

01

© 1990 г.

ПЕРЕХОДНЫЙ ХАОС В ПРОСТОМ ОДНОМЕРНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДИНАМИЧЕСКОГО ШУМА

И. Н. Стручков

На основе одномерного кусочно-линейного отображения синтезировано $(m+1)$ -мерное отображение с переходным хаосом путем введения аддитивного шума динамической природы. По критическому показателю скейлинга средних времен жизни переходных хаотических процессов оценивается точечная размерность странного аттрактора автономной шумозадающей динамической системы в некоторой его граничной точке. Результаты численного эксперимента с шумозадающей системой в виде отображения Эно в пределах погрешности вычислений согласуются с предсказаниями теории.

Введение

Одним из возможных сценариев перехода динамических систем (ДС) порядок—хаос является [1] жесткий режим возникновения динамического хаоса (ДХ). Последний сопровождается появлением в ДС переходных хаотических процессов — переходного хаоса (ПХ), среднее «время жизни» τ [2] которого является монотонно возрастающей функцией при приближении параметра порядка p к его критическому значению p_c , при котором в ДС жестким образом рождается странный аттрактор (СА). Результаты численных и физических экспериментов показывают, что зависимость τ от p имеет следующий асимптотический вид:

$$\tau \underset{p \rightarrow p_c}{\sim} c \cdot |p - p_c|^{-\gamma}, \quad (1)$$

где γ — так называемый критический показатель скейлинга [3].

В основу данной работы легла изложенная в [4] идея о связи с размерностными характеристиками СА — его фрактальной размерностью D_F и ее дробной составляющей ν вдоль направления канторовой структуры в точке касания СА с границей его области притяжения в момент $p = p_c$ (момент так называемого граничного кризиса [5]). Изложенная в [4] идея оценки D_F с последующей оценкой размерности вложения системы, характеризующей сложность притягивающего множества ДС (а также эффективное число гармоник в ее частотном спектре), имеет принципиальный характер в плане изучения физических ДС с хаотической динамикой и ПХ из-за доступности и простоты непосредственного экспериментального измерения γ .

Ниже предлагается конструктивный, отличный от существующих алгоритм измерения размерностных характеристик СА некоторой ДС по критическому показателю γ скейлинга ПХ, синтезируемого в простом одномерном отображении интервала в себя путем аддитивного введения в него динамического шума малой амплитуды исследуемой ДС.

1. Синтез ДС с ПХ

За основу при синтезе ДС с ПХ было взято простейшее одномерное отображение «палатки»

$$z_{n+1} = K \cdot (1 - |2z_n - 1|). \quad (2)$$

При $1/2 < K < 1$ отрезок $I = [a; b]$ (рис. 1, а) является аттрактором с инвариантной мерой на нем $d\mu(z) = dz$, причем носитель $\mu(z)$ совпадает с $[a; b]$: $\text{supp } [\mu(z)] = I$. При $K=1$ аттрактор стелживается с точками $\{0\}$ и $\{1\}$ — границей области своего притяжения (рис. 1, б) и при $K > 1$ в системе возникает ПХ из-за ненулевой вероятности выброса фазовой траектории из отрезка $[0; 1]$ на бесконечность через маленькое окно Δ (рис. 1, в).

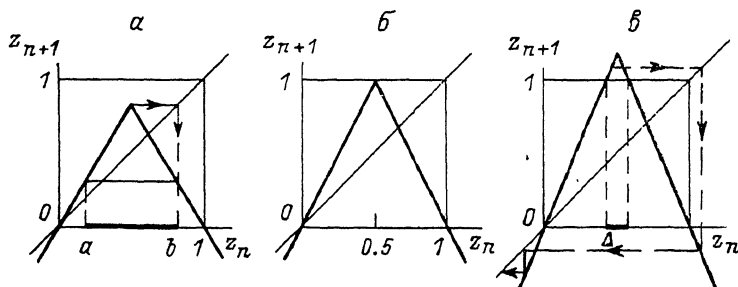


Рис. 1. Эволюция отображения (2) с увеличением параметра K .

Общая идея синтеза ДС с искомыми свойствами состоит в добавлении к отображению типа (2) аддитивного шума малой амплитуды, превращающего «канал выброса» (Δ на рис. 1, в) из стационарного в вероятностный.

