1990 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 60, N 5

01; 09; 10

ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ МЕДЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ГАРМОНИКИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Ю. А. Победин

Решена нестационарная задача рассеяния электрона на периодическом по продольной и экспоненциально убывающей по поперечной координате потенциале. Построена теория параметрического квантово-механического резонанса (ПКР) частицы в поле поверхностной гармоники дифракционного излучения. Определены волновая функция и спектр энергии электрона.

Введение

В основе работы нерелятивистских модификаций лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) типа генератор дифракционного излучения (ГДИ) [1], оротрон лежит эффект Смитта—Парселла [2] — излучение электромагнитных колебаний при движении электронов вблизи поверхности дифракционной решетки.

ГДИ — эффективный источник излучения в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых длин волн, как отмечено в работе [3], обнаруживает свойства, аналогичные свойствам вигглера и черенковского ЛСЭ, и представляет собой открытый резонатор, на одном из зеркал которого расположена дифракционная решетка (длина решетки L, ее период d, число периодов $N=L/d \gg 1$).

В приближении заданного поля рассматриваем эффект Смитта—Парселла как результат взаимодействия движущихся вдоль решетки перпендикулярно ее штрихам (ось X) электронов с медленной поверхностной частью собственного дифрагированного поля потока частиц. Пренебрегая краевыми эффектами, полагаем, что область локализации поля в направлении движения частиц равна длине решетки.

Теория эффекта развивается в рамках классической электродинамики, однако в этом приближении задача сложна и малоизучена. В работе [1] феноменологически показано, что ГДИ обладает свойствами квантового генератора, поэтому возникает задача построения квантовой теории ЛСЭ указанного типа. Попытки квантово-механического подхода предпринимались в работах [3-5]. Необходимо отметить, что, несмотря на многообразие модификаций ЛСЭ, есть ряд объединяющих их признаков. Это прежде всего периодичность электромагнитного поля, с которым взаимодействуют электроны, ограниченность области существования этого поля и непериодичность граничных условий в задаче о частице в периодическом потенциале. Совокупность этих условий предполагает возможность существования подбарьерных переходов, где барьером является запрещенная в задаче с циклическими граничными условиями зона энергий (энергетическая щель) (к этому классу задач принадлежит и задача каналирования частиц в кристаллах).

Наличие подбарьерных переходов в исследуемых модификациях ЛСЭ приводит к возможности существования определенного в работе квантово-механического параметрического резонанса, в результате которого происходят распад начального состояния электрона и переход в растущее со временем состояние с меньшей энергией — эффект Смитта—Парселла (генерация электромагнитных колебаний) — либо с большей энергией (поглощение энергии поля).

Целью данной работы является решение ключевой задачи теории указанных ЛСЭ — исследование резонансного энергообмена электрона с двумерным полем медленной поверхностной части дифракционного излучения посредством определения волновых функций и спектра энергии частицы в поле.

Задача решается в одночастичном (для потоков малой плотности) полуклассическом приближении без учета спина электрона.

1. Электроны движутся над решеткой под действием ускоряющего напряжения U в сильном фокусирующем магнитном поле, направленном вдоль оси X. Невозмущенный импульс электрона равен $p_0=\hbar k_0=\sqrt{2meU}$, где $\hbar$ — постоянная Планка; e, m — величины заряда и массы частицы.

Скалярный потенциал поля $\Phi(x, z, t)=0$. Векторный потенциал

$$\mathbf{A}(x, z, t)=\{A(x, z, t), 0, 0\}, \tag{1}$$

где

$$A(x, z, t)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} r_s \exp\left[-k_s\sqrt{1-\beta_s^2}\,z+i(k_s x-\omega t+\eta_s)\right],$$

$$k_s=\frac{\omega}{v_{ph}^s}=\frac{2\pi}{d}s,\quad s\neq 0;$$

v_{ph}^s — фазовая скорость s-й гармоники поля; $\beta_s=v_{ph}^s/c\ll 1$; c — скорость света; $r_s\exp i\eta_s$ — комплексная амплитуда s-й гармоники; $\pi\geqslant\eta_s\geqslant-\pi$; ось Z перпендикулярна плоскости решетки. Из-за быстрого убывания поля с ростом z полагаем $\infty\geqslant z\geqslant 0$.

