

01; 09; 10

© 1990 г.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В СКРЕЩЕННЫХ $E \times H$ ПОЛЯХ

Ю. А. Туркин

Рассмотрена задача о движении релятивистской заряженной частицы в постоянных скрещенных $E \times H$ полях ($E < H$) и в поле электромагнитной волны произвольной поляризации, распространяющейся под углом к постоянным полям. Основное внимание уделено изучению движения частицы в условиях циклотронных резонансов и разрушению их при переходе к хаосу. Получен критерий возникновения глобальной стохастичности, предложены способы управления стохастичностью системы.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется изучению динамических систем, демонстрирующих переход от регулярного движения к стохастическому [1-4]. Важным для практических приложений классом гамильтоновых систем являются задачи движения заряженных частиц в электромагнитных полях. К настоящему времени достаточно полно изучена хаотическая динамика взаимодействующих с электромагнитной волной частиц в постоянном магнитном поле. Так, стохастическое движение нерелятивистских осцилляторов в поле электростатической волны для целей нагрева плазмы было исследовано в [5, 6]. Взаимодействие релятивистской частицы с электростатической волной в магнитном поле в приближении коротких длин волн ($\lambda < \rho$, λ — длина волны, ρ — ларморовский радиус частицы) изучено в [7]. Самосогласованной динамике потока осцилляторов и возбуждаемого ими электромагнитного поля посвящена работа [8].

В настоящей работе рассмотрена задача о движении релятивистской заряженной частицы в постоянных скрещенных $E \times H$ полях ($E < H$) и в поле электромагнитной волны произвольной поляризации. Получено условие возникновения стохастической неустойчивости движения частицы. Предложены способы управления стохастичностью системы. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие критерий стохастичности и возможность управления характером движения частиц.

1. Основные уравнения

Рассмотрим движение релятивистской заряженной частицы в постоянных скрещенных $E_0 \times H_0$ полях и в поле электромагнитной волны с векторами напряженностей

$$\begin{aligned} E' &= \operatorname{Re} A_0 \alpha' \exp(ik'r' - i\omega't'), \\ H' &= \operatorname{Re} A_0 \left[\frac{ck'}{\omega'} \alpha' \right] \exp(ik'r' - i\omega't'), \end{aligned} \quad (1)$$

где A_0 — напряженность электрического поля; ω' , $k' = (k'_x, k'_y, k'_z)$ — частота и волновой вектор волны; $\alpha' = (\alpha'_x, \alpha'_y, \alpha'_z)$ — вектор поляризации волны.

Систему координат выберем следующим образом: ось y направлена вдоль постоянного электрического поля E'_0 , ось z — вдоль постоянного магнитного поля H'_0 . Пусть $E'_0 < H'_0$, тогда частица при своем вращении вокруг магнитного поля будет испытывать дрейф со скоростью

$$v_d = c \frac{[E'_0, H'_0]}{H'^2_0}. \quad (2)$$

Перейдем в систему координат, движущуюся с дрейфовой скоростью. В первой системе координат постоянное электрическое поле отсутствует, координаты, волновой вектор, частота и компоненты полей преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} x &= \Gamma(x' - Bct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \Gamma(ct' - Bx'), \\ k_x c &= \Gamma(k'_x c - \omega' B), \quad k_y = k'_y, \quad k_z = k'_z, \quad \omega = \Gamma(\omega' - Bk'_x c), \\ E_x &= E'_x, \quad E_y = \Gamma(E'_y - BH'_z), \quad E_z = \Gamma(E'_z + BH'_y), \\ H_x &= H'_x, \quad H_y = \Gamma(H'_y - BE'_z), \quad H_z = \Gamma(H'_z - BH'_y), \quad H_0 = H'_0/\Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$B = v_d/c, \quad \Gamma = (1 - B^2)^{-1/2}.$$

Вводя вектор поляризации $\alpha = (\alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z)$ с компонентами

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha'_x, \\ \alpha_y &= \Gamma[\alpha'_y(1 - BN'_x) - iBN'_y\alpha'_x] \equiv \alpha_{yR} + i\alpha_{yI}, \\ \alpha_z &= \Gamma[\alpha'_z(1 - BN'_x) + BN'_z\alpha'_x], \quad N' = \frac{k'_x c}{\omega'}, \end{aligned} \quad (4)$$

