01; 03

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ЯДРА

А. Э. Лазарянц, А. И. Григорьев

Рассчитываются критические условия появления неустойчивости Рэлея в заряженной пленке жидкости на поверхности твердого сферического ядра в зависимости от величины заряда, толщины пленки и вязкости жидкости. Получено дисперсионное соотношение для капиллярных волн в заряженном слое маловязкой жидкости на поверхности твердого ядра, являющееся обобщением известного дисперсионного соотношения для капиллярных волн в заряженной капле. Найдено выражение для декремента затухания капиллярных волн в зависимости от величины заряда и толщины слоя жидкости.

Введение

Электрический разряд с поверхности тающих градин в грозовом облаке, сопровождающийся эмиссией значительного количества заряженных микрокапель и ионов [1], играет важную роль как в процессах микроразделения зарядов, так и в процессе возникновения молнии, которая, согласно существующим представлениям, зарождается из мощной электронной лавины (переходящей в стример) при коронировании с группы близко расположенных капель или тающих градин [2–4]. Помимо геофизических приложений это явление используется в жидкостной масс-спектрометрии [5, 6] и жидкометаллических источниках ионов [7, 8]. Так, в некоторых типах жидкостных масс-спектрсметров для получения ионов труднолетучих органических веществ используется явление электродиспергирования водных растворов таких веществ с мениска на вершине металлического капилляра, по которому осуществляется подача раствора, в вакуумных низкотемпературных ($\approx$100 К) условиях. При этом вследствие низкой температуры раствор на срезе капилляра замерзает и электрогидродинамическая эмиссия микрокапелек идет из пленки жидкости на поверхности ледяного ядра [5, 6, 9]. Существование же пленки жидкости обеспечивается джоулевым нагревом при протекании по пленке электрического тока. С качественно такой же ситуацией — эмиссией с поверхности тонкой пленки жидкости встречаемся и в жидкометаллических источниках ионов [7, 8]. В связи со сказанным определение критических условий возникновения электрического разряда с обводненной градины, зажигающегося, согласно [9], на нелинейной стадии развития неустойчивости Тонкса—Френеля (НТФ), представляется достаточно актуальным. Тем не менее этот вопрос исследован весьма слабо как экспериментально, так и теоретически. Авторам известны лишь несколько экспериментальных работ [2–4, 10, 11], в которых исследуется электрический разряд и эмиссия заряженных капелек с обводненных градин и тающих льдинок. Но и эти работы не свободны от недостатков, ограничивающих область применимости полученных в них данных. Так, в хорошей работе [2] из-за особенностей экспериментальной установки исследован весьма узкий диапазон размеров градин и не совсем четко выделено влияние аэродинамических сил, игравших при определении напряженности электрического поля, критической для зажигания электрического разряда в условиях проводимого эксперимента, определяющую роль. Работа [11] посвящена чисто качественному исследованию особенностей зажигания электрического разряда с тающей льдинки. Так, в [11] отмечено, что электрический разряд с сухого ледяного электрода не зажигается вплоть до пробойных напряжений между электродами. Если же ледяной электрод был влажным (подтаивал вследствие теплообмена со средой), то картина разряда была следующей. В некоторой точке на боковой поверхности льдинки, в пленке воды, появлялся жидкий выступ (имеющий типичную форму двумерного солитона в тонком слое жидкости), высота которого была много больше толщины пленки, двигающийся в направлении градиента электрического поля до тех пор, пока не достигал положения максимума напряженности поля на ледяном электроде. Тогда выступ останавливался, на его вершине зажигалось диффузное свечение и начиналась эмиссия микрокапелек, характерный объем эмиттирующего выступа был ~ 1 мм^3 (при радиусе электрода ≈ 0.5 см), вся жидкость в нем расходовалась в разряде за время $\leqslant 3$ с. После этого разряд прекращался и через время ~ 10 с все повторялось с начала. Никаких измерений прикладываемых напряжений и текущих при разряде токов в [11] не проводилось.

