01

УСТАНОВИВШИЙСЯ КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

Я. С. Уфлянд

Показано, что точное решение стационарной задачи конвективной теплопроводности в плоском канале при куэттовском течении представляется рядами по цилиндрическим функциям. Получены формулы для критериев Нуссельта и вычислены их предельные значения при различных граничных условиях на стенках канала.

1. Граничные условия первого рода

Если установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости происходит в бесконечном слое ($0 < x < b$; $|y|$, $|z| < \infty$), одна стенка ($x=0$) которого неподвижна, а другая движется с постоянной скоростью v, то поле скоростей имеет вид [1]

$$v_z = v\frac{x}{b}. \tag{1.1}$$

Предположим, что заданная температура неподвижной стенки зависит только от координаты z, в то время как температура подвижной стенки постоянна и принимается за нуль. Если пренебречь осевой растечкой тепла [2], то задача установившегося теплообмена заключается в нахождении температуры $T(x, z)$ из уравнения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{vx}{ab}\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{1.2}$$

(a — коэффициент температуропроводности), при граничных условиях

$$T(0, z) = f(z), \; T(b, z) = 0. \tag{1.3}$$

Будем искать решение задачи в виде интеграла Фурье по осевой координате, т. е. положим

$$T(x, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda)\exp(i\lambda z)\,d\lambda. \tag{1.4}$$

Тогда из (1.2) для искомой функции $\varphi(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{i\lambda v}{ab}x\varphi = 0. \tag{1.5}$$

Подстановки

$$x = wy, \; w = \frac{iab}{\lambda v}, \; \psi(y) = \varphi(x) \tag{1.6}$$

приводят к уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + w^2 y\psi = 0, \tag{1.7}$$

общий интеграл которого выражается через цилиндрические функции [3]

$$\psi=\sqrt{y}\left[A J_{1/3}\left(\frac{2}{3} w y^{3/2}\right)+B J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} w y^{3/2}\right)\right]. \tag{1.8}$$

Чтобы удовлетворить однородному граничному условию (1.3), полагаем

$$\psi=\sqrt{y}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} w y_b^{3/2}\right) J_{1/3}\left(\frac{2}{3} w y^{3/2}\right)-\right.$$
$$\left.-J_{1/3}\left(\frac{2}{3} w y_b^{3/2}\right) J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} w y^{3/2}\right)\right], \quad y_b=y\left.\right|_{x=b}=\frac{b}{w}, \tag{1.9}$$

после чего решение (1.4) можно записать в следующем виде:

$$T=\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) \frac{\varphi(x, \lambda)}{\varphi(0, \lambda)} \exp (i \lambda z)\, d \lambda. \tag{1.10}$$

Теперь из оставшегося граничного условия (1. 3) при $x=0$ по формуле обращения Фурье сразу находим

$$C(\lambda)=\frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp (-i \lambda z)\, d z, \tag{1.11}$$

на чем и заканчивается процесс нахождения формального решения поставленной задачи.

Обращаясь к построению функции Грина, положим

$$f(z)=\delta\left(z-z_0\right), \tag{1.12}$$

где $\delta(y)$ — дельта функция Дирака.

Тогда решение (1. 10), (1. 11) принимает вид однократной квадратуры

$$G\left(x, z, z_0\right)=\frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda)}{\varphi(0, \lambda)} \exp \left[i \lambda\left(z-z_0\right)\right] d \lambda, \tag{1.13}$$

которую, как нетрудно проверить, можно вычислять с помощью теоремы о вычетах, замыкая вещественную ось комплексной переменной λ полукругом радиуса $R \rightarrow \infty$ (вверх при $z>z_0$ и вниз при $z<z_0$).

Составляя асимптотическое выражение при $y \rightarrow 0$

$$\psi(y, \lambda)=A_0(\lambda)+y A_1(\lambda)+O\left(y^3\right), \tag{1.14}$$

где положено ($\Gamma(z)$ — гамма-функция)

$$A_0=-\frac{J_{1/3}\left(\frac{2}{3} w y_b^{3/2}\right)}{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad A_1=\frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/3} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} w y_b^{3/2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}, \tag{1.15}$$

видим, что особыми точками подынтегральной функции в (1. 13) являются простые полюса λ_n — корни уравнения $A_0(\lambda)=0$, т. е. уравнения

$$J_{1/3}\left(\frac{2}{3} w y_b^{3/2}\right)=0. \tag{1.16}$$

С учетом (1. 6) и (1. 9) величины λ_n могут быть вычислены по формуле

$$\lambda_n=\frac{9 \gamma_n^2}{8 b\, \mathrm{Pe}}\, i, \tag{1.17}$$

где γ_n — корни уравнения

$$J_{1/3}(\gamma)=0 ; \quad n=1,2, \ldots, \tag{1.18}$$

и введено обозначение для критерия Пекле

$$\mathrm{Pe} = \frac{\bar{v}b}{a} \tag{1.19}$$

$\left(\bar{v} = \frac{v}{2}\right.$ — средняя скорость потока$\left.\right)$.