запишем поле электромагнитной волны в движущейся системе координат в виде

$$\mathbf{E} = \text{Re } A_0 \alpha \exp(ikr - i\omega t),$$

$$\mathbf{H} = \text{Re } A_0 [\mathbf{k}, \alpha] \frac{c}{\omega} \exp(ikr - i\omega t). \quad (5)$$

Заметим теперь, что k_y без ограничения общности можно положить равным нулю, поскольку поворот новой системы координат относительно оси z на угол $\vartheta = \text{arctg}(k_x/k_y)$ приводит к системе координат в которой k_y отсутствует. Таким образом, исходную задачу мы свели к задаче о движении заряженной частицы в постоянном магнитном поле H_0 и в поле электромагнитной волны (5). Уравнения движения частицы в указанных полях в безразмерных переменных

$$\omega t \rightarrow \tau, \quad \frac{kc}{\omega} \rightarrow \mathbf{k}, \quad \frac{\mathbf{p}}{mc} \rightarrow \mathbf{p}, \quad \frac{\omega \mathbf{r}}{c} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \frac{\mathbf{v}}{c} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc\omega},$$

$$\varepsilon = eA_0/mc\omega$$

имеют вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = (1 - \mathbf{k}\mathbf{v}) \text{Re } \varepsilon \alpha \exp(i\Psi) + \mathbf{k} \text{Re}(\mathbf{v}\alpha) \varepsilon \exp(i\Psi) + \frac{1}{\gamma} [\mathbf{p}, \omega_H],$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \mathbf{v}; \quad \Psi = k_x x + k_z z - \omega t. \quad (6)$$

Из системы (6) нетрудно получить уравнение, описывающее изменение энергии частицы в процессе взаимодействия ее с волной,

$$\frac{d}{d\tau} \gamma = \varepsilon \text{Re}(\mathbf{v}\alpha) \exp(i\Psi) \quad (7)$$

и интеграл движения

$$\mathbf{p} - \mathbf{k}\gamma + [\omega_H, \mathbf{r}] + \text{Im } \varepsilon \alpha \exp(i\Psi) = \text{const}. \quad (8)$$

В дальнейшем нас будет интересовать движения частицы вблизи циклотронных резонансов. Для этого удобнее всего использовать так называемые дрейфовые переменные p_{\perp} , θ , φ , η

$$p_x = p_{\perp} \cos \theta, \quad p_y = p_{\perp} \sin \theta,$$

$$x = \varphi - \frac{p_{\perp}}{\omega_H} \sin \theta, \quad y = \eta + \frac{p_{\perp}}{\omega_H} \cos \theta.$$

В этих переменных система уравнений (6) и уравнение (7) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} p_{\perp} &= \varepsilon (1 - k_z v_z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\alpha_x \frac{n}{\mu} J_n - \alpha_{yR} J'_n \right) \cos \theta_n + \alpha_{yI} J'_n \sin \theta_n \right] + \\ &+ \varepsilon k_z v_z \sum_{n=-D}^{\infty} \alpha_x \frac{n}{\mu} J_n \cos \theta_n, \\ \frac{d}{d\tau} \theta &= -\frac{\omega_H}{\gamma} + \varepsilon \frac{1 - k_z v_z}{p_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\alpha_x J'_n - \alpha_{yR} \frac{n}{\mu} J_n \right) \sin \theta_n - \alpha_{yI} \frac{n}{\mu} J_n \cos \theta_n \right] + \\ &+ \varepsilon \frac{k_x}{p_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(v_{\perp} \alpha_{yR} J_n + v_z \alpha_x J'_n \right) \sin \theta_n + v_{\perp} \alpha_{yI} \frac{n}{\mu} J_n \cos \theta_n \right], \\ \frac{d}{d\tau} p_z &= \varepsilon k_z v_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\alpha_x \frac{n}{\mu} J_n - \alpha_{yR} J'_n \right) \cos \theta_n + \alpha_{yI} J'_n \sin \theta_n \right] + \\ &+ \varepsilon \alpha_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{s\omega_H}{\gamma} \right) J_n \cos \theta_n, \\ \frac{d}{dt} \gamma &= \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_x v_{\perp} \frac{n}{\mu} J_n - \alpha_{yR} v_{\perp} J'_n + \alpha_x v_z J_n \right) \cos \theta_n + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{\perp} \alpha_{yI} J_n \sin \theta_n, \\ &\varphi + \frac{\varepsilon}{\omega_H} \alpha_{yR} \cos (k_z z - \mu \sin \theta - \tau + k_x \varphi) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\omega_H} \alpha_{yI} \sin (k_z z - \mu \sin \theta - \tau + k_x \varphi) = \text{const.} \end{aligned} \quad (9)$$