Что касается теоретических работ, то, по-видимому, их количество весьма незначительно. Так, в [12] предпринята попытка найти критическую напряженность электрического поля зажигания разряда свободно падающей обводненной градины численным методом с учетом аэродинамического взаимодействия со средой. Но ввиду грубости использованной физической модели основным результатом работы [12] следует считать просто постановку проблемы. В [9] для неподвижной относительно среды заряженной градины аналитическим путем с использованием модового подхода Рэлея [13] находились критические условия проявления в жидком слое НТФ или, что то же самое, неустойчивости в электрическом поле капиллярных волн, существующих в жидкости уже в силу теплового движения молекул. Все рассмотрение проводилось для толстых слоев жидкости, для которых влияние на устойчивость расклинивающего давления можно не учитывать. Но при записи выражения для давления электрического поля на поверхность жидкости в [9] была допущена ошибка, что в итоге привело к искажению найденной зависимости критических условий проявления НТФ от толщины жидкого слоя. Реальные критические условия НТФ в приближении идеальной несжимаемой жидкости для толстых пленок ($h > 100$ нм) (как это принималось в [9]) не должны зависеть от толщины пленки. Как будет показано ниже, такая зависимость для толстых пленок появится лишь при учете вязкости жидкости.

1. Пусть твердое сферическое ядро радиуса R_0 окружено сферически симметрично расположенным шаровым слоем жидкости внешнего радиуса R. Будем считать жидкость несжимаемой и маловязкой, характеризуемой коэффициентом динамической вязкости μ, плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ. Будем также считать, что жидкость идеально проводящая и на ее поверхности находится заряд Q. Поля скоростей капиллярного волнового движения и давлений обозначим соответственно $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ и $P(\mathbf{r})$. Искажения свободной поверхности жидкости $\xi(\theta, t)$, возникающие из-за волнового движения вместе с величинами $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ и $P(\mathbf{r})$, будем считать малыми.

Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре ядра. Без ограничения общности задачи можно рассмотреть только случай осесимметричных волн. Тогда уравнение свободной поверхности будет иметь вид

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t).$$

Краевая задача для нахождения $\mathbf{V}$, P, ξ может быть составлена из линеаризованного уравнения Навье—Стокса, уравнения неразрывности и граничных условий к ним

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mu}{\rho}\Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \mathbf{V} = 0,$$

$$r = R_0\colon\ V_r = 0;\ \ V_\theta = 0,$$

$$r = R\colon\ \frac{\partial \xi}{\partial t} \approx V_r,$$

$$P_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}V_\theta=0,$$

$$P_{rr}=P-2\mu\frac{\partial V_r}{\partial r}=P_\sigma-P_E. \tag{1}$$

Последние три граничных условия отнесены к невозмущенной свободной поверхности, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [14]. В (1) P_{rr} и $P_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений в жидкости. P_σ — лапласовское давление под искаженной волновым движением сферической поверхностью [14]

$$P_\sigma=-\frac{\sigma}{R^2}[2+\Lambda]\xi, \tag{2}$$

где Λ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах, P_E — давление электрических сил (см. Приложение)

$$P_E=-\frac{1}{2\pi}\frac{Q^2}{R^5}\xi+\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{R^5}\sum_n(n+1)\mathscr{P}_n\int_0^\pi\xi\mathscr{P}_n\sin\theta d\theta, \tag{3}$$

$\mathscr{P}_n$ — нормированные на единицу полиномы Лежандра.

Будем искать решение краевой задачи в виде рядов по бесконечному набору капиллярных волн, существующих в системе. Это, в частности, означает, что зависимость от времени скоростей $\mathbf{V}$, давлений P и возмущения ξ должна иметь экспоненциальный вид $\mathbf{V}$, P, $\xi\sim\exp(-\varkappa t)$, где $\varkappa$ — комплексная частота. Вводя характерные масштабы измерения длины, времени, скорости и давления

$$r_*=R,\quad t_*=R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2},$$
$$V_*=R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2},\quad P_*=R^{-1}\sigma, \tag{4}$$

перепишем (1)—(3) в безразмерном виде

$$\varepsilon^2\Delta\mathbf{U}+\lambda\mathbf{U}=\nabla p, \tag{5}$$

$$\nabla\mathbf{U}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial\theta}+\frac{\partial U_\theta}{\partial r}-U_\theta=0, \tag{7}$$

$$p-2\varepsilon^2\frac{\partial U_r}{\partial r}-(2+\Lambda)\xi-W\left[2\xi-\Sigma(n+1)\mathscr{P}_n\int_0^\pi\xi\mathscr{P}_n\sin\theta d\theta\right]=0. \tag{8}$$

$$-\lambda\xi=U_r, \tag{9}$$

$$U_r=0,\quad U_\theta=0, \tag{10}$$

где

$$\lambda=\varkappa\sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}},\quad \nu=\frac{R_0}{R},\quad r=\frac{r}{R},$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3},\quad \varepsilon^2=\frac{\mu}{\sqrt{\rho\sigma R}}. \tag{11}$$

Параметр ε^2 будем считать малым. Условие $\varepsilon^2\ll 1$ выполняется в большинстве практически интересных случаев, в частности для воды при всех $R\geqslant 1$ мкм.

