

01; 10

© 1990 г.

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ДИНАМИКУ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ ТОРОИДАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Л. Мартиросян

Рассматривается влияние пространственного заряда на динамику электронного пучка в знакопеременном тороидальном постоянном во времени магнитном поле. Показывается, что такая система способна удерживать электронные пучки с током порядка нескольких килоампер и с естественным необходимым условием, чтобы энергия самого магнитного поля была больше энергии ускоряемого электронного пучка. Указывается, что точки неустойчивости одночастичного движения в данном случае превращаются в узкие полосы, которые опять подходящим выбором параметров системы можно проскочить в ускоряющем элементе.

Введение

В работе [1] было рассмотрено одночастичное движение электронов в постоянном во времени знакопеременном тороидальном магнитном поле. Было показано, что такая система способна служить магнитной дорожкой кольцевого ускорителя на средние энергии в широкой области ее изменения, за исключением отдельных точек неустойчивого движения, которые расположены вплотную при малых энергиях и могут быть опасными во время инжекции. Эти точки можно избежать подходящим модулированием режима ускорения или иным способом.

Магнитные и электрические поля

Внешнее магнитное поле создается периодическим расположением по окружности тороидальных соленоидов. Каждый элемент периодичности состоит из двух катушек, имеющих противоположные направления тороидального магнитного поля.

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) (см. рисунок) в линейном приближении по отклонениям от большой оси тора внешнее магнитное поле можно представить в виде [1]

$$H_r^b(r, \theta, z) = \frac{H_0}{R_0} (R_0 + \delta r + \Delta r) \cdot Q(\theta), \quad H_\theta^b(r, \theta, z) = H_0 \cdot P(\theta),$$

$$H_z^b(r, \theta, z) = \frac{H_0}{R_0} (\delta z + \Delta z) \cdot Q(\theta), \quad (1)$$

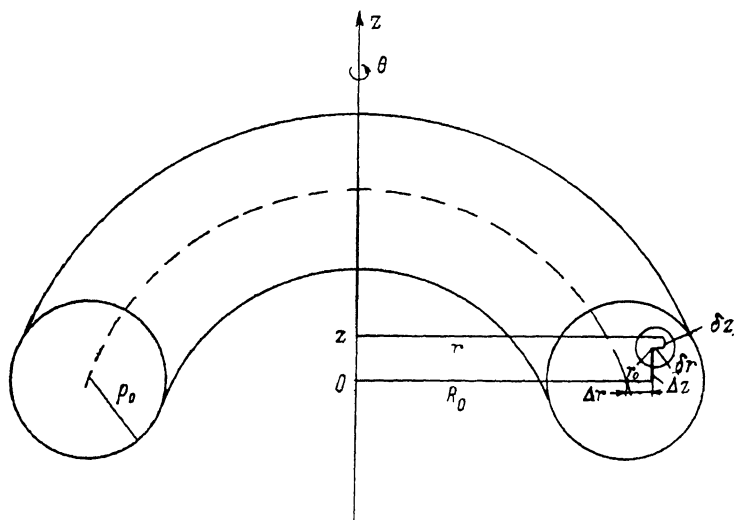
где R_0 — большой радиус тора, H_0 — значение тороидального магнитного поля в центре катушки.

Периодические с периодом $2\pi/N$ (N — число периодов магнитной системы) функции $P(\theta)$ и $Q(\theta) = -(P(\theta)/2)$ зависят от геометрии тороидальных соленоидов.

Численные значения коэффициентов P_k Фурье-разложения функции

$$P(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \cdot e^{ikN\theta}, \quad (2)$$

полученные при помощи ЭВМ для различных значений отношения $(\rho_0 \cdot N)/(\pi \cdot R_0)$ (ρ_0 — малый радиус тора) приводятся в таблице. Так как мы не рассматриваем режим ускорения, то внешнее электрическое поле отсутствует. Для получения математических выражений собственных полей электронного пучка рассмотрим однородные кольцевые пучки кругового сечения, движущиеся



Координаты $(\Delta r, \Delta z)$ и $(\delta r, \delta z)$ для характеристики положения центра пучка относительно окружности $r=R_0$ и положения отдельной частицы относительно центра пучка.