Комплексная амплитуда поля является медленной функцией времени. Однако для ГДИ выполняется условие «длительности взаимодействия» $\omega\tau\gg 1$, где ω — частота генерации (собственная частота резонатора), $\tau=L/v_0$ — время пролета электроном пространства взаимодействия (области локализации поля), $v_0=p_0/m$. Это условие является также условием адиабатичности взаимодействия. Поэтому полагаем, что за время пролета амплитуда не меняется.

Из теории бесстолкновительной плазмы [6] следует, что эффективный энергообмен электронов с полем происходит при резонансном условии синхронизма с одной из гармоник (для определенности с первой, индекс $s=1$ в дальнейшем опускаем) $|\alpha|=|\Delta v|/v_0\ll 1$, где $\Delta v=v_0-v_{ph}$. Тогда, пренебрегая взаимодействием с несинхронной частью поля и членом $\sim c^{-2}$, уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left[\hat{\mathbf{p}}^2+\frac{er}{c}\left\{\hat{p}_x,\ e^{-k\sqrt{1-\beta^2}\,z}\cos(kx-\omega t+\eta)\right\}\right]\times$$
$$\times\Psi(x, z, t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x, z, t)}{dt}, \tag{2}$$

где $\hat{\mathbf{p}}=\{\hat{p}_x, 0, \hat{p}_z\}$ — оператор импульса электрона, $\hat{p}_x=-i\hbar(\partial/\partial x)$, $\hat{p}_z=-i\hbar(\partial/\partial z)$; $\{\hat{p}_x,\ e^{-k\sqrt{1-\beta^2}z}\cos(kx-wt+\eta)\}$ — антикоммутатор оператора импульса и действительной части поля первой гармоники.

В уравнении (2) переходим к переменным (u, v, t'), где $2u=kx-\omega t+\eta$, $2v=k\sqrt{1-\beta^2}z$, $t'=t$.

Выделяя движение системы координат, ищем волновую функцию электрона в виде

$$\Psi(u, v, t')=\varphi(u, v)\chi(v)\exp i\left(\gamma u-\frac{E}{\hbar}t'\right), \tag{3}$$

где E — искомая энергия электрона,

$$\gamma=\frac{m_*\omega}{2\hbar}=\frac{2k_{ph}}{k}=\frac{4E_{ph}}{\hbar\omega},\quad m_*=\frac{4m}{k^2},$$

$$E_{ph}=\frac{\hbar^2}{2m}k_{ph}^2=\frac{\hbar^2}{2m_*}\gamma^2,\quad p_{ph}=\hbar k_{ph}=mv_{ph}.$$

Для всего используемого в ГДИ диапазона частот и скоростей величина $\gamma\gg 1$.

Полагаем, что функция $\varphi(u, v)$ слабо зависит от переменной v, т. е. полагаем, что производные от $\varphi(u, v)$ по v значительно меньше производных по u (полученные ниже решения обладают этим свойством). Тогда, пренебрегая производными от $\varphi(u, v)$ по v и теми членами с антикоммутатором в уравнении (2), которые не содержат множителем величину γ, разделим переменные u, v, t' в уравнении Шредингера, преобразующиеся при этом в систему уравнений

$$\frac{d^2\varphi_v(u)}{du^2}+(\nu^2-2R_v\cos 2u)\,\varphi_v(u)=0,$$

$$\frac{d^2\chi(v)}{dv^2}+\frac{\nu^2}{1-\beta^2}\chi(v)=0, \tag{4}$$

где функция $\varphi_v(u)\equiv\varphi(u, v)$ зависит от переменной v параметрически

$$\nu^2=\nu_1^2+\nu_2^2,\ \ \nu_1^2=\frac{2m_*}{\hbar^2}(E+E_{ph}),$$

ν_2^2 — неизвестная постоянная разделения переменных (u, v), $R_v=(2er\gamma)/(c\hbar k)\times$ $\times\exp(-2v)$ — постоянная связи электрона с полем.