Пользуясь кинематическим граничным условием (9), легко исключить ξ из динамического граничного условия (8).

Далее на основе теоремы Гельмгольца о разложении произвольного векторного поля на сумму потенциального и соленоидального [14]

$$\mathbf{U}=\nabla\Phi+\mathbf{w},\quad \nabla\mathbf{w}=0,$$

можно получить связь потенциала скоростей Φ с давлением p

$$p=\lambda\Phi,$$

которая позволяет исключить из динамического граничного условия (18) и давление. В итоге (5)—(10) перепишется в виде

$$\Delta\Phi = 0, \quad \mathbf{U} = \nabla\Phi + \mathbf{w},$$
$$\Delta\mathbf{w} + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}\mathbf{w} = 0, \tag{12}$$

$$r = \nu: \quad U_r = 0, \quad U_\theta = 0, \tag{13}$$
$$r = 1: \quad \frac{\partial U_r}{\partial\theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - U_\theta = 0, \tag{14}$$

$$\lambda^2\Phi - 2\lambda\varepsilon^2\frac{\partial U_r}{\partial r} - (2 + \Lambda)U_r + W\left[2U_r - \sum_{l=r}^{\infty}(l+1)\mathscr{P}_l\int_0^\pi U_r\mathscr{P}_l\sin\theta d\theta\right] = 0. \tag{15}$$

Решение для Φ находится легко [9, 14]

$$\Phi_l = [r^l + c_l r^{-(l+1)}]\mathscr{P}_l. \tag{16}$$

Константы перед r^l для каждого l взяты равными единице, так как их значение определяется начальными условиями. Соленоидальное векторное поле $\mathbf{w}$ полоидально и, следовательно, может быть представлено в виде

$$w_r = \frac{l(l+1)}{r^2}v(r)\mathscr{P}_l, \quad w_\theta = \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\frac{\partial\mathscr{P}_l}{\partial\theta}, \quad w_\varphi = 0. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (12), получим уравнение для $v(r)$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \left[\frac{\lambda}{\varepsilon^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]v = 0. \tag{18}$$

При $\varepsilon^2 \ll 1-\nu$ для решения уравнения (18) можно применить метод пограничного слоя, так как в силу физического смысла решение задачи $v(r)$ существенно отлично от нуля только в узких (ширины порядка ε^2) окрестностях твердой стенки $r=\nu$ и свободной поверхности $r=1$. Чтобы построить решение вблизи ядра, сделаем замену переменной $r=\nu+\varepsilon x$, $x=(r-\nu)/\varepsilon$. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left[\lambda - \frac{\varepsilon^2 l(l+1)}{(\nu+\varepsilon x)^2}\right]v = 0.$$

Его решение в виде разложения по ε выписывается легко

$$v = a_1[e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + o(\varepsilon^2)], \quad \operatorname{Re}\sqrt{-\lambda} < 0. \tag{19}$$

Коэффициенты c_l и a_1 в (16) и (19) находятся из граничного условия (13) и с точностью до членов порядка ε^2 включительно определяются выражениями

$$a_1(\varepsilon) = -\frac{2l+1}{l+1}\nu^l\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{-\lambda}} + \frac{\varepsilon^2 l}{\nu l}\right) + o(\varepsilon^3),$$

$$c(\varepsilon) - \frac{l}{l+1}\nu^{2l+1}\left(1 - \varepsilon\frac{2l+1}{\nu\sqrt{-\lambda}} - \varepsilon^2\frac{l(2l+1)}{\nu^2\lambda} + o(\varepsilon^3)\right).$$

Чтобы построить решение (18) вблизи свободной поверхности, сделаем замену переменной $r = 1 - \varepsilon y$, $y = (1-r)/\varepsilon$. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left[\lambda - \frac{\varepsilon^2 l(l+1)}{(1-\varepsilon y)^2}\right]v = 0.$$