щиеся внутри тороидальной камеры, вблизи ее оси. Такое упрощенное рассмотрение частично оправдано тем, что в тороидальном магнитном поле при

$$v_0^2 \equiv \left(\frac{e \cdot H_0 \cdot R_0}{p \cdot c} \right)^2 \gg 1, \quad (3)$$

где e — заряд электрона, p — его импульс, c — скорость света; амплитуды поперечных колебаний становятся практически одинаковыми по величине и имеют порядок $\sim v_0^{-1}$, имея разность фаз $\sim \pi/2$ [1], а отклонение от оси тора

δ^2	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9	P_{11}
1/4	0.5142	-0.0137	0.0090	-0.0045	0.0028	-0.0018
1/16	0.7396	0.0596	0.0148	-0.0004	0.0017	-0.0009
1/20	0.7699	0.0770	0.0189	0.0012	0.0019	-0.0006
1/25	0.7979	0.0954	0.0242	0.0034	0.0023	-0.0003
1/36	0.8383	0.1262	0.0355	0.0084	0.0037	0.0004

Продолжение

δ^2	P_{13}	P_{15}	P_{17}	P_{19}	P_{21}
1/4	0.0013	-0.0010	0.0008	-0.0006	0.0006
1/16	0.0007	-0.0005	0.0004	-0.0003	0.0003
1/20	0.0006	-0.0004	0.0003	-0.0002	0.0002
1/25	0.0006	-0.0003	0.0002	-0.0002	0.0002
1/36	0.0005	-0.0002	0.0002	-0.0002	0.0002

Примечание. Цифровые значения коэффициентов P_k Фурье-разложения (2) с точностью членов до четвертого знака после запятой получены при помощи ЭВМ.

из-за дрейфа в вертикальном направлении мал в пределах одного элемента периодичности.

При таких предположениях компоненты пологоидального магнитного и электрического полей электронного пучка в линейном приближении по отклонениям от большой оси тора можно представить в виде [2]

$$\begin{aligned} H_z^e(r, \theta, z) &= 2\pi n_0 \beta e \left(\delta z + \frac{r_0^2}{\rho_0^2} \Delta z \right), \quad H_\theta^e(r, \theta, z) = 0, \\ H_r^e(r, \theta, z) &= -2\pi n_0 \beta e \left(\delta r + \frac{r_0^2}{\rho_0^2} \Delta r - \frac{r_0^2}{2R_0} l_H \right), \\ E_r^e(r, \theta, z) &= 2\pi n_0 e \left(\delta r + \frac{r_0^2}{\rho_0^2} \Delta r + \frac{r_0^2}{2R_0} l_E \right), \\ E_z^e(r, \theta, z) &= 2\pi n_0 e \left(\delta z + \frac{r_0^2}{\rho_0^2} \Delta z \right); \quad E_\theta^e(r, \theta, z) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где n_0 — плотность пучка; r_0 — его радиус; параметры $l_H, l_E \approx 1$, мы в дальнейшем их будем опускать.

Линеаризация уравнений движения и их решения

Запишем уравнения движения Ньютона—Лоренца в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma \dot{r})}{dt} - \gamma r \dot{\theta}^2 &= \frac{e}{m} \left[E_r + \frac{1}{c} (r \dot{\theta} H_z - \dot{z} H_\theta) \right], \\ \frac{1}{r} \frac{d(\gamma r^2 \dot{\theta})}{dt} &= \frac{e}{m} \left[E_\theta + \frac{1}{c} (\dot{z} H_r - r \dot{\theta} H_z) \right], \\ \frac{d(\gamma \dot{z})}{dt} &= \frac{e}{m} \left[E_z + \frac{1}{c} (r \dot{\theta} H_\theta - r \dot{\theta} H_r) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая, что траектория электрона в знакопеременном тороидальном магнитном поле представляет сложную кривую вокруг средней окружности вблизи оси тора [1], решение системы уравнений (5) начнем со второго уравнения, оставляя в правой части только линейные по $r_1 = \Delta r + \delta r$ и $z_1 = \Delta z + \delta z$ члены (см. рисунок). Принимая приблизительно в среднем $\langle \dot{\theta} \rangle = 0$, из этого уравнения получаем

$$\left(\gamma + \frac{v_B}{2} \right) r^2 \dot{\theta} = \text{const}, \quad v_B = \frac{\pi n_0 e^2 r_0^2}{m_0 c^2}, \quad (6)$$

что является выражением теоремы Буша о сохранении момента импульса, где γ — приведенная энергия электрона, m_0 — его масса покоя, v_B — параметр Буднера.