При записи (9) использовано известное разложение в ряд по функциям Бесселя

$$\exp(i\mu \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) \exp(in\theta)$$

и введены обозначения

$$\mu = \frac{k_x p_{\perp}}{\omega_H}, \quad J_n = J_n(\mu), \quad J'_n = \frac{d}{d\mu} J_n(\mu),$$

$$\theta_n = k_z z - n\theta - \tau + k_x \varphi.$$

Из системы (9) легко заключить, что при медленном изменении фазы $\dot{\theta}_s \approx 0$ движение частицы происходит в условиях резонанса

$$k_z v_z + \frac{s\omega_H}{\gamma} = 1. \quad (10)$$

Исследуем движение частицы вблизи него. Пусть выполнено условие $\varepsilon \ll 1$. Тогда, оставляя в правых частях (9) только медленные резонансные слагаемые (т. е. проводя усреднение по всем быстрым фазам), получим систему уравнений, описывающую движение частицы в условиях изолированного нелинейного резонанса

$$\frac{d}{d\tau} p_{\perp} = \frac{\varepsilon}{v_{\perp}} [(1 - k_z v_z) W_s + \alpha_x v_x J_s \Delta_s] \cos \theta_s + \varepsilon (1 - k_z v_z) \alpha_{yI} J'_s \sin \theta_s,$$

$$\frac{d}{d\tau} p_z = \varepsilon (k_z W_s - \alpha_z J_s \Delta_s) \cos \theta_s + \varepsilon \alpha_{yI} k_z v_{\perp} J'_s \sin \theta_s,$$

$$\frac{d}{d\tau} \gamma = \varepsilon W_s \cos \theta_s + \varepsilon v_{\perp} \alpha_{yI} J'_s \sin \theta_s,$$

$$\frac{d}{d\tau} \theta_s = \Delta_s \equiv k_z v_z + \frac{s\omega_n}{\gamma} - 1. \quad (11)$$

При получении последнего уравнения системы (11) мы пренебрегли слагаемыми порядка ε , поскольку изменение фазы в таких системах пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$ [2], и ввели обозначение

$$W_s = \alpha_x v_{\perp} \frac{s}{\mu} J_s - \alpha_{yR} v_{\perp} J_s + \alpha_z v_z J_s.$$

Поскольку амплитуда ε мала (см. выше), то отклонения импульса $\delta p_z = p_z - p_{z0}$ и энергии $\delta\gamma = \gamma - \gamma_0$ частицы от равновесных значений p_{z0} , γ_0 также малы, что позволяет упростить анализ системы (11), т. е. вместо всей системы рассмотреть два последних уравнения вблизи резонанса (10). Итак, пусть p_{zs} , γ_s удовлетворяют (10), тогда, используя приближенный интеграл движения $p_z - k_z \gamma \approx \text{const}$ (следует из (8) в предположении $\varepsilon \ll p_z - k_z \gamma_s$) и раскладывая Δ_s вблизи p_{zs} , γ_s , получим

$$\frac{d}{d\tau} \delta\gamma = \varepsilon W_s(p_{zs}, \gamma_s) \cos \theta_s + \varepsilon v_{\perp} \alpha_{yI} J_s \sin \theta_s,$$

$$\frac{d}{d\tau} \theta_s = \frac{k_z^2 - 1}{\gamma_s} \delta\gamma. \quad (12)$$

Уравнения (12) представляют собой уравнения нелинейного маятника. Из них найдем максимальное изменение энергии частицы в результате взаимодействия ее с волной — полуширину резонанса $\Delta\gamma_s$.

$$(\Delta\gamma_s)^2 = 4\varepsilon\gamma_s \sqrt{W_s^2 + \alpha_{yI}^2 v_{\perp}^2 J_s'^2 / (k_z^2 - 1)}. \quad (13)$$