Так как числа γ_n вещественны [3], то чисто мнимые величины λ_n расположены только в верхней полуплоскости. Таким образом, теорема о вычетах приводит к представлению функции Грина в следующем виде:

$$G|_{z<z_0} \equiv 0, \tag{1.20}$$

$$G|_{z>z_0} = i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(y)}{A_0'(\lambda_n)} \exp[i\lambda_n(z - z_0)], \tag{1.21}$$

где введено обозначение

$$\psi_n(y) = \psi(y, \lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = \sqrt{y}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}wy_b^{3/2}\right) J_{1/3}\left(\frac{2}{3}wy^{3/2}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_n}. \tag{1.22}$$

Возвращаясь к общему случаю задания температуры на стенке $x=0$, предположим, что функция $f(z)$ кусочно-непрерывна и не равна тождественно нулю только на конечном промежутке $z_1 < z < z_2$. При этом функция $C(\lambda)$ в формуле (1.11) принимает вид

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{z_1}^{z_2} f(z)\exp(-i\lambda z)\,dz \tag{1.23}$$

и является, следовательно, целой функцией комплексной переменной λ. Поэтому, представляя решение через полученную функцию Грина

$$T(x, z) = \int_{z_1}^{z_2} G(x, z, z_0) f(z_0)\,dz_0, \tag{1.24}$$

находим следующие зависимости:

$$T|_{z<z_1} \equiv 0, \tag{1.25}$$

$$T|_{z>z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(x)\exp(i\lambda_n z), \tag{1.26}$$

где введены обозначения

$$C_n = \frac{i}{A_0'(\lambda_n)}\int_{z_1}^{z_2} f(z_0)\exp(-i\lambda_n z_0)\,dz_0, \quad \varphi_n(x) = \psi_n(y). \tag{1.27}$$

На основании соотношения (1.25) можно сделать следующее любопытное замечание: рассматриваемая задача эквивалентна аналогичной задаче для полуслоя $(z > z_1)$, на торце которого $(z=z_1)$ температура равна нулю, а краевые условия на стенках $x=0$ и $x=b$ имеют прежний вид (1.3).

В заключение данного раздела остановимся еще кратко на особом случае $z_2 \to \infty$, причем будем считать, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = T_0$. Тогда, полагая

$$T = T_0\left(1 - \frac{x}{b}\right) - u(x, z), \tag{1.28}$$

получим для функции u прежнее уравнение (1.2) и краевые условия

$$u|_{x=0} = T_0 - f(z) = \mathscr{T}(z), \quad u|_{x=b} = 0, \quad \lim_{z\to\infty}\mathscr{T}(z) = 0, \tag{1.29}$$

после чего искомая функция u находится в виде (1.10), (1.11) с заменой $f(z)$ на $\mathscr{T}(z)$.

2. Вычисление критериев Нуссельта

Для исследования закона теплообмена между стенками канала и потоком жидкости составим выражение для критериев Нуссельта [2]

$$Nu_0(z) = Nu\,|_{x=0} = b\,\frac{\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}}{\bar{T}(z) - T(0,\ z)}\,.$$

$$Nu_b(z) = Nu\,|_{x=b} = -b\,\frac{\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=b}}{\bar{T}(z) - T(b,\ z)}\,, \tag{2.1}$$

где положено

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{\bar{v}b}\int\limits_0^b T(x,\ z)\,v_z(x)\,dx,\ \ \bar{v} = \frac{1}{b}\int\limits_0^b v_z(x)\,dx = \frac{v}{2}\,. \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.2) выражение (1.26), получаем

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{\bar{v}b}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(i\lambda_n z)\int\limits_0^b \varphi_n(x)\,v_z(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Если теперь проинтегрировать уравнение (1.5) по промежутку $0 < x < b$, то находим

$$\bar{T}(z) = \frac{a}{i\bar{v}b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\lambda_n}\left[\varphi_n'(b) - \varphi_n'(0)\right]\exp(i\lambda_n z). \tag{2.4}$$