Величина $R_0=R_v\exp 2v$ отлична от нуля в области локализации поля $\Delta x=$ $=L=v_0\tau=v_{ph}\tau_{ph}$, где $\tau_{ph}=L/v_{ph}$.

Безразмерная длина пространства взаимодействия

$$\Delta u=u_L-u_0=\frac{1}{2}(kL-\omega\tau)=\frac{1}{2}\alpha\omega\tau_{ph},$$

где $u_0=u(0, t_0)$, $u_L=u(L, t_0+\tau)$, ωt_0 — фаза влета электрона, тогда $t_0+\tau>$ $>t>t_0$.

2. Пренебрегая дрейфом электронов поперек магнитного поля, полагаем, что $\nu_2=0$, тогда $\chi(v)=\text{const}$ (полагаем далее, что $\chi(v)=1$), а $\nu^2=\nu_1^2$.

Первое уравнение системы (4) является хорошо изученным уравнением Матье. Его решения слева от точки u_0 и справа от u_L имеют соответственно вид

$$\varphi_v^I(u)=\exp i\nu u+B_v\exp(-i\nu u),\ \ \varphi_v^{III}(u)=D_v\exp i\nu u, \tag{5}$$

где B_v, D_v — зависящие от v коэффициенты.

В области взаимодействия решение уравнения Матье имеет вид [7]

$$\varphi_v^{\nu}(u)=C_1(v)\,\varphi_v^+(u)+C_2(v)\,\varphi_v^-(u), \tag{6}$$

где коэффициенты $C_{1,\,2}(v)$ зависят от v;

$$\varphi_v^{\pm}(u)=\exp(\pm\mu_v u)\,F_v^{\pm}(u),$$

$$F_v^{\pm}(u)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}C_l(\nu,\ R_v)\exp(\pm i(2l+f)u),$$

$\mu_v\equiv\mu(\nu, R_v)$ — определенный с точностью до целого числа f характеристический показатель.

Подставив функцию (6) в (3), получим искомую волновую функцию электрона в области взаимодействия, разложенную по собственным функциям уравнения Матье при $R_v=0$, в виде

$$\Psi_v^{\nu}(u,\ t')=[\tilde\vartheta_1(u,\ v)\exp(\mu_v+i\nu)\,u+\tilde\vartheta_2(u,\ v)\exp(-(\mu_v+i\nu)\,u)]\times$$
$$\times\exp i\left(\gamma u-\frac{E_\nu}{\hbar}t\right), \tag{7}$$

где

$$\tilde\vartheta_{1,\,2}(u,\ v)=C_{1,\,2}(v)\,F_v^{\pm}(u)\exp(\mp i\nu u),\ \ E_\nu\equiv E=(\hbar^2/2m_*)\,\nu^2-E_{ph}.$$

Возвращаясь к переменным (x, t) в формуле (7), получим

$$\Psi_v^{\nu}(x, t)=\vartheta_1(x, v, t;\eta)\exp\left(\frac{1}{2}\Gamma_v\left(\frac{x}{v_{ph}}-t\right)\right)\exp i\left(k_0x-\frac{E_\nu^0}{\hbar}t\right)+$$
$$+\vartheta_2(x,\ v,\ t;\ \eta)\exp\left(-\frac{1}{2}\Gamma_v\left(\frac{x}{v_{ph}}-t\right)\right)\exp i\left(k_1x-\frac{E_\nu^1}{\hbar}t\right), \tag{8}$$