Системы (11) и (12) правильно описывают движение частицы вдали от сепаратрисы в изолированном резонансе, когда сумма полуширин соседних резонансов меньше расстояния между ними. При этом движение частицы регулярно всюду, за исключением узких стохастических слоев вблизи сепаратрис резонансов. В противном случае в системе происходит переход к глобальному хаосу [2-4]. Получим условие перекрытия резонансов, которое и будет являться критерием глобальной стохастичности. Для этого определим расстояние между резонансами s и $s+1$. Оно легко находится при помощи приближенного интеграла движения $p_z - k_z \gamma \approx \text{const}$ и условия резонанса (10) и имеет вид

$$d = \frac{\omega_n}{|k_z^2 - 1|}. \quad (14)$$

Выпишем критерий перекрытия резонансов

$$\Delta\gamma_s + \Delta\gamma_{s+1} \geq d. \quad (15)$$

Условие (15) позволяет с достаточной степенью точности определить границу перехода системы к глобальному хаосу.

2. Обсуждение результатов

При взаимодействии заряженной частицы с электромагнитной волной в скрещенных полях появляется возможность с помощью внешнего электрического поля управлять характером движения частиц. Можно указать два способа такого управления: изменяя постоянное электрическое поле, изменять расстояние между резонансами и управлять критерием (15); изменением постоянного электрического поля выводить частицу из области резонансного взаимодействия с волной (или, наоборот, вводить).

Для иллюстрации первого способа рассмотрим движение частицы в поле продольной волны с вектором поляризации $\alpha' = (k'_x/k', 0, k'_z/k')$ (см. (1)). Положим для простоты $v_d \ll c$. Переход в систему координат, движущуюся с дрейфовой скоростью, приводит к следующим выражениям для \mathbf{k} , α и ω (здесь все величины размерные, напомним также, что величины со штрихами относятся к лабораторной системе координат):

$$k_x = k'_x, \quad k_z = k'_z, \quad \omega = \omega' - k'_x v_d, \quad \alpha_x = \alpha'_x, \quad \alpha_z = \alpha'_z, \quad \alpha_y = 0.$$

Выпишем полуширину резонанса (13) и расстояние между резонансами (14) для рассматриваемого случая

$$(\Delta\gamma_s)^2 = \frac{4eA_0}{mc^2k} \gamma_s J_s \left| \frac{k_z'^2 c^2}{(\omega' - k'_x v_d)^2} - 1 \right|,$$

$$d = \frac{eH_0}{mc(\omega' - k'_x v_d) \left| \frac{k_z'^2 c^2}{(\omega' - k'_x v_d)^2} - 1 \right|}.$$

Критерий перекрытия принимает вид

$$2\sqrt{\frac{eA_0}{mc^2k} (\sqrt{\gamma_s J_s} + \sqrt{\gamma_{s+1} J_{s+1}})} \geq$$

$$\geq \frac{eH_0}{mc} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{k_z'^2 c^2}{(\omega' - k'_x v_d)^2} - 1 \right|}}. \quad (16)$$

Из приведенных выше выражений видно, что для фиксированного магнитного поля и параметров волны ширины резонансов зависят только от номера резонанса, а расстояние между ними — от величины и знака дрейфовой скорости, которая пропорциональна постоянному полю E_0 . Следовательно, изменяя внешнее постоянное электрическое поле, можно управлять критерием (16), т. е. понижать или увеличивать границу стохастичности по амплитуде волны.

Для проверки вывода о возможности управления характером движения частицы и критерия (16) был проведен численный анализ. Уравнения движения частицы в поле продольной волны были проинтегрированы для различных значений дрейфовой скорости V_d и фиксированных параметров

$$\frac{k'_x c}{\omega'} = \frac{k'_z c}{\omega'} = \sqrt{2}, \quad \frac{eH_0}{mc\omega'} = 0.5, \quad \frac{v_{10}}{c} = 0.5, \quad \frac{eA_0}{mc\omega'} = 0.06.$$

Оценка меры стохастической компоненты движения частицы проводилась с помощью максимального показателя Ляпунова σ_1 , который вычислялся по методике, изложенной в [4]. Для наглядного отображения областей регулярного и стохастического движения были построены графики распределения показателя σ_1 по фазовой плоскости начальных условий (рис. 1—3). На рисунках значение σ_1 отложено по вертикальной оси, а начальные значения фазы $k_z z_0$ и скорости v_{z0} — на горизонтальных. На рис. 1 представлено распределение показателя σ_1 при $v_d = 0$, в случае, когда критерий перекрытия резонансов не выполнен. Хорошо видны стохастические слои резонансов $s=1$ ($v_{z0} = 0.4$) и $s=2$ ($v_{z0} = 0.03$) (значение показателя Ляпунова σ_1 здесь максимально и составляет 0.03). Основное место на фазовой плоскости занимают области регулярного движения.