Итак, пусть $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$ — некоторая m -мерная ДС с хаотической динамикой и инвариантной мерой $\mu(\varepsilon)$ движения на СА. Рассмотрим $(m+1)$ -мерное отображение вида

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n), \quad (3.1)$$

$$z_{n+1} = g(z_n) + \varepsilon \cdot f(\xi_n^i), \quad (3.2)$$

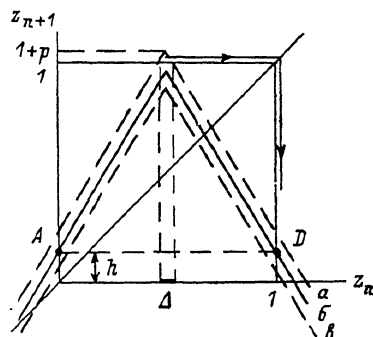
где

$$g(z_n) \equiv (1 - \varepsilon) + p - G \cdot |2z_n - 1|. \quad (4)$$

При этом в (4) ε — некоторый фиксированный малый параметр, равный амплитуде ад-

Рис. 2. Механизм возникновения вероятностного «окна» Δ , приводящего к ПХ в (3) при $p \geq p_c \equiv 0$.

$$h = \varepsilon + p; \quad a = [g(z_n) + \varepsilon], \quad b = g(z_n), \quad c = [g(z_n) - \varepsilon].$$



дитивного динамического шума $\varepsilon \cdot f(\xi_n^i)$; $G \equiv 1 - 2 \cdot \varepsilon = \text{const}$; p — варьируемый параметр порядка ($p \geq 0$); $f(x)$ — достаточной степени гладкости функция, отображающая интервал значений V_i i -й скалярной компоненты ξ^i ДС (3.1) с хаотической динамикой в отрезок $[-1; 1]$ (т. е. $|f(\xi^i)| \leq 1$).

Пусть при этом значении 1 достигается $f(\xi^i)$ в некоторой единственной точке ξ_M^i , причем в окрестности последней

$$f(x) \simeq 1 - B \cdot |\xi_M^i - x|^\alpha \quad \forall x \in V_\delta(\xi_M^i). \quad (5)$$

Как видно из рис. 2, механизм возникновения ПХ в (3) при $p > p_c = 0$ аналогичен (2) с тем лишь отличием, что «окно выброса» (Δ на рис. 2) имеет вероятностную природу.

Приведенный в (3.2) вид z -отображения обуславливается требованиями возникновения ПХ при движении кривой $g(z_n)$ как целого линейно с изменением p , а также исключения выбросов фазовых траекторий из отрезка $[0; 1]$ в окрестностях точек $\{0; 1\}$, для чего «концы» А и D подняты на высоту h над осью $(0z_n)$, так что для $x=0; 1$ $g(x) - \varepsilon \geq 0$ при $p \geq 0$. Отмеченные особенности (3.2) облегчили постановку задачи исследования ПХ в (3) и соответствующие теоретические выкладки. Перейдем к ним непосредственно.

2. Критический показатель скейлинга ПХ в отображении (3)

Вычислим среднее число итераций («время жизни») $\tau = \langle n \rangle$, после которого фазовая траектория с начальными условиями, равномерно распределенными в $[0; 1]$ по z и в области притяжения СА (3. 1), превысит значение, равное 1. В асимптотике большого τ ($p \rightarrow 0$) среднее время жизни определяется следующим выражением:

$$\tau \underset{p \rightarrow 0}{\sim} (P_1)^{-1}. \quad (6)$$

Вероятность P_1 первого превышения значения 1 на $(n+1)$ -й итерации при условии, что z_n лежит внутри «окна выброса» Δ (рис. 2), с учетом автономности (3. 1) по отношению к (3. 2) определяется кратным интегралом от инвариантной меры $\mu(\xi)$ по малой области

$$\Omega(z) \equiv \{ \xi : g(z) + \varepsilon \cdot f(\xi^i) \geq 1 \text{ и } \rightarrow \xi^i \in [\xi_1^i(z); \xi_2^i(z)] \}, \quad (7)$$

$$P_1 = \int_{\Delta} d\mu(z) \cdot \int_{\Omega} d\mu(\xi). \quad (8)$$

Из-за малости ε инвариантную меру $d\mu(z)$ при $\varepsilon > 0$ можно заменить соответствующей при $\varepsilon = 0$, когда $d\mu_0(z) = dz$. По крайней мере воспользуемся этим предположением для $d\mu(z)$ в окрестности $z = 1/2$.