где

$$\vartheta_{1,2}(x, v, t; \eta) = \tilde{\vartheta}_{1,2}(u(x, t; \eta), v) \exp \frac{1}{2} \eta (\mu_v + i(\gamma \pm \nu)),$$

$$E_\nu^0 = \frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m_*} (\gamma + \nu)^2,$$

$$E_\nu^1 = \frac{\hbar^2}{2m} k_1^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma - \nu)^2,$$

$$k_1 = \frac{1}{2} (\gamma - \nu), \ \Gamma_v = \omega \mu_v.$$

В функции (8) полагаем, что $(1/2)\, k(\gamma+\nu)=k_0$, отсюда $\nu=(2\Delta k)/k$, где $\Delta k = k_0 - k_{ph}$. Величина $1/2\, k\nu$ квантуется, т. е. $\nu=(4\pi h)/(kL)=n+q$, где n — целая часть числа ν, $1 > q > -1$, h — целое число.

Из теории уравнения Матье известно, что в зависимости от величин ν и R_v его решения могут быть устойчивы ($\mathrm{Re}\, \mu_v=0$) либо неустойчивы ($\mathrm{Re}\, \mu_v \neq 0$). Неустойчивым решениям уравнения соответствует подбарьерная волновая функция (7), устойчивым — надбарьерная. Устойчивая и неустойчивая зоны непрерывно переходят друг в друга. На границах зон $\mu_v=0$, а решения уравнения Матье имеют вид

$$\varphi_v^t(u) = C_t(v) \, \mathrm{Ce}_n(u, v), \ \ \varphi_v^b(u) = C_b(v) \, \mathrm{Se}_n(u, v),$$

где $C_{t(b)}(v)$ — не зависящие от u коэффициенты (индекс $t\,(b)$ относится к верхней (нижней) границе); $\mathrm{Ce}_n(u, v)$, $\mathrm{Se}_n(u, v)$ — функции Матье [7] (напомним, что v входит в решение уравнения Матье в качестве параметра).

Из уравнения $\mu_v=0$ следует, что на границах величина ν является функцией R_v, ее целая часть $n=\nu\,(R_v=0)$ нумерует зоны, тогда величина q, играющая роль приведенного квазиимпульса, как функция R_v обращается в нуль на границах при обращении в нуль величины R_v.

Волновая функция электрона на краях зоны имеет вид

$$\Psi_v^{t(b)}(u) = \tilde{\vartheta}_{t(b)}(u, v) \exp i \left[(\gamma + \nu_{t(b)}) u - \frac{E_\nu^{t(b)}}{\hbar} t' \right], \tag{9}$$

где
$$\tilde{\vartheta}_{t(b)}(u, v) = C_{t(b)}(v) \, \varphi_v^{t(b)}(u) \exp(\mp i \nu_{t(b)} u),$$

$E_\nu^{t(b)} = (\hbar^2/2m_*)\, \nu_{t(b)}^2 - E_{ph}$, $\nu_{t(b)}$ — значения величины ν, при которых $\mu_v=0$, $\nu_t \geqslant \nu \geqslant \nu_b$.

Из выражения (9) следует, что ширина зоны подбарьерных состояний равна

$$\Delta_v = \frac{\hbar^2}{2m_*} (\nu_t^2 - \nu_b^2).$$

Переходя в функции (8) к переменной $t''=(x/v_{ph})-t$, полагаем, что знак величины μ_v противоположен знаку $\nu\,(\mathrm{sign}\, \mu_v = -\mathrm{sign}\, \nu)$, и полагаем для простоты, что $u_0 \sim 0$. Тогда величина $\Gamma_v \equiv \Gamma(\nu, R_v)$ имеет смысл постоянной распада состояния электрона с импульсом k_0 ($|\, k_0\rangle$), время жизни этого состояния равно Γ_v^{-1}, ширина уровня есть $\hbar\Gamma_v$. Из условия существования квазистационарного состояния $\Gamma_v^{-1} \gg \tau$ или $|\, \mu_v\,|^{-1} \gg \omega\tau$ следует, что $|\, \mu_v\,| \ll 1$ при любых значениях величин R_v, ν. Это налагает ограничения на применимость теории.

Одновременно с распадом состояния $|\, k_0\rangle$ происходит рост состояния электрона с импульсом k_1 ($|\, k_1\rangle$). Инкремент возрастания этого состояния равен по величине Γ_v.

По аналогии с подобным процессом в классической механике определим описанный процесс как квантово-механический параметрический резонанс.

Из вида волновой функции (8) следует, что электрон в поле (1) является двухуровневой системой (кроме краев зоны) с частотой перехода

$$\Delta\omega_\nu = \frac{1}{\hbar} \, |\, E_\nu^0 - E_\nu^1 \,| = |\, \nu \,| \, \omega.$$

Отсюда следует хорошо известный в теории бесстолкновительной плазмы и теории электронных приборов рассматриваемого типа факт, что при $\nu > 0$ $(v_0 > v_{ph})$ происходит излучение энергии, при $\nu < 0$ $(v_0 < v_{ph})$ — поглощение энергии поля.

3. Явный вид зависимости μ_v от ν и R_v найдем для случая слабой связи $(R_v \ll 1)$ из известного соотношения [7]

$$\operatorname{ch} \pi\mu_v = (-1)^{n-f}\left[\cos q\pi + \frac{\pi R_v^2 \sin q\pi}{4\nu(\nu^2-1)}\right]. \tag{10}$$

При малых μ_v величина $(n-f)$ — четное число; правая часть уравнения (10) мало отличается от единицы, поэтому $|q| \ll 1$. Во втором члене правой части выражения (10) имеются два резонансных значения величины ν : $\nu = q$ и $|\nu| = 1+q$.

Легко получить, что при $|\nu| \ll 1$ действительная часть величины μ_v равна нулю, т. е. электроны в этом случае находятся в стационарных состояниях. Нестационарные состояния появляются при резонансном значении $|\nu| \sim 1$. Действительно, разлагая правую и левую части уравнения (10) по степеням малости величин μ_v и q, получим, что

$$\mu_v = \pm \frac{1}{2}\sqrt{R_v^2 - 4q^2}.$$

Отсюда следует, что неустойчивая (подбарьерная) зона появляется при значениях величины q, лежащих в интервале

$$\frac{1}{2} R_0 e^{-2v} > q > -\frac{1}{2} R_0 e^{-2v}.$$

При этом частота спонтанного излучения (поглощения) $\Delta\omega_\nu \sim \omega$. Расстройка частоты перехода относительно собственной частоты ω «холодного» резонатора — «электронное смещение частоты» равна $|q|\,\omega = |\Delta\omega_\nu - \omega| \ll \omega$. Ширина подбарьерной зоны $\Delta_v = (\hbar^2/2m_*) R_0 e^{-2v}$ $(|\nu_{t(b)}| = 1 \pm 1/2\, R_v)$ экспоненциально быстро уменьшается при увеличении v, играющей роль прицельного параметра.

Из полученного условия существования зоны неустойчивости следует, что $(1/2)\ln|R_0/2q| > v$.

Ширина зоны неустойчивости существенно зависит также от номера синхронной гармоники, периода решетки и частоты генерации. Действительно, синхронизируя движение электрона с s-й $(s \neq 1)$ гармоникой поля, т. е. полагая, что $2u_s = k_s x - \omega t + \eta_s$, $2v_s = k_s\sqrt{1-\beta_s^2}\, z$, получим легко анализируемое выражение для постоянной связи

$$R_s(s, d, \omega) = a_1 r_s \frac{\omega d^3}{s^3}\exp(-2v_s) = a_2 r_s \frac{(v_{ph}^s)^3}{\omega^2}\exp(-2v_s),$$

где

$$a_1 = \frac{em}{2\pi^3\hbar^2 c}, \quad a_2 = \frac{4em}{\hbar^2 c},$$

$$2v_s = \frac{2\pi s}{d}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 d^2}{4\pi^2 s^2 c}}\, z = \frac{\omega}{v_{ph}^s}\sqrt{1 - \frac{(v_{ph}^s)^2}{c^2}}\, z.$$

Отсюда, в частности, следует, что область неустойчивости быстро уменьшается с ростом s. Таким образом, подтверждается известный в ГДИ факт, что синхронизация частицы с первой гармоникой поля является наиболее эффективной для энергообмена, а из условия

$$|\mu_s|^{-1} = 2(\mathrm{const}\,\omega^2 d^6 - 4q^2)^{-1/2} \gg 1$$

при $v = \mathrm{const}$ следует также известный факт, что увеличение частоты генерации требует уменьшения периода решетки.

4. Для вычисления коэффициентов $\tilde{\vartheta}_{1,2}$, $\vartheta_{1,2}$ в волновых функциях (7), (8) в приближении слабой связи необходимо вычислить неизвестные коэффициенты

разложения функций $F_v^{\pm}(u)$ в ряд Фурье (6). Способ их получения при известном значении μ_v хорошо изучен [7]. Опуская подробности вычислений, получим, что в нулевом порядке малости по величинам R_v, μ_v, q

$$\varphi_v^{\pm}(u) = \bar{C}_0 \exp(\pm \mu_v u) \cos(u \mp \zeta_v),$$

где $\bar{C}_0 = C_0 \exp i\zeta_v$, $C_0 = \mathrm{const}$, $2\zeta_v = \mathrm{arctg}(\mu_v/q)$, а приближенные значения коэффициентов $C_{1,2}(v)$, B_v, D_v получим из условия непрерывности волновой функции (3), (5) и (8) и их производных в точках u_0 и u_L. В том же порядке малости, что и $\varphi_v^{\pm}(u)$, они имеют вид

$$C_{1,2}(v) = \mp \nu R_v \varkappa_v^{\pm} (2\varkappa_v \bar{C}_0 \,\mathrm{ch}\, \mu_v \Delta u)^{-1} \exp(\pm \mu_v \Delta u),$$

$$B_v = |\nu| \varkappa_v^{in} \varkappa_v^{-1} - 1,$$

$$D_v = i\nu\mu_v (\varkappa_v \,\mathrm{ch}\, \mu_v \Delta u)^{-1} \exp iqu_L,$$

где

$$\varkappa_v = q \,\mathrm{th}\, \mu_v \Delta u + i\mu_v, \quad \varkappa_v^{\pm} = \exp(\pm (i\zeta_v + \mu_v u_0)),$$

$$\varkappa_v^{in} = \left(\varkappa_v + \frac{1}{2} R_v \,\mathrm{th}\, \mu_v \Delta u \cdot \exp(-2iu_0)\right).$$

Коэффициенты выписаны для значений величины $\nu > 0$ $(\mu_v < 0)$ и легко обращаются при изменении ее знака.

Из вида коэффициентов (11) следует, что при увеличении длины пространства взаимодействия Δu коэффициент $C_2(v)$ асимптотически стремится к нулю, а коэффициент $C_1(v) \sim \mathrm{const}\, R_v$. Это означает, что происходят распад состояния $|k_0\rangle$ и переход в ближайшее стационарное состояние на нижней границе зоны с частотой перехода

$$\Delta\omega_\nu^{ath} = \frac{1}{\hbar} | E_\nu^0 - E_\nu^b | \simeq \frac{1}{2} \omega \left(\frac{1}{2} R_v + q\right) \ll \omega,$$

где пренебрегли членом $\sim\gamma^{-1}$.

Срыв генерации на частоте ω и появление низкочастотного излучения на частоте $\Delta\omega_\nu^{ath}$ обусловлены ростом Δu как за счет увеличения длины решетки τ_{ph}, так и с увеличением рассинхронизма α при увеличении ускоряющего напряжения. Дальнейшее увеличение U может привести к безызлучательному переходу, обусловленному увеличением числа ν, при котором электрон переходит в надбарьерную зону.

С помощью полученных волновых функций легко получить значения переменной плотности заряда $\rho_v(u)$ и тока $j_v(u)$ над решеткой. В приближении слабой связи они имеют вид

$$\rho_v(u) = \rho_v^0 + \rho_v^{ch}(u),$$

где

$$\rho_v^0 = \varkappa_v^\rho \mu_v^2,$$

$$\rho_v^{ch}(u) = \frac{1}{2} \varkappa_v^\rho R_v^2 \Big[1 + \frac{2}{R_v} (q \cos 2u + \mu_v \sin 2u \,\mathrm{cth}\, \mu_v (u - u_L))\Big] \mathrm{sh}^2 \mu_v (u - u_L),$$

$$\varkappa_v^\rho = e\nu^2 (|\varkappa_v|^2 \,\mathrm{ch}^2 \mu_v \Delta u)^{-1},$$

$$j_v(u) = v_{ph} \rho_v(u).$$

До сих пор предполагалось, что R_v не зависит от времени. Получение адиабатической зависимости R_v от t требует решения самосогласованной задачи дифракции, что выходит из круга рассматриваемых в этой работе вопросов. Однако построенная выше теория рассеяния электрона позволяет найти необходимые для этого переменные значения плотности заряда $\rho_{int}(u, v)$ и плотности тока $j_{int}(u, v)$, которые возникают в результате интерференции двух падающих потоков (так как $(1/2)\, k(\gamma \pm \nu) > 0$) в области $u < u_0$: «обгоняющего» $(v_0 > v_{ph})$ и «отстающего» $(v_0 < v_{ph})$ от волны.

В приближении слабой связи они равны

$$\rho_{int}(u, v) = \rho^0_{int}(v) + \rho^{eh}_{int}(u, v),$$

где

$$\rho^0_{int}(v) = e[1 + R^2_v (4|\varkappa_v|)^{-1} \operatorname{th}^2 \mu_v \Delta u],$$

$$\rho^{eh}_{int}(u, v) = eR_v |\varkappa_v|^{-1/2} \cos(2\nu u - \zeta^{int}_v) \operatorname{th} \mu_v \Delta u,$$

$$\zeta^{int}_v = \operatorname{arctg} \frac{\mu_v \cos 2u_0 + q \operatorname{th} \mu_v \Delta u \sin 2u_0}{\mu_v \sin 2u_0 - q \operatorname{th} \mu_v \Delta u \cos 2u_0},$$

$$j_{int}(u, v) = v_{ph} \rho_{int}(u, v).$$

С помощью полученных волновых функций вычислим мощность излучения (поглощения) энергии резонансными электронами. Квадраты модулей коэффициентов $\vartheta_{1,2}(x, v, t; \eta) \exp(\pm 1/2\, \Gamma_v (x/v_{ph} - t))$ в волновой функции (8) имеют смысл заселенностей состояний $|k_0\rangle$ и $|k_1\rangle$. Из квантовой электроники хорошо известно, что мощность излучения равна произведению $(1/2)\, \hbar\, |\nu|\, \omega = |\Delta p|\, v_{ph}$, где $\Delta p = p_0 - p_{ph}$, на разность производных по времени от заселенностей состояний. Переходя от вычисления производных по времени к производным по переменной u, получим в приближении слабой связи в низшем порядке малости по R_v, μ_v и q, что зависящая от прицельного параметра мощность $\mathscr{P}_v(u)$ имеет вид

$$\mathscr{P}_v(u) = \operatorname{sign} \nu \frac{\nu^2 |\Delta p|\, |\mu_v|\, \omega v_{ph} R_v}{|\varkappa_v|^2 \operatorname{ch}^2 \mu_v \Delta u} \operatorname{ch} 2\mu_v (u - u_L) \times$$