Наличие внешнего электрического поля изменяет картину движения частиц. Так, при $v_d/c = 0.1$ (рис. 2) зависимость максимального показателя Ляпунова от начальных условий носит изрезанный характер, его значение почти всюду на фазовой плоскости вблизи максимального. Максимальное значение показателя σ_1 в два раза больше, чем при $v_d = 0$. Движение частиц оказывается стохастичным почти для всех начальных условий — в системе наступает глобальная стохастичность. Критерий (16) в этом случае выполнен.

При $v_d < 0$, согласно (16), мера стохастической компоненты движения частиц должна уменьшаться. Это проиллюстрировано на рис. 3. Видно, что область регулярного движения частицы увеличилась.

Рассмотрим теперь второй способ управления характером движения частицы. Известно, что при распространении волны вдоль магнитного поля (отсут-

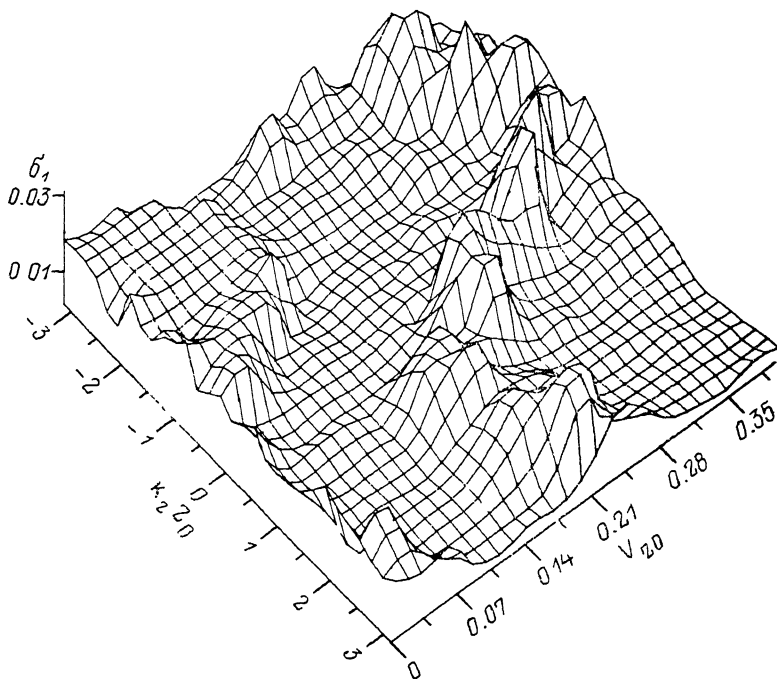


Рис. 1. Распределение максимального показателя Ляпунова σ_1 при $v_d=0$.

ствует поперечное волновое число) частица может взаимодействовать с ней только в условиях трех резонансов: $s=0$, $s=\pm 1$. Допустим теперь, что при косом

