

01; 10

© 1990 г.

ХРОМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ КАНАЛОВ С РЕВЕРСАМИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

М. И. Капчинский, И. Л. Корнев, Л. А. Рогинский

Рассмотрена динамика пучков заряженных частиц в криволинейных транспортных каналах, состоящих из участков со встречным направлением продольного фокусирующего магнитного поля. Показано, что такие реверсы магнитного поля значительно уменьшают отклонения частиц, обусловленные разбросом по импульсу продольного движения, и их применение позволяет спроектировать в принципе полностью ахроматический канал.

Метод фокусировки пучков заряженных частиц с использованием продольного магнитного поля широко применяется в сильноточных циклических ускорителях и транспортных каналах [1-3]. Важные особенности динамики частиц при наличии одновременно вертикального заворачивающего и продольного фокусирующего полей связаны с дрейфовыми эффектами. Одной из них является центробежный дрейф в криволинейных каналах, вызванный отклонением импульса от равновесного значения и приводящий к линейно нарастающему вертикальному отклонению частиц. Одновременно с этим связь продольного и поперечного движений приводит в отсутствие фазирующих сил к линейному нарастанию продольного отклонения [4]. Для некогерентного движения разброс частиц по продольному импульсу вызывает поперечное и продольное расширение сгустка, для когерентного ошибка в импульсе дает поперечное отклонение центра сгустка от оси канала и продольное его отклонение от равновесного положения.

Подавление дрейфовых эффектов достигается за счет введения дополнительных поперечных сил. Так, в схеме ускорителя, описанного в работе [2], источником таких сил являются обмотки, создающие вращающееся по длине канала квадрупольное поле (стеллараторное поле). Не менее успешно задача может быть решена и без дополнительных обмоток, если катушки, создающие продольное магнитное поле, включены с периодическим изменением (реверсированием) направления тока. Для линейных каналов такая конструкция впервые была предложена Дж. Пирсом [5]. В этом случае должно происходить компенсирование дрейфовых эффектов на участках с противоположными направлениями индукции продольного поля, а дополнительные поперечные поля естественным образом возникают в краевой области катушек. Отметим здесь, что проведенный в [6] анализ движения частиц в реверсной системе не учитывал влияния возникающих поперечных магнитных полей. Возможность использования реверсной фокусировки обсуждалась в [7], но там не приведены многие соотношения, необходимые для анализа динамики пучка.

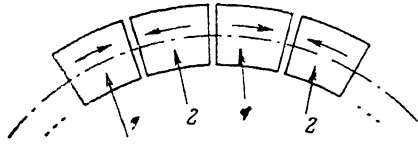
Наша работа имеет целью получение этих соотношений. Для упрощения расчетов считается, что протяженность переходной области между катушками с противоположным направлением поля бесконечно мала. Это справедливо, когда длина циклотронных колебаний частиц велика по сравнению с радиусом обмотки.

Матрица периодического криволинейного транспортного канала с реверсами продольного магнитного поля

Рассматриваемый криволинейный транспортный канал, содержащий продольное и поперечное магнитные поля, представляется в виде периодической структуры. Его схема приведена на рисунке. Каждый период состоит из двух одинаковых участков, отмеченных цифрами 1 и 2, отличающихся направлением вектора индукции продольного магнитного поля, а следовательно, и направлением краевых поперечных магнитных полей на границах участков. Уравнения движения внутри каждого из участков в отсутствие ускоряющих электрических полей имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + q_x^2 x + \Omega \frac{dy}{d\tau} &= K \frac{\Delta p}{p}, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + q_y^2 y - \Omega \frac{dx}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dz}{d\tau} + Kx &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p}, \\ \frac{\Delta p}{p} &= \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где x и y — соответственно радиальное и вертикальное отклонения частицы от равновесной траектории, z — продольное отклонение от равновесной частицы, τ — длина дуги вдоль равновесной траектории, $\Delta p/p$ — относительное отклонение импульса от равновесного значения, $\Omega = eB_z/\beta\gamma mc^2$, e и m — заряд и масса покоя частицы, B_z — индукция продольного магнитного поля, c — скорость



