодельных профилей

Рассмотрим несколько типов однозначных «склеенных» профилей. Предварительно отметим, что эрозия плоского профиля подчиняется автомодельному закону. Действительно, уравнение такого профиля

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 \quad (17a)$$

можно записать в виде

$$\frac{z-b}{\tau} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\tau}, \quad (17b)$$

а это автомодельный закон движения.

а) Непрерывные однозначные профили. Простейшие непрерывные профили приведены на рис. 4 сплошными линиями, где фрагменты автомодельной кривой соединены с прямыми участками без скачка производной. О штриховых линиях будет сказано ниже в разделе в. На рисунке боль-

ше буквы соответствуют местам склеек. Стрелками указаны направления w_x , а точки, где $w_x=0$, обозначены кружками.

В случаях *a*, *b* мы имеем «сток» из внутренних частей профиля на гочки склейки. В то же время из точек A_1A_2 «сток» происходит на прямые участки профиля. Точка склейки C_1C_2 «питается» с двух сторон. В случае, профиля *в* картина иная. Здесь точка склейки *D* является «источником» характеристик,

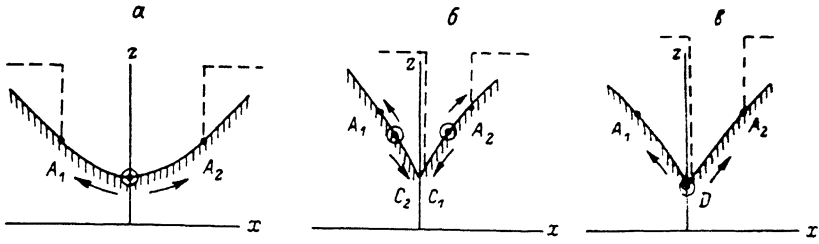


Рис. 4.

и поэтому эволюция участков A_1D и A_2D должна быть чувствительна к физически плохо контролируемым условиям в точке *D*, т. е. профиль 4, *в* должен быть неустойчивым.

б) Непрерывные периодические профили. Можно устроить «склейку» одинаковых фрагментов автомодельной кривой. Примеры такой склейки и эволюция профилей показаны на рис. 5. Здесь индексами *a*, *б*, *в* отмечены периодические аналоги одиночных профилей для некого τ_0 , а их изменение для $\tau \gg \tau_0$ — индексами $a_1, б_1, в_1$.

Видно, что профиль *a* стремится к почти плоскому a_1 . В профиле *б* со временем «съедаются» верхняя и нижняя части, лежащие выше «точки распутия», и вид профиля приближается к «стационарной» пиле. В случае *в* нижняя точка разрыва является «точкой истока». Эта точка в некий момент охватит своим влиянием прилегающие к ней ветви *AD*. Но поскольку условия в самой точке *D* неоднозначны, постольку со временем однозначной будет только окрестность точек *A*.

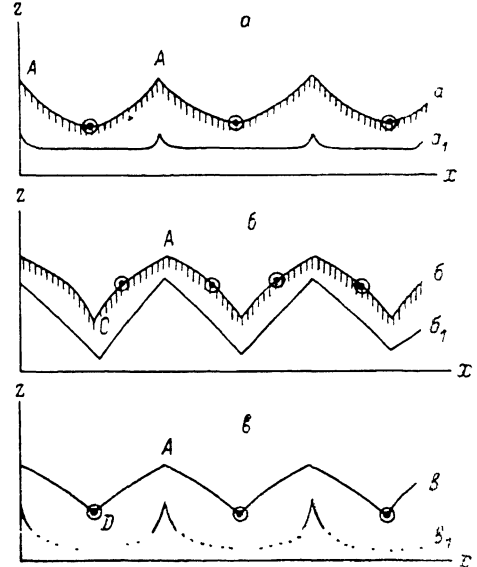


Рис. 5.

в) Разрывные профили. Выше мы описали примеры профилей, построенных на основе автомодельной кривой. Эти профили сами непрерывны, но у них разрывна первая производная (слабый разрыв). Но можно построить профили, состоящие из кусков автомодельной кривой и вертикальных прямых (рис. 4, штриховые линии). Видно, что профили, содержащие сильные разрывы, заведомо неустойчивы, поскольку при небольших изменениях направления падающего потока частиц в одну сторону возникает эффект тени, а в другую — начинает стачиваться «плоскость разрыва».

В заключение мы благодарим К. В. Брушлинского за обсуждение затронутых здесь математических вопросов, а также Н. В. Плешивцева за неизменный интерес и поддержку работы.

Список литературы

- [1] Морозов А. И., Курочкина В. А. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 10. С. 1973—1978.
- [2] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968. 687 с.
- [3] Морозов А. И., Курочкина В. А. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 4. С. 368—374.
- [4] Калашников А. С. // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 27—30.
- [5] Гельфанд И. М. // УМН. 1959. Т. 14. Вып. 2. С. 86—110.

Поступило в Редакцию
17 июня 1988 г.
В окончательной редакции
27 февраля 1989 г.