Его решение

$$v = a_2[e^{\sqrt{-\lambda}\,y} + o(\varepsilon^2)].$$

Коэффициент a_2 находится из граничного условия (14) и с точностью до членов порядка ε^2 включительно определяется как

$$a_2(\varepsilon)=\frac{2\varepsilon^2}{\lambda}\left[l-1-\frac{l(l+2)}{l+1}\nu^{2l+1}\right]+o(\varepsilon^3).$$

Дисперсионное уравнение задачи получается при подстановке в (15) найденных выше величин. Тогда с учетом ортогональности сферических функций, приравнивая нулю коэффициенты при каждой сферической функции, получим с точностью до членов порядка ε^2

$$\lambda^2k_l^{-2}+\omega_l^2d_l^{-2}+\varepsilon\frac{2l+1}{\sqrt{-\lambda}}\nu^{2l}\left(\omega_l^2-\frac{l}{l+1}\lambda^2\right)+\frac{\varepsilon^2}{\lambda}\omega_l^2a_l-\varepsilon^2\lambda\chi_l^2=o(\varepsilon^3), \tag{20}$$

где

$$\omega_l^2=l(l-1)(l+2)-Wl(l-1),$$
$$k_l^{-2}=1+\frac{l}{l+1}\nu^{2l+1},$$
$$d_l^{-2}=1-\nu^{2l+1},$$
$$\chi_l^2=l\left[\frac{l(2l+1)}{l+1}\nu^{2l+1}+2(l-1)+2(l-2)\nu^{2l+1}\right],$$
$$a_l=l(2l+1)\nu^{2l-1}+2[l^2-1-l(l+2)\nu^{2l+1}].$$

Решение дисперсионного уравнения (20) будем искать в виде ряда

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+o(\varepsilon^3). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), несложно получить

$$[\lambda_0^2k_l^{-2}+\omega_l^2d_l^{-2}]+\varepsilon\left[2\lambda_0\lambda_1k_l^{-2}+(2l+1)\nu^{2l}\left(\omega_l^2-\frac{l}{l+1}\lambda_0^2\right)\frac{1}{\sqrt{-\lambda_0}}\right]+$$
$$+\varepsilon^2\left[(\lambda_1^2+2\lambda_0\lambda_2)k_l^{-2}-\frac{1}{2}(2l+1)\nu^{2l}\left(\omega_l^2-\frac{l}{l+1}\lambda_0^2\right)\frac{\lambda_1}{\sqrt{-\lambda_0}\,\lambda_0}-\right.$$
$$\left.-(2l+1)\nu^{2l}\frac{l}{l+1}\frac{2\lambda_0\lambda_1}{\sqrt{-\lambda_0}}+\frac{1}{\lambda_0}\omega_l^2a_l-\lambda_0\chi_l^2\right]=o(\varepsilon^3).$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ε, найдем при ε^0

$$\lambda_0^2k_l^{-2}+\omega_l^2d_l^{-2}=0,$$
$$\lambda_0^2=-\omega_l^2\frac{k_l^2}{d_l^2},\qquad \lambda_0=\pm i\omega_lk_ld_l^{-1};$$

при ε^1

$$2\lambda_0\lambda_1k_l^{-2}+(2l+1)\nu^{2l}\left(\omega_l^2-\frac{l}{l+1}\lambda_0^2\right)\frac{1}{\sqrt{-\lambda_0}}=0.$$

Отсюда, вводя обозначение

$$M_l=(2l+1)^2(l+1)^{-1}2^{-1}\nu^{2l}k_l^2d_l^2$$

и учитывая, что $\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}<0$, легко получить

$$\lambda_1=\frac{1\mp i}{\sqrt{2}}\omega_l^{1/2}k_l^{1/2}d_l^{-1/2}M_l.$$

Далее приравняем нулю коэффициент при ε^2

$$(\lambda_1^2+2\lambda_0\lambda_2)k_l^{-2}-(2l+1)\nu^{2l}2^{-1}\left(\omega_l^2-\frac{l}{l+1}\lambda_0^2\right)\frac{\lambda_1}{\sqrt{-\lambda_0}\,\lambda_0}-$$
$$-(2l+1)\nu^{2l}\frac{l}{l+1}\frac{2\lambda_0\lambda_1}{\sqrt{-\lambda_0}}+\frac{1}{\lambda_0}\omega_l^2a_l-\lambda_0\chi_l^2=0.$$

Отсюда

$$\lambda_2=M_l^2+\frac{1}{2}d_l^2a_l+\frac{1}{2}k_l^2\chi_l^2-\frac{l(2l+1)}{l+1}\nu^{2l}k_l^2M_l.$$