света, β и γ — релятивистские параметры, q_x^2 и q_y^2 — коэффициенты жесткости поперечных сил

$$\begin{aligned} q_x^2 &= K^2(1-n) - \omega_{kx}^2, \\ q_y^2 &= K^2n - \omega_{ky}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

K — кривизна равновесной траектории, считающейся круговой, $K = eB_y/\beta\gamma mc^2$, B_y — индукция заворачивающего магнитного вертикального поля, параметры ω_{kx}^2 и ω_{ky}^2 учитывают действие сил пространственного заряда, выражения для них приведены в [4].

В дальнейшем мы положим $q_x^2 = q_y^2 = q^2$, что позволяет упростить вычисления без ущерба для их общности. Кроме того, будем считать $\gamma \gg 1$, опуская правую часть третьего уравнения системы (1).

Каждой частице пучка ставится в соответствие вектор из координат точки в шестимерном фазовом пространстве

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \Delta p/p \end{pmatrix}, \quad x' = \frac{dx}{d\tau}, \quad y' = \frac{dy}{d\tau}, \quad (3)$$

значения которого в двух любых точках канала τ_1 и τ_2 в силу линейности системы (1) связаны соотношением

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau_2) = \hat{R}(\tau_2, \tau_1) \mathbf{X}(\tau_1), \quad (4)$$

где $\hat{R}(\tau_2, \tau_1)$ — матрица перехода.

Внутри однородного участка коэффициенты системы (1) постоянны, матрица $\hat{R} = \hat{R}(\tau_2, \tau_1) = \hat{R}(\tau_2 - \tau_1)$ является матрицей фундаментальных решений этой системы. Полная матрица участка

$$\hat{L} = \hat{R}_{\text{вых}} \hat{R} \hat{R}_{\text{вх}} \quad (5)$$

учитывает действие краевых полей на входе и выходе [4].

Для положительного направления B_z имеем

$$\hat{L}^+ = \begin{pmatrix} \frac{C_1 + C_2}{2} & \frac{S_1 - S_2}{\Delta\omega} & -\frac{S_1 + S_2}{2} & \frac{C_1 - C_2}{\Delta\omega} & 0 & L_{16} \\ \frac{\Delta\omega}{4}(S_2 - S_1) & \frac{C_1 + C_2}{2} & \frac{\Delta\omega}{4}(C_2 - C_1) & -\frac{S_1 + S_2}{2} & 0 & L_{26} \\ \frac{S_1 + S_2}{2} & \frac{C_2 - C_1}{\Delta\omega} & \frac{C_1 + C_2}{2} & \frac{S_1 - S_2}{\Delta\omega} & 0 & L_{36} \\ \frac{\Delta\omega}{4}(C_1 - C_2) & \frac{S_1 + S_2}{2} & \frac{\Delta\omega}{4}(S_2 - S_1) & \frac{C_1 + C_2}{2} & 0 & L_{46} \\ -L_{26} & -L_{16} & L_{46} & L_{36} & 1 & L_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $C_{1,2} = \cos \omega_{1,2}l$, $S_{1,2} = \sin \omega_{1,2}l$, $l = \tau_2 - \tau_1$ — длина участка,

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(\Omega \pm \Delta\omega), \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \sqrt{\Omega^2 + 4q^2}, \quad (7)$$

элементы шестого столбца матрицы (6) и связанные с ними элементы пятой строки определяются соотношениями

$$\begin{aligned} L_{16} &= \frac{K}{q^2} \left(1 + \frac{\omega_2 C_1 - \omega_1 C_2}{\Delta\omega} \right), & L_{26} &= -\frac{K}{2q^2} (\omega_2 S_1 + \omega_1 S_2), \\ L_{36} &= \frac{K}{q^2 \Delta\omega} (\omega_2 S_1 - \omega_1 S_2), & L_{46} &= \frac{K}{2q^2} (\omega_2 C_1 + \omega_1 C_2 - \Omega), \\ L_{56} &= \frac{K}{q^2 \Delta\omega} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} S_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} S_1 - \Delta\omega l \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Перемножая матрицы участков с противоположными направлениями вектора B_z (это соответствует изменению знака Ω) и полагая, что область перехода между соседними участками бесконечно тонка, найдем матрицу периода структуры $\hat{T} = \hat{L}^- \cdot \hat{L}^+$. Если транспортный канал состоит из n периодов, то его матрица равна n -й степени матрицы \hat{T}