Для малых p и $z \in [(1/2) - \rho; (1/2) + \rho]$; ($\rho = p/(2 \cdot G)$) подстановка (5) в (7) дает

$$|\xi_M^i - \xi_k^i(z)| \leq [p \cdot B^{-1}]^{1/\alpha}, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Откуда следует малость $|\xi_1^i(z) - \xi_2^i(z)|$ при $p \rightarrow 0$.

Дальнейшая оценка интеграла (8) существенно определяется видом области Ω . Выделим два общих случая.

Случай первый (рис. 3), когда ε_M^i лежит на границе области A , такой что $A \supset \text{supp } [d\mu(\xi)]$. При этом ε_M^i является седловой точкой S (неподвижной либо N -периодической) или лежит на ее неустойчивом многообразии W_u^s , а направление является трансверсальным к направлению канторовой структуры $CA \subset A$ (одному из нескольких, вообще говоря, возможных). Плоскость $\Pi \equiv \{ \xi : \varepsilon^i = \varepsilon_M^i(z) \}$ для $p = 0$ касается A (а следовательно, и CA) в точке ε_M^i , а для $p > 0$ отсекает от A маленькую область Ω , по которой и производится интегрирование в (8). Обозначив линейные размеры области Ω вдоль координатной оси ($0 \leq \xi^k$) соответственно как $\Delta_k(z)$, по определению точечных коразмерностей $d_B^{(k)}(\xi_M) \equiv \equiv d_B^{(k)} CA$ системы (3. 1) в точке $\xi_M \equiv \{ \xi^i \equiv \xi_M^i \}$ получим следующее выражение для интеграла по области Ω :

$$\int_{\Omega} d\mu(\xi) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} C_1 \cdot \prod_{k=1}^m [\Delta_k(z)]^{d_B^{(k)} \xi_M}. \quad (10)$$

Точность аппроксимации интеграла в (10) достаточна до тех пор, пока область Ω может быть приближена половиной эллипсоида с центром в точке $\xi_M^i(z)$ и полуосями $\{\Delta_1, \dots; \Delta_i; \dots; \Delta_m\}$, что заведомо выполняется для инфинитезимальной (при $p \rightarrow 0$) области Ω .

С целью дальнейшего упрощения (10) Ω рассматривается параболической, т. е. для малых Δ_i и остальных $\{\Delta_k\}$ предполагается, что

$$\Delta_k \simeq a_k [\Delta_i(z)]^{0.5}, \quad k = \overline{1, m}; \quad k \neq i. \quad (11)$$

В общем виде вместо (11) рассмотрим соотношения

$$\Delta_k \simeq a_k [\Delta_i(z)]^{\beta}. \quad (12)$$

Подстановка (19), (10), (12) в (8) дает следующее выражение для P_1 :

$$P_1 \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \int_{(1/2)-\rho}^{1/2+\rho} dz \cdot C \cdot \left[\frac{\rho - \left| z - \frac{1}{2} \right|}{B \cdot G} \right]^{\gamma-1} = K_0 \cdot p^{\gamma}, \quad (13)$$

где $K_0 = K_0(\varepsilon; B; G; \gamma)$ — некоторая постоянная, независящая от параметра p величина, а

$$\gamma = 1 + \frac{\beta \cdot D_{BM}}{\alpha} + \frac{(1-\beta)}{\alpha} \cdot d_{BM}^{(i)}. \quad (14)$$

Здесь $D_{BM} = \sum_{k=1}^m d_{BM}^{(k)}$ — точечная размерность в точке ξ_M . При этом в соответствии с (6) γ из (14) является критическим показателем скейлинга времен жизни ПХ.