В итоге спектр частот капиллярных колебаний шарового слоя маловязкой жидкости имеет вид

$$\tilde{\Omega}_l = \Omega_l - \frac{1}{2} M_l \Omega_l^{1/2} \cdot \varepsilon,$$

где Ω_l — частота колебаний шарового слоя жидкости в отсутствие вязкости

$$\Omega_l = \omega_l k_l d_l^{-1}.$$

Декремент затухания капиллярных волн запишется в виде

$$\gamma_l = \frac{1}{\sqrt{2}} M_l \Omega_l^{1/2} \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2$$

или

$$\gamma_l = \gamma_l^{(1)} + \gamma_l^{(2)},$$

где за $\gamma_l^{(1)}$ обозначены члены, обращающиеся в нуль при $R_0 \to 0$,

$$\gamma_l^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} M_l \Omega_l^{1/2} \varepsilon + M_l^2 \varepsilon^2 - \frac{l(2l+1)}{l+1} \nu^{2l} k_l^2 M_l \varepsilon^2,$$

$$\gamma_l^{(2)} = \frac{1}{2} (d_l^2 a_l + k_l^2 \chi_l^2) \varepsilon^2.$$

Несложно видеть, что начиная с некоторого значения параметра $W = W_{кр}$ собственное значение λ становится отрицательным, колебания нарастают и происходит распад шарового слоя, т. е. имеет место неустойчивость Рэлея [10]. Неустойчивость проявляется сначала у наименьшей возможной моды колебаний $l=2$. Значение критического заряда можно найти из условия

$$\lambda|_{l=r} = 0,$$

откуда

$$W_{кр} = 4 + C(\nu) \cdot \varepsilon^4,$$

где $C(\nu)$ — положительное число для каждого ν, имеющее в общем случае громоздкое выражение. Для частного случая $R_0 = 0$

$$\tilde{\Omega}_l = \Omega_l = \omega_l,$$
$$\gamma_l = \gamma_l^{(2)} = (l-1)(2l+1)\varepsilon^2,$$
$$W_{кр} = 4 + \frac{25}{2}\varepsilon^4,$$

что согласуется с данными [11].

Возвращаясь к размерным величинам, с учетом (4), (11) получаем окончательные выражения для спектра частот и декремента затухания сферического слоя маловязкой жидкости на поверхности твердого ядра

$$\tilde{\Omega}_l = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3}} \sqrt{\frac{1-\nu^{2l+1}}{1+\frac{l}{l+1}\nu^{2l+1}}} \sqrt{l(l-1)\left(l+2-\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}\right)} -$$
$$- \sqrt[4]{\frac{\sigma\mu^2}{\rho^3 R^7}} \frac{(2l+1)^2 \nu^{2l}}{2\sqrt{2}(l+1)} \sqrt[4]{\frac{l(l-1)\left(l+2-\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}\right)}{(1-\nu^{2l+1})^3 \left(1+\frac{l}{l+1}\nu^{2l+1}\right)^5}},$$

$$\gamma_l = \sqrt[4]{\frac{\sigma\mu^2}{\rho R^7}} \frac{(2l+1)^2 \nu^{2l}}{2\sqrt{2}(l+1)} \sqrt[4]{\frac{l(l-1)\left(l+2-\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}\right)}{(1-\nu^{2l+1})^3 \left(1+\frac{l}{l+1}\nu^{2l+1}\right)^5}} +$$
$$+ \frac{\mu}{\rho R^2} \left\{ \frac{(2l+1)\left[2(l-1)(l+1) + l(2l+1)\nu^{2l-1} - 2l(l+2)\nu^{4l+2}\right]}{2(l+1)(1-\nu^{2l+1})\left(1+\frac{l}{l+1}\nu^{2l+1}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(2l+1)^3 \nu^{4l}(1+2l\nu^{2l+1})}{4(l+1)^2(1-\nu^{2l+1})^2\left(1+\frac{l}{l+1}\nu^{2l+1}\right)^2} \right\}.$$

Расчет давления электрического поля на поверхность жидкости, близкую к сферической