$$\hat{T}^{(n)} = \hat{T}^n = \begin{pmatrix} \cos 2n\psi & \frac{2}{\Delta\omega} \sin 2n\psi & 0 & 0 & 0 & T_{16}^{(n)} \\ -\frac{\Delta\omega}{2} \sin 2n\psi & \cos 2n\psi & 0 & 0 & 0 & T_{26}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cos 2n\psi & \frac{2}{\Delta\omega} \sin 2n\psi & 0 & T_{36}^{(n)} \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta\omega}{2} \sin 2n\psi & \cos 2n\psi & 0 & T_{46}^{(n)} \\ -T_{26}^{(n)} & -T_{16}^{(n)} & -T_{46}^{(n)} & -T_{36}^{(n)} & 1 & T_{56}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$P = \frac{K}{q^2} (\Delta\omega \sin \psi - \Omega \sin \varphi), \quad \psi = \frac{1}{2} \Delta\omega l,$$

$$Q = \frac{K\Omega}{q^2} (\cos \psi - \cos \varphi), \quad \varphi = \frac{1}{2} \Omega l,$$

а элементы шестого столбца равны

$$\begin{aligned} T_{16}^{(n)} &= \frac{2}{\Delta\omega} P \frac{\sin^2 n\psi}{\sin \psi}, & T_{26}^{(n)} &= P \frac{\sin 2n\psi}{2 \sin \psi}, \\ T_{36}^{(n)} &= \frac{2}{\Delta\omega} Q \frac{\sin^2 n\psi}{\sin \psi}, & T_{46}^{(n)} &= Q \frac{\sin 2n\psi}{2 \sin \psi}, \\ T_{56}^{(n)} &= nT_{56} - \frac{P^2 + Q^2}{2\Delta\omega} \frac{n \sin 2\psi - \sin 2n\psi}{\sin^2 \psi}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$T_{56} = \frac{2(\Omega K)^2}{q^4 \Delta\omega} \left[\sin \psi \cos \varphi - \frac{\Delta\omega}{\Omega} \cos \psi \sin \varphi + \frac{q^2}{\Omega^2} (\sin 2\psi - 2\psi) \right].$$

Найденная матрица (9) может быть использована для анализа как когерентных отклонений сгустка частиц, так и некогерентного движения частиц относительно центра сгустка. В случае когерентного движения в величину q^2 включаются слагаемые, учитывающие действие отраженных собственных полей сгустка. При рассмотрении некогерентного движения должны быть учтены силы собственного расталкивания, которые определяются из решения самосогласованной задачи [4, 8]. При ультрарелятивистских энергиях силы кулоновского расталкивания, пропорциональные $1/\gamma^2$, малы по сравнению с силами внешней фокусировки, в пренебрежении ими можно использовать найденную матрицу и для исследования некогерентного движения.

С помощью матрицы (9) можно также вычислить коэффициент уплотнения орбит для кольцевого канала длины $2\pi R = 2nl$

$$\alpha = \frac{\Delta C}{2\pi R} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^{-1} = \frac{c \lg \psi}{4\psi} (P^2 + Q^2) - \frac{1}{2l} T_{56}, \quad (11)$$

где удлинение замкнутой орбиты с неравновесным импульсом

$$\Delta C = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi R} x_p(\tau) d\tau,$$

$x_p(\tau)$ — периодическое решение первых двух уравнений системы (1).