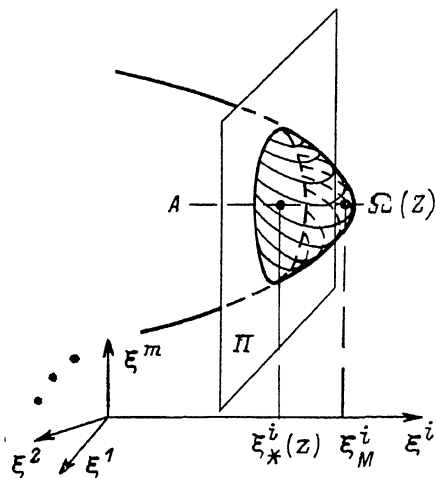


Рис. 3. Первый случай расположения ξ_M^i в A («крайнее касание»).

$A \supset \text{supp} [\mu(\xi)]$ и A — связная; $\xi_{*}^i(z) \leq \xi_M^i$ — корень: $g(z) + \varepsilon \cdot f(\xi_{*}^i) = 1$.

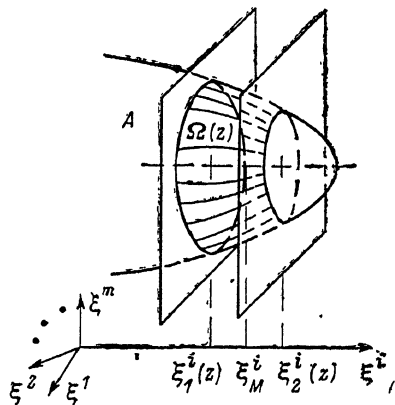


Рис. 4. Второй случай расположения ξ_M^i в A .

ξ_M^i лежит «внутри» A .

Второй случай. Пусть ξ_M^i лежит внутри A (рис. 4). Тогда при малом $\Delta_i(z)$, соответствующем $p \rightarrow 0$, Ω примет форму тонкого «блина», для которого

$$\int_{\Omega} d\mu(\xi) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} C_i \cdot [\Delta_i(z)]^{d_{BM}^{(i)}}. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (8) дает выражение, аналогичное (13), с γ , равным

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} \cdot d_{BM}^{(i)}. \quad (16)$$

Следует отметить, что существенным при выводе (16) явилось предположение постоянства $d_{BM}^{(i)}$ в разных частях Ω . Последнее, однако, заведомо неверно в случае, когда в Ω попадают «дыры» носителя меры $\mu(\xi)$, т. е. когда пересечение $A \cap \Omega$ является несвязным множеством. Анализ и расчет γ в таких случаях нужно производить для данной системы конкретно с учетом всех особенностей структуры ее СА.

3. Численный эксперимент

Для проверки результатов (14), (16) теоретического анализа ПХ в (3) исследовалось следующее отображение:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - 1.4 \cdot x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= 0.3 \cdot x_n, \\ z_{n+1} &= g(z_n) + \varepsilon \cdot \cos \left[k \cdot \pi \cdot \left(\frac{x_n}{H} - \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь первые две строки представляют собой классическое отображение $\dot{\Omega}$ но с хаотической динамикой; $H=1.274$ — нормирующий коэффициент. H таково, что для допускаемых отображением $\dot{\Omega}$ но значений x_n : $|x_n|H \leq 1$, а $|\varphi| \leq 1$ — постоянная «фаза». Подбором φ можно перемещать по аттрактору $\dot{\Omega}$ но точку x_M

Результаты численного вычисления γ на ПЭВМ ДЗ-28

ϵ	φ	x_M	k	γ
0.1	0	0	1	1.56 ± 0.14
	φ_S	S	1	1.33 ± 0.13
	1	B и D	1	1.42 ± 0.15
0.01	1	B	0.5	1.38 ± 0.17
	1	B	0.5	1.51 ± 0.12
	0	S	1	1.3 ± 0.3

(в ней косинус из (17) принимает значение 1), точечные коразмерности которой входят в выражения (14), (16) для γ . Наконец, значение константы k было взято отличным от 1 лишь в случае $\varphi=1$ с целью определения чувствительности γ к замене малой окрестности точки x_M , состоящей из левой и правой полуокрестностей точек SA с $x = \pm 1.274$ (при $k=1$), на левую полуокрестность точки $x=1.274$ (при $k=1/2$).

Выбранный вид функции $f(x)$ в (17) соответствует величине α из (5), равной 2.