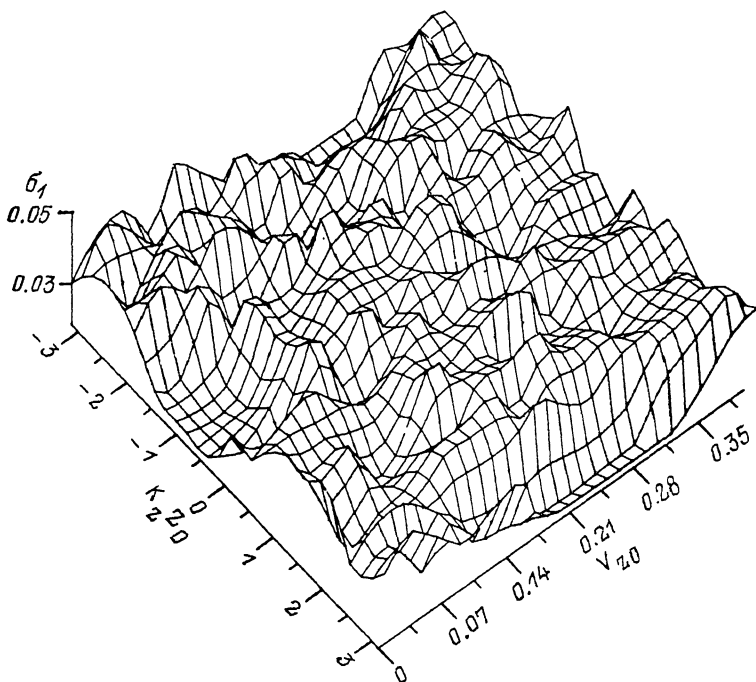


Рис. 2. То же при $v_d/c=0.1$.

распространении волны частица взаимодействовала с ней в условиях высших резонансов $s \gg 1$. Тогда если изменить внешнее электрическое поле E_0 так,

чтобы поперечное волновое число k_x обратилось в нуль (это возможно при $k_x'c/\omega' \sim v_d/c$), то частица перестанет резонансным образом взаимодействовать с волной. Аналогично первоначально резонансно не взаимодействующие с волной частицы с помощью электрического поля можно вводить в резонанс с волной. Высшие резонансы в рассмотренных выше случаях могут быть как изолированы, так и перекрыты.

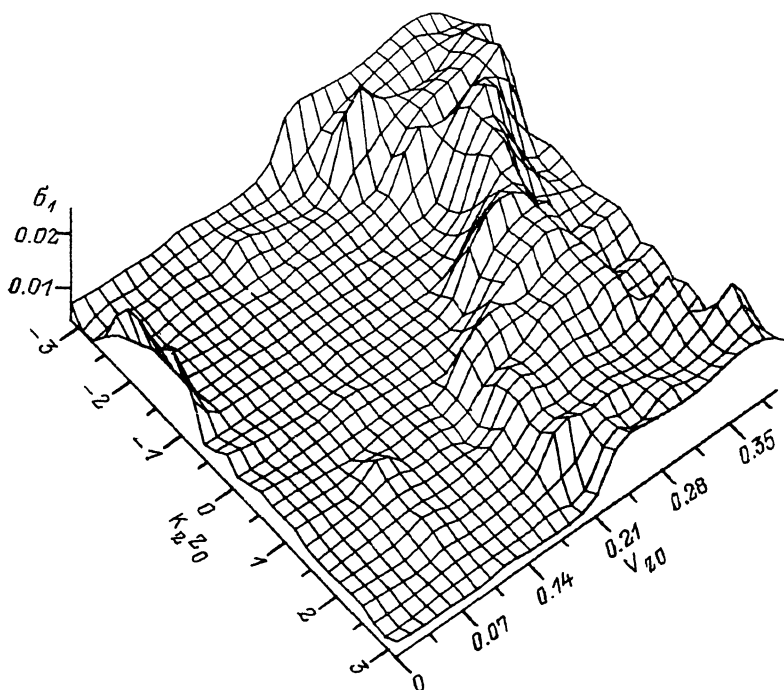


Рис. 3. То же при $v_d/c = -0.1$.

Автор благодарен В. А. Буцу и В. А. Балакиреву за интерес к работе и обсуждение ее результатов.

Список литературы

- [1] *Eckman J. P.* // Rev. of Modern Phys. 1981. Vol. 53. N 4. Pt 1. P. 643—654.
- [2] *Заславский Г. М., Чуриков Б. В.* // УФН. 1971. Т. 105. № 1. С. 3—40.
- [3] *Chirikov B. V.* // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. N 5. P. 263—379.
- [4] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [5] *Smith G. R., Kaufman A. N.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 9. P. 1584—1599.
- [6] *Karney C., Bers A.* // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39. N 9. P. 550—554.
- [7] *Шкляр Д. Р.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. Вып. 6. С. 2272—2282.
- [8] *Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолюбский А. П., Туркин Ю. А.* // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. Вып. 4. С. 1279—1289.

Харьковский физико-технический институт АН УССР

Поступило в Редакцию
17 августа 1988 г.
В окончательной редакции
20 февраля 1989 г.