Структурные резонансы

Первые 5 элементов шестого столбца и 4 элемента пятой строки матрицы $\hat{T}^{(n)}$ содержат в знаменателе $\sin \psi$. При $\psi = \pi k$ элементы $T_{26}^{(n)}$ и $T_{16}^{(n)}$ пропорциональны n , т. е. поперечные скорости частиц, обусловленные ошибкой в импульсе $\Delta p/p$, растут пропорционально числу пройденных периодов. Вблизи этой фазы при $\psi = \pi k + \delta$, $|\delta| \ll 1$ линейно с n возрастают и элементы $T_{16}^{(n)}$, $T_{36}^{(n)}$, определяющие радиальные и вертикальные отклонения частиц, обусловленные $\Delta p/p$. Возрастающими становятся и элементы пятой строки. Элемент $T_{56}^{(n)}$, определяющий продольные отклонения из-за $\Delta p/p$, растет пропорционально n^2 в ближайшей окрестности $\psi = \pi k$.

Условие $\psi = \pi k$ можно рассматривать как условие структурного резонанса криволинейного периодического канала с реверсом продольного магнитного поля.

Приведенные результаты справедливы лишь при постоянных параметрах транспортного канала. При наличии ускорения частиц условие резонанса $\psi = (1/2) \Delta\omega l = \pi k$ не выполняется из-за изменения величины $\Delta\omega$ с энергией. Точное решение уравнений движения (1) при меняющихся параметрах может быть получено только численными методами.

Ахроматизм

Дисперсионные свойства канала транспортировки для поперечного движения характеризуются матричными элементами $T_{i6}^{(n)}$ ($i=1, 2, 3, 4$). Они обращаются в нуль, если $\sin n\psi = 0$, а $\sin \psi \neq 0$, что имеет место при

$$\psi = \frac{1}{2} \Delta\omega l = \frac{\pi m}{n}, \quad m \neq kn, \quad (12)$$

где k, m — целые числа больше нуля.

Такой транспортный канал становится ахроматичным, т. е. если набег фазы колебаний разностной частоты $\Delta\omega$ на n периодах составляет $2\pi m$, где m не кратно n , то поперечные отклонения и скорости частиц на выходе канала не зависят от отклонения в импульсе Δp .

В реальных каналах условие ахроматизма (12) точно не выполняется из-за наличия провалов квадрата индукции продольного поля и разброса параметров канала. Для уменьшения их влияния следует выбирать величину ψ посередине между структурными резонансами, а число периодов фокусировки четным

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad n = 2n_1. \quad (13)$$

Условие (13) является частным случаем условия (12).

Продольное отклонение таким выбором параметров исключить не удастся. Подставляя в (10) условия (13), найдем

$$T_{56}^{(n)} = \frac{2(KQ)^2}{q^4 \Delta\omega} n \left[(-1)^k \cos \varphi - \frac{q^2}{\Omega^2} \pi (2k + 1) \right], \quad (14)$$

т. е. в ахроматичном для поперечного движения канале имеет место продольное отклонение от равновесной частицы, пропорциональное числу периодов n и отклонению импульса $\Delta p/p$.

Дисперсионные свойства и продольное движение при больших магнитных полях

Для выявления преимущества в подавлении дрейфа системы фокусировки с реверсами продольного магнитного поля по сравнению с фокусировкой без реверсов нужно сравнить элементы шестого столбца матрицы $\hat{T}^{(n)}$ (9) с такими же элементами матрицы \hat{L}^+ (6), заменив в последней l на $2nl$. Проведем это сравнение для случая сильных магнитных полей, когда $\Omega^2 \gg q^2$, что обычно выполняется для реальных каналов.

Частоты колебаний частиц в этом случае сильно отличаются друг от друга

$$\omega_1 \simeq \Omega \left(1 + \frac{q^2}{\Omega^2} \right), \quad \omega_2 \simeq \left| \frac{q^2}{\Omega} \right|, \quad \Delta\omega \simeq \omega_1, \quad (15)$$

так что $\omega_2 \ll \omega_1$. Проводя разложение по малому параметру q^2/Ω^2 в элементах матриц \hat{L}^+ и \hat{T} , учитывая, что длина участка реверсирования $l \ll 1/\omega_2$, получаем

$$\left| \frac{T_{i6}}{L_{i6}^+} \right| \simeq \frac{q^2}{\Omega^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (16)$$

Это означает, что введение реверсов уменьшает поперечные и продольные отклонения в отношении q^2/Ω^2 . Хотя продольное отклонение и остается линейно возрастающим с числом периодов n , скорость роста также снижается в отношении q^2/Ω^2 .