Были измерены скейлинги для нескольких значений φ (соответственно x_M) и ϵ . Вычисленные по ним величины γ собраны в таблице. Полученные величины γ в пределах точности вычислений (не очень, к сожалению, высокой) согласуются с теоретическими результатами (14), (16). Наиболее важным представляется установленный достоверно в численном эксперименте результат непостоянства критического показателя скейлинга γ для разных локальных областей аттрактора $\dot{\Omega}$ но.

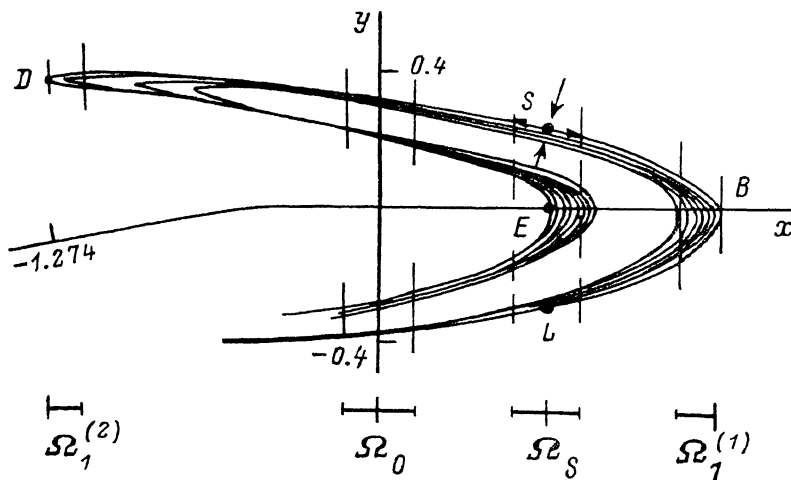


Рис. 5. Аттрактор $\dot{\Omega}$ но и малые окрестности Ω_i точек x_M для $\varphi=0$; 1; φ_S ($\Omega_1 = \Omega_1^{(1)} + \Omega_1^{(2)}$, если $k=1$, и $\Omega_1^{(1)}$ при $k=0.5$).

Непосредственный анализ структуры аттрактора $\dot{\Omega}$ но (рис. 5) позволяет сделать следующие оценки для критических показателей скейлинга γ .

Случай $\varphi=1$. В этом случае среднее время ПХ определяется интегралом от $d\mu$ (5) на аттракторе $\dot{\Omega}$ но по малой области Ω_1 , x -размеры которой пропорциональны \sqrt{p} . Y -размеры Ω_1 в приближении квадратичной формы неустойчивого многообразия седловой точки W_S^u в окрестностях точек B и D (рис. 5) изменяются при малых p пропорционально $\sqrt[4]{p}$. Вводя точечные коразмерности d_{x_i} и d_{y_i} в точках B ($i=1$) и D ($i=2$), дающие в сумме соответствующие точечные размерности $D_{B_i} \equiv d_{x_i} + d_{y_i}$, по аналогии с выводом формулы (14) получим для P_1 выражение

$$P_1 \frac{\sim}{p \rightarrow 0} C_1 p^{\gamma_1} + C_2 p^{\gamma_2}, \quad (18)$$

где $\gamma_i = 1 + (d_{x_i}/2) + (d_{y_i}/4)$.

В случае разных значений γ_i в точках B и D в асимптотике будет наблюдаться скейлинг (1) с

$$\gamma = \min(\gamma_1; \gamma_2). \quad (19)$$

В данном же случае поскольку точка D является образом точки B при отображении $\tilde{\Omega}$ но, то инвариантность D_{B_i} относительно действия отображения (равно, как и гладких заменах координат) дает совпадающие величины $d_{x1} = d_{x2}$; $d_{y1} = d_{y2}$ и $\gamma_1 = \gamma_2$. С учетом того, что $d_x, d_y \leq 1$, легко получается верхняя оценка для γ : $\gamma \leq 1.75$.

Приведенная в таблице «экспериментальная» константа γ удовлетворяет полученному неравенству и при обратном направлении выкладок с учетом того, что в окрестности точки B $d_y = 1$, дает следующие оценки: $d_x = 0.36 \pm 0.30$ ($k=1$); $d_x = 0.26 \pm 0.34$ ($k=1/2$).