Вычисляя входящие в формулы (2.1) производные с помощью формул (1.26) и (1.17), находим окончательно следующие выражения для критериев Нуссельта:

$$Nu_0(z) = -\frac{9}{8}\,\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n'(0)\exp(i\lambda_n z)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_n}{\gamma_n^2}\left[\varphi_n'(b) - \varphi_n'(0)\right]\exp(i\lambda_n z) - f(z)}\,,$$

$$Nu_b(z) = \frac{9}{8}\,\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n'(b)\exp(i\lambda_n z)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_n}{\gamma_n^2}\left[\varphi_n'(b) - \varphi_n'(0)\right]\exp(i\lambda_n z)}\,. \tag{2.5}$$

Как нам известно, до сего времени в литературе (см., например, [4]) критерии Нуссельта вычислялись приближенно, причем только для течения Пуазейля при симметричных по переменной граничных условиях, при этом $Nu_0 = Nu_b$.

Переходим теперь к вычислению предельных значений критериев Нуссельта

$$Nu_0^{\infty} = \lim_{z\to\infty} Nu_0,\ \ Nu_b^{\infty} = \lim_{z\to\infty} Nu_b. \tag{2.6}$$

Предельный переход в формулах (2.5) дает

$$Nu_0^{\infty} = -\frac{9}{8}\gamma_1^2\frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_1'(b) - \varphi_1'(0)}\,,\ \ Nu_b^{\infty} = \frac{9}{8}\,\frac{\varphi_1'(b)}{\varphi_1'(b) - \varphi_1'(0)}\,. \tag{2.7}$$

Пользуясь формулами (1.9) и (1.15), связью [3]

$$J_{-1/3}(\gamma_n) + \sin\frac{\pi}{3}\,Y_{1/3}(\gamma_n) = 0, \tag{2.8}$$

а также выражением вронскиана функций $J_{\pm 1/3}(z)$, после выкладок получаем

$$\varphi_1'(0)=\frac{A_1}{w}\Bigg|_{\lambda=\lambda_1}=-\frac{3\sin\frac{\pi}{3}}{b^2\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^{4/3}Y_{1/3}(\gamma_1),\ \ \varphi_1'(b)=\frac{9\gamma_1\sin\frac{\pi}{3}}{2\pi b^2}. \tag{2.9}$$

Таким образом, формулы (2.7) можно представить в следующем окончательном виде:

$$Nu_0^\infty=\frac{9}{8}\gamma_1^2\frac{D_0}{D_0+D_b},\ \ Nu_b^\infty=\frac{9}{8}\gamma_1^2\frac{D_b}{D_0+D_b}, \tag{2.10}$$

где введены обозначения

$$D_0=\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^{4/3}\frac{Y_{1/3}(\gamma_1)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)},\ \ D_b=\frac{3\gamma_1}{2\pi}. \tag{2.11}$$

Пользуясь таблицами [5], находим значения $\gamma_1\approx 2.903$, $Y_{1/3}(\gamma_1)\approx 0.467$ и, учитывая, что $\Gamma(4/3)\approx 0.893$, получаем окончательные величины предельных критериев Нуссельта

$$Nu_0^\infty\approx 3.63,\ \ Nu_b^\infty\approx 5.82. \tag{2.12}$$

Важно отметить, что для рассматриваемого случая, когда распределение температуры на стенке $x=0$ отлично от нуля только при $z_1<z<z_2$, значения (2. 12) не зависят от вида функции $f(z)$. Что же касается рассмотренного в конце раздела 1, особого случая, когда $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=T_0$, то при этом формулы типа (2. 12) получаются из (2. 1) элементарно. В самом деле, при $z\to\infty$ из (1. 28) и (2. 2) находим, что $T\to T_0(1-(x/b))$, $\bar{T}\to T_0/3$, откуда

$$Nu_0^\infty=\frac{3}{2},\ \ Nu_b^\infty=3. \tag{2.13}$$

3. Смешанные граничные условия

Рассмотрим теперь теплообмен в плоском канале для течения Куэтта в том случае, когда на одной стенке имеют место краевые условия первого рода, а на другой — второго рода. При этом могут представиться два возможных случая.