Однако столь существенное преимущество системы с реверсами проявляется лишь для достаточно длинного канала. Если длина канала невелика, так что $n\omega_2 l \simeq nq^2/\Omega^2 \ll 1$, то дрейф в системе без реверсов не успевает сильно развиться. Но и в этом случае реверсная система дает выигрыш в подавлении вертикального дрейфа

$$\frac{T_{26}^{(n)}}{L_{26}^+} \simeq \frac{1 + \varphi \operatorname{ctg} \varphi}{n\varphi} \sin 2n\varphi, \quad \frac{T_{36}^{(n)}}{L_{36}^+} \simeq \frac{\sin^2 n\psi}{n^2}, \quad (17)$$

причем эффективность подавления растет с ростом n . Для продольных отклонений выигрыш в этом случае отсутствует. Отношение $|T_{56}^{(n)}/L_{56}^+|$ может оказаться и больше, и меньше единицы в зависимости от фаз φ и ψ .

В приближении $q^2/\Omega^2 \ll 1$ выражение (11) для коэффициента уплотнения орбит принимает вид

$$\alpha \simeq \frac{\pi^2}{16} \frac{3 + \varphi \operatorname{ctg} \varphi}{n^2 c^2}. \quad (18)$$

При $\varphi^2 \ll 1$ величина α растет с энергией пропорционально γ^2 , если фокусирующее магнитное поле постоянно.

Заключение

Использование реверсов продольного магнитного поля позволяет существенно подавить дрейфовые эффекты, присущие криволинейным каналам с продольным фокусирующим магнитным полем. Это свойство особенно сильно проявляется при достаточно высоких значениях индукции продольного поля.

Интересной представляется возможность реализации ахроматического криволинейного канала, на выходе которого поперечные отклонения частиц не зависят от разброса по импульсу.

Основной отрицательный эффект реверсной системы фокусировки обусловлен наличием структурных резонансов, присущих любой периодической системе фокусировки.

Список литературы

- [1] *Mondelli A., Roberson C. W.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1983. Vol. NS-30. N 4. P. 3212—3214.
- [2] *Roberson C. W., Mondelli A., Chernin P.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1983. Vol. NS-30. N 4. P. 3162—3164.
- [3] *Golden J., Pasour J., Perhing P. E. et al.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1983. Vol. NS-30. N 4. P. 2114—2116.
- [4] *Капчинский М. И., Корнев И. Л., Рогинский Л. А.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 9. С. 61—66.
- [5] *Pierce J. R.* // J. Appl. Phys. 1953. Vol. 24. N 9. P. 1247.
- [6] *Беневоленский Д. М., Требиш В. Д.* // РИЭ. 1985. Т. 30. № 12. С. 2442—2449.
- [7] *Hughes T. P., Godfrey B. B.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1985. Vol. NS-32. N 5. P. 2092—2094.
- [8] *Рогинский Л. А.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 8. С. 1508—1511.
- [9] *Дербенев Я. С., Мартиросян Ю. Л., Петросян М. Л.* Динамика заряженных частиц в знакопеременном тороидальном магнитном поле // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 8. С. 85—89.

Поступило в Редакцию
26 мая 1989 г.

Примечание к корректурам

В работе [9] также рассмотрен круговой периодический транспортный канал с реверсами продольного фокусирующего магнитного поля. Краевое поле на концах соленоидов в [9] принято, как в случае полубесконечного соленоида (в отличие от нашей работы, где оно аппроксимировано прямоугольным спадом). Однако рассмотренная та фокусирующая структура характеризуется большим набегом фазы колебаний на период фокусировки, что соответствует далеким областям устойчивости решений уравнения Хилла и потому не представляет практического интереса. Кроме того, в [9] при решении основного уравнения (1) допущены некорректные математические преобразования в результате чего неверно определены границы областей устойчивого и неустойчивого движений частицы в канале транспортировки.