01; 03

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАПЛИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В СТОХАСТИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А. Э. Лазарянц, А