а) На неподвижной стенке $x=0$ задана плотность потока тепла $q(z)$, а подвижная стенка $x=b$ имеет нулевую температуру. Представляя, как и ранее, решение задачи в виде интеграла Фурье

$$T(x,\ z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}C(\lambda)\frac{\varphi(x,\ \lambda)}{\left.\frac{\partial\varphi(x,\ \lambda)}{\partial x}\right|_{x=9}}\exp(i\lambda z)\,d\lambda, \tag{3.1}$$

где функция φ выбрана в виде (1. 9), т. е. $T(b,z)=0$. Теперь, находя из граничного условия

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=q(z), \tag{3.2}$$

(k — коэффициент теплопроводности), значение

$$C(\lambda)=-\frac{1}{2\pi k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(z)\exp(-i\lambda z)\,dz, \tag{3.3}$$

получаем точное решение поставленной задачи.

Предполагая, что функция $q(z)\not\equiv 0$ только внутри промежутка $z_1<z<z_2$, и применяя, как и в разделе 1, теорему о вычетах, получаем из (1. 14), (1. 15),

что подынтегральная функция в (3. 1) имеет простые полюса в точках λ_n — корнях уравнения $A_1=0$. Таким образом, значения λ_n даются прежней формулой (1. 17), в которой γ_n — корни уравнения

$$J_{-1/3}(\gamma)=0. \tag{3.4}$$

Заметим, что так как в этом случае $\varphi_n'(0)=0$, то формулы (2. 5) для критериев Нуссельта упрощаются, а именно

$$Nu_0(z)=0,\ Nu_b(z)=\frac{9}{8}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n\varphi_n'(b)\exp(i\lambda_n z)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{E_n}{\gamma_n^2}\varphi_n'(b)\exp(i\lambda_n z)}, \tag{3.5}$$

где E_n — известные величины, определяемые формулой, аналогичной (1. 27).

Для предельного значения критерия Нуссельта находим

$$Nu_b^{\infty}=\frac{9}{8}\gamma_1^2. \tag{3.6}$$

Так как [5] $\gamma_1\approx1.86$, то $Nu_b^{\infty}\approx3.86$. Нетрудно видеть, что в особом случае $z_2\to\infty$, когда $\lim\limits_{z\to\infty}q(z)=\mathrm{const}$, предельные значения критериев Нуссельта даются формулой (2. 13), поскольку в этом случае при $z\to\infty$ температура стремится к линейной функции координаты x.

б) На неподвижной стенке задано распределение температуры, а движущаяся стенка теплоизолирована. В этом случае функции $\psi(y)$ следует выбрать согласно условию $\psi'(b)=0$ в виде

$$\psi=\eta^{1/3}\{J_{1/3}(\eta)[3\eta_bJ_{-1/3}'(\eta_b)+J_{-1/3}(\eta_b)]-J_{-1/3}(\eta)[3\eta_bJ_{1/3}'(\eta_b)+J_{1/3}(\eta_b)]\},$$

$$\eta=\frac{2}{3}wy^{3/2},\quad \eta_b=\eta\,|_{x=b}. \tag{3.7}$$

Дальнейшие рассуждения, связанные с получением точного решения задачи и критериев Нуссельта, опускаются, так как они вполне аналогичны приведенным в разделах 1, 2. Укажем также, что числа γ_n в данном случае должны находиться из уравнения

$$3\gamma J_{1/3}'(\gamma)+J_{1/3}(\gamma)=0, \tag{3.8}$$

откуда $\gamma_1\approx1.21$, $Nu_0^{\infty}\approx1.64$ ($Nu_b^{\infty}=0$), причем в особом случае справедлива формула (2. 13).

В заключение настоящей работы заметим, что интерес представляют и такие задачи, в которых на обеих стенках канала заданы граничные условия второго рода (при $x=b$ — однородные). Методика решения указанных задач в принципе не отличается от изложенной выше, однако уравнение (3. 8) заменяется на следующее:

$$3\gamma J_{-1/3}'(\gamma)+J_{-1/3}(\gamma)=0. \tag{3.9}$$

Что касается предельных критериев Нуссельта, то, хотя они равны нулю, в особом случае $z_2\to\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}q(z)=\mathrm{const}$ будем иметь при $z\to\infty$

$$T\approx\frac{q}{k}\left(\frac{x^3}{3b^2}-x-\frac{2z}{bv}\right)+\mathrm{const}, \tag{3.10}$$

откуда

$$Nu_0^{\infty}=\frac{15}{8}\ (Nu_b=0). \tag{3.11}$$

Список литературы

[1] *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., 1955. 519 с.
[2] *Гребер Г., Эрк С., Григуль У.* Основы учения о теплообмене. М.: ИЛ, 1958. 566 с.
[3] *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
[4] *Цой П. В.* Методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1984. 383 с.
[5] *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. Ч. II. 220 с.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
28 июня 1989 г.