Следовательно, средняя относительная разность угловых скоростей одночастичного и пучкового движения имеет порядок

$$\frac{\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_n}{\dot{\theta}_0} = \frac{v_B/2\gamma}{1 + v_B/2\gamma}. \quad (7)$$

Из (7) можно сделать заключение, что появляется некое «трение», которое замедляет ход пучка относительно одночастичного движения. Подставляя в остальные два уравнения системы (5) значение из (6) и переходя к переменной θ по формулам

$$\dot{r} = r' \cdot \dot{\theta}; \quad \dot{z} = z' \cdot \dot{\theta} \quad (8)$$

и т. п., после линеаризации окончательно получаем две системы дифференциальных уравнений для координат центра пучка и отдельных частиц внутри пучка соответственно

$$\Delta r'' = -\Gamma(\gamma) \Delta r' + \left[n_1 + \frac{r_0^2}{\rho_0^2} n_2 \right] \Delta r + v_0 Q(0) \Delta z - v_0 P(\theta) \Delta z' + R_1,$$

$$\Delta z'' = -\Gamma(\gamma) \Delta z' + n_2 \frac{r_0^2}{\rho_0^2} \Delta z + v_0 P(\theta) \Delta r' - v_0 Q(\theta) \Delta r, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta r'' &= -\Gamma(\gamma) \delta r' + (n_1 + n_2) \delta r + v_0 Q(0) \delta z - v_0 P(\theta) \delta z', \\ \delta z'' &= -\Gamma(\gamma) \delta z' + n_2 \delta z + v_0 P(\theta) \delta r' - v_0 Q(\theta) \delta r, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma) &= \frac{1}{8} \frac{r_0^2}{R_0^2} \beta^2 \frac{\gamma'}{\gamma(1+v_B/2\gamma)}, \quad n_1(\gamma) = 1 + v_p^2 \frac{r_0^2}{R_0^2} \left(1 + \frac{3}{4} \beta^2\right), \\ n_2(\gamma) &= \frac{v_p^2(1-\beta^2)}{2}, \quad R_1 = R_0 \left[1 + \frac{v_p^2}{4} \frac{r_0^2}{R_0^2} (1 + \beta^2)\right], \quad v_p^2 = \frac{\omega_p^2}{\Omega_0^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$\omega_p^2 = (4\pi n_0 e^2)/(m_0 \gamma)$ — плазменная частота, Ω_0 — циклическая частота, штрих над буквой означает дифференцирование по θ .

Системы уравнений (10) и (11) имеют одинаковый вид, за исключением наличия свободного члена R_1 в правой части уравнения (10) и множителя $\epsilon^2 = r_0^2/\rho_0^2$ при $n_2(\gamma)$. Для упрощения дальнейших вычислений заметим, что из уравнений (10) и (11) следует малость влияния пространственного заряда при релятивистских скоростях, как и ожидалось [3]. При малых же энергиях вклад члена $n_1(\gamma)$ значительно меньше по сравнению с членом $n_2(\gamma)$ и его можно опустить. Введя комплексную амплитуду u , вместо (10) и (11) будем рассматривать общее уравнение типа

$$u'' + a(\gamma, \theta) u' + b(\gamma, \theta) u = R^*, \quad (12)$$

где для системы (10)

$$\begin{aligned} u &= \Delta r + i \Delta z, \quad Q(\gamma, \theta) = \Gamma(\gamma) - i v_0 P(\theta), \\ b(\gamma, \theta) &= i v_0 Q(\theta) - n_2(\gamma) \frac{r_0^2}{\rho_0^2}, \quad R^* = R_1, \end{aligned} \quad (13)$$