Случай $\varphi=0$. В области Ω_0 (рис. 5) из-за почти горизонтального направления W_S^4 реализуется второй случай раздела 2; согласно которому $\gamma = 1 + (d_x/2) \approx 1.5$.

Случай $\varphi = \varphi_S$. В Ω_S выделяются три несвязных «куска» СА $\tilde{\Omega}$ но. Центральный в окрестности точки E имеет структуру, визуально похожую на аналогичную в окрестности точки B . По аналогии со случаем $\varphi=1$ для этого куска $\gamma_3 = 1 + (d_x/2) + (d_y/4)$. По бокам от центрального находятся два куска, хорошо аппроксимирующихся при малых p линейной зависимостью x и y . Для них соответствующие критические показатели имеют вид

$$\gamma_k = 1 + \frac{1}{2} (d_x(\xi) + d_y(\xi)) |_{\xi = \xi_k}; \quad k = 1, 2;$$

$$\xi_2 = (x_S; y_S); \quad \xi_1 = (x_L; y_L).$$

Последнее, записанное через D_{Bk} , равняется $\gamma_k = 1 + \frac{1}{2} \cdot D_{Bk}$, где $D_{Bk} \equiv D_B(\xi_k)$, и заведомо больше 1.5. Как показано в случае $\varphi=1$, наблюдаться будет наименьшее γ_i . В силу подобия структур СА в окрестностях точек B и E (из чего можно предположить, что $\gamma_3 \approx \gamma$ ($\varphi=1$) ≤ 1.5) таковым является γ_3 .

Значение γ , полученное для $\varphi = \varphi_S$ в численном эксперименте, подтверждает правильность вышеизложенных рассуждений.

В заключение отметим, что выбор величины ε был осуществлен путем компромиссного разрешения двух противоречивых требований: малости ε , с одной стороны, и малости отношения p/ε — с другой, поскольку только для $p \ll \varepsilon$ справедливы сделанные в третьей части оценки интегралов по инвариантной мере, а сами значения τ слабо зависят от ε , оставаясь одинаковыми по порядку величины при одном и том же p , но разных ε .

Вычисления с двойной точностью скейлингов ПХ в ДС (3) при тех же самых ε и φ в пределах погрешности вычислений дали прежние величины критических показателей γ .

Заключение. Итоги и выводы

Синтезированная ДС с ПХ позволяет производить оценку точечной размерности D_B и ее отдельных парциальных компонент (в частности, дробной) в некоторой граничной точке СА произвольной ДС с хаотическим поведением, в том числе для реальных физических процессов с неупорядоченным поведением, используя для этого всего лишь одну скалярную переменную.

Все оценки производятся по критическому показателю скейлинга γ , определяющему зависимость среднего времени жизни ПХ с приближением параметра p к его критическому значению p_c , и могут быть проведены экспресс-методом.

Кроме того, знание тополого-геометрической структуры аттрактора, выбранной для исследования ДС, позволяет получить целый набор точечных соразмерностей в различных частях СА, что значительно дополняет наше знание о его строении.

Использование в качестве «шумозадающей» скалярной компоненты (аргумент косинуса в случае отображения (17)) последовательно всех m координат (см. (3)) даст m линейных уравнений, связывающих соответствующие γ_i с m точечными коразмерностями в фиксированной точке. Если анализ структуры СА в окрестности такой точки позволит (для не очень сложных систем) определить коэффициенты в этих линейных уравнениях, то возможно точное восстановление всех точечных коразмерностей $\{d_B^i\}_{1,m}$ по значениям $\{\gamma_i\}$, соответствующих динамическому шуму в (3) вида $\varepsilon \cdot f(\xi^i)$, $i = \overline{1, m}$.

Проведение подобного рода анализа для отображений с размерностью $D_B > 2$ и реальных физических процессов с хаотической динамикой послужит основой последующих исследований.

Список литературы

- [1] *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* // Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [2] *Kantz H., Grassberger P.* // Phys. D. 1985. Vol. 17. P. 75—86.
- [3] *Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 57. P. 1284—1287
- [4] *Ликовский А. С., Рождественский В. В.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. С. 1401—1403.
- [5] *Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.* // Phys. D. 1983. Vol. 7. P. 181—200.

Московский физико-технический
институт

Поступило в Редакцию
28 апреля 1989 г.