Пусть поверхность жидкости в сферических координатах задана уравнением $r=R+\xi$, $\xi \ll R$. Давление электрического поля E на поверхность проводящей жидкости имеет вид

$$P_E=\frac{E^2}{8\pi}\Big|_{R+\xi},$$

$\tilde{\Pi}$ — потенциал электрического поля, который можно представить в виде

$$\tilde{\Pi}=\Pi_0+\Pi, \quad \Pi \ll \Pi_0,$$

где Π — малая добавка к Π_0, вызванная возмущением сферической поверхности

$$P_E=\frac{(\nabla\Pi_0+\nabla\Pi)^2}{8\pi}\Big|_{R+\xi}.$$

Найдем давление P_E с точностью до членов линейных по ξ и Π

$$P_E \approx \frac{(\nabla\Pi_0)^2}{8\pi}\Big|_{R+\xi}+\frac{2\nabla\Pi_0\cdot\nabla\Pi}{8\pi}\Big|_{R+\xi}=\frac{(\nabla\Pi_0)^2}{8\pi}\Big|_R+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial(\nabla\Pi_0)^2}{\partial r}\Big|_R\cdot\xi+\frac{1}{4\pi}\nabla\Pi_0|_R\cdot\nabla\Pi|_R.$$

Пользуясь тем, что электрическое поле на поверхности проводника перпендикулярно его поверхности, найдем

$$P_E=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial r}\Big|_R\right)^2+\frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\right)^2\right]_R\xi+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\Big|_R\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial r}\Big|_R. \quad (\Pi.1)$$

Малую добавку Π к потенциалу определим из условий

$$\Delta\tilde{\Pi}=0,$$
$$\Pi\to 0 \quad \text{при } r\to\infty,$$
$$\tilde{\Pi}=\text{const} \quad \text{при} \quad r=R+\xi,$$

откуда несложно получить

$$\Delta\Pi=0, \quad (\Pi.2)$$
$$\Pi\to 0 \quad \text{при} \quad r\to\infty, \quad (\Pi.3)$$
$$\Pi_0|_{R+\xi}+\Pi|_{R+\xi}=\text{const}. \quad (\Pi.4)$$

Из (П.4) найдем

$$\Pi_0|_R+\xi\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\Big|_R+\Pi|_R=\text{const}.$$

Полагая

$$\Pi_0|_R=\text{const},$$

получим

$$\Pi|_R=-\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\Big|_R\cdot\xi. \quad (\Pi.5)$$

Итак, в линейном по ξ и Π приближении давление электрического поля на поверхность проводящей жидкости определяется формулой (П.1), в которой Π находится из условий (П.2), (П.3), (П.5). В частном случае заряженной поверхности в отсутствие внешнего поля

$$\Pi_0=\frac{Q}{r},$$

тогда

$$P_E=\frac{1}{8\pi}\frac{Q^2}{R^4}-\frac{1}{2\pi}\frac{Q^2}{R^4}\frac{\xi}{R}+\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{R^4}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(l+1)Y_l^m\int\frac{\xi}{R}Y_l^m d\Omega.$$

Список литературы

[1] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 2. С. 5—13.
[2] *Дячук В. А., Мучник В. А.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60—63.
[3] *Griffiths R. F., Latham J.* // Quart. J. R. Met. Soc. 1974. Vol. 100. P. 163—180.
[4] *Griffiths R. F., Latham J., Reed R. L.* // J. Meteorol. Soc. Jap. 1976. Vol. 54. N 2. P. 123—125.
[5] *Золотой Н. Б., Карпов Г. В., Скурат В. Е.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315—323.
[6] *Alexandrov M. L., Gall L. N., Krasnov N. V.* et al. // Int. J. Mass Spectr. Ion Process. 1983. Vol. 54. P. 231—235.
[7] *Дудников В. Г., Шабалин А. Л.* Препринт ИЯФСОАН СССР. Новосибирск, 1987. № 87-63.66. 1987 с.
[8] *Григорьев А. И., Ширяева С. О., Земсков А. А.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 18. С. 1637—1640.
[9] *Григорьев А. И.* // Метеорология и гидрология. 1987. № 1. С. 69—76.
[10] *Kamra A. K., Ahire D. V.* // J. Climate Appl. Met. 1984. Vol. 23. N 5. P. 845—847.
[11] *Григорьев А. И.* // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. Вып. 16. С. 1004—1009.
[12] *Гвиришвили Т. Г., Маградзе Г. Д.* // Тез. докл. II Всесоюз. симпозиума по атмосферному электричеству. Тарту, 1986. С. 145.
[13] *Rayleigh.* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184—186.
[14] *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1944. 588 с.