а для системы (11) соответственно

$$\begin{aligned} u &= \delta r + i \delta z, \quad Q(\gamma, \theta) = \Gamma(\gamma) - i v_0 P(\theta), \\ b(\gamma, \theta) &= i v_0 Q(\theta) - n_2(\gamma), \quad R^* = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

После известного фазового преобразования Лиувилля приходим к обычному уравнению Хилла с правой частью, решение которого ищется в виде функций Флокье [4, 5]. Опуская сложные и довольно громоздкие математические выкладки, приведем лишь окончательное условие устойчивого движения

$$\frac{v_0^2}{4} (g_0 \pm g_2) - n_2(\gamma) > 0, \quad (15)$$

где $g_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n P_{k-n}$, $n \neq k$.

Узкие области неустойчивости начинаются на положительной полуоси в точках [4]

$$g_0 \frac{v_0^2}{4} - n_2(\gamma) = k^2; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

которые надо обойти в ускоряющем элементе.

Условие (16) является обобщением соответствующего условия неустойчивости одночастичного приближения [1].

Неравенство (15) фактически означает, если его переписать в виде

$$n_0 m_0 e^2 \gamma < \frac{1}{g_0 \pm g_2} \frac{H_0^2}{\pi}, \quad (17)$$

что для поддержания электронного пучка внутри вакуумной камеры такой магнитной системой необходимо, чтобы энергия самого магнитного поля была больше энергии ускоряемого электронного пучка. Коэффициент в неравенстве (17) учитывает геометрию размеров тороидальных соленоидов и их расположения. Полученные по формуле (15) их значения для приведенных в таблице практически разумных значений $\delta = (\rho_0 N) / (\pi R_0)$ хорошо вписываются в формулу (17) и не усиливают вышеизложенное ограничение на энергию пучка.

Как видно из (14), условие (15) жестко сказывается на удержании частиц внутри пучка. А для удержания пучка внутри вакуумной камеры благодаря наличию малого множителя $\epsilon^2 = r_0^2 / \rho_0^2$ при $n_2(\gamma)$ это условие выполняется намного легче.

В конце приводим численные оценки. При значениях параметров $\delta = 0.25$, $H_0 = 1.2 \cdot 10^5$ А/м, $R_0 = 0.5$ м, $T = 6$ МэВ ($\gamma = 12$), $r_0 = 0.01$ м, $N = 12$ из (17) для максимального тока получаем значение $I_{\max} \approx 1.3$ кА.

Заключение

Как показывают полученные в настоящей работе результаты, кольцевые магнитные дорожки со знакопеременным тороидальным магнитным полем могут служить хорошей ведущей системой для накопительных систем и кольцевых индукционных ускорителей электронов средних энергий и с током порядка нескольких килоампер. Так как все ограничения фактически накладываются на единственный параметр $\nu_0 = (eH_0 R_0) / (pc)$, то ясно, что с применением сверхпроводящих соленоидов можно существенно повысить ведущее магнитное поле, тем самым увеличивая максимально возможную добываемую энергию электронных пучков.

Процесс возможного группирования электронов в пучке вследствие длительного циклического движения в периодической магнитной структуре, «разбухание» пучка при его переходе краев примыкания тороидальных соленоидов и другие нелинейные поправки, которые не рассматривались в настоящей работе, могут привести к различным резонансным явлениям и нуждаются в более детальном исследовании в дальнейшем.

Выражаю искреннюю благодарность М. Л. Петросяну за весьма полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Дербенева Я. С., Мартиросян Ю. Л., Петросян М. Л. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 8. С. 85—89.
- [2] Chernin D., Sprangle P. // Part. Acc. 1982. Vol. 12. P. 85—100.
- [3] Миллер Р. // Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
- [4] Стретт М. Д. Функция Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Киев, 1935. 238 с.
- [5] Мак-Лаллан Н. В. Теория и приложения функции Матье. М.: ИЛ, 1953. 476 с.

Ереванский физический институт

Поступило в Редакцию
27 февраля 1989 г.
В окончательной редакции
13 сентября 1989 г.