$$\times \left[\cos 2u - \frac{q}{\mu_v} \sin 2u \operatorname{th} 2|\mu_v|(u - u_L)\right].$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от u_0 до u_L с множителем $\Delta u|^{-1}$, получим, что средняя мощность равна

$$\mathscr{P}_v = \operatorname{sign} \nu \frac{4\nu^2 v_0 R_v E_{ph}}{L |\varkappa_v|^2 \operatorname{ch}^2 \mu_v \Delta u} [(R_v + 2q \cos 2u_0) \operatorname{sh} 2|\mu_v \Delta u| +$$

$$+ 2|\mu_v|(\sin 2u_L - \sin 2u_0 \operatorname{ch} 2\mu_v \Delta u)].$$

Из полученных выражений следует, что измеряемая величина — мощность является классически определенной величиной.

Из полученного выражения для средней мощности следует также в подтверждение сказанному выше, что при $\nu > 0$ происходит генерация электромагнитных колебаний, а при $\nu < 0$ — поглощение взаимодействующего с электроном поля.

5. Напомним, что полученные выражения для мощности справедливы для внутризонных, спонтанных переходов. Для рассматриваемого в данной работе случая эрмитового гамильтониана в уравнении Шредингера электроны, состояния которых лежат на краях подбарьерной зоны (включая случай полного синхронизма $\nu = 0$) и в надбарьерной зоне, в резонансном энергообмене не участвуют.

Из построенной теории эффекта Смитта—Парселла следует, что теория ГДИ является теорией возмущающего действия несинхронной части поля, включая поле быстрых, отрывающихся от решетки гармоник, задержанных в резонаторе, на двухуровневую систему. Таким образом, в ГДИ наряду со спонтанным возможно и вынужденное излучение благодаря переходам между состояниями электронов, лежащих вблизи краев надбарьерной зоны, а частота перехода между которыми близка к резонансной частоте ω.

Полученные выражения для мощности зависят вместе с постоянной связи R_v и функциями от нее от s, d, ω и являются также медленной функцией времени. Анализ зависимости мощности от этих величин является задачей оптимизации ЛСЭ типа ГДИ и требует отдельного рассмотрения. Отметим полученный и хорошо известный на практике результат, что с увеличением прицельного параметра электрона величина энергообмена уменьшается.

Кроме того, построенная теория квантово-механического параметрического резонанса электрона в поле медленной поверхностной гармоники дифракционного излучения с ограниченной областью распространения — теория эффекта

Смитта—Парселла может служить основой для изучения процессов генерации в электронных приборах с длительным взаимодействием, таких как ЛОВ, ЛБВ и других родственных им приборах.

В заключение отметим, что из сравнения энергообмена электрона с дифрагированным полем и энергообменом в бесстолкновительной плазме следует, что в основе механизма затухания и обращенного затухания Ландау лежит квантово-механический параметрический резонанс, где, однако, время τ является величиной, обратной частоте столкновений. Таким образом, эффект Смитта—Парселла является модельным аналогом обращенного затухания Ландау.

Список литературы

[1] *Шестопалов В. П.* // ДАН СССР. 1981. Т. 261. № 5. С. 1116—1118.
[2] *Smith S. L., Purcell E. T.* // Phys. Rev. 1953. Vol. 91. P. 1069—1073.
[3] *Šoln G., Leavitt R. P.* // J. Appl. Phys. 1984. Vol. 56 (1). P. 29—35.
[4] *Победин Ю. А., Яценко А. А.* // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 15. С. 904—908.
[5] *Glass S. G., Mendlovitz H.* // Phys. Rev. 1970. Vol. 171. N 1. P. 57—61.
[6] *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
[7] *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложение функций Матье. М.: ИЛ, 1963. 476 с.

Харьковский институт механизации
и электрификации сельского хозяйства

Поступило в Редакцию
7 сентября 1988 г.
В окончательной редакции
29 декабря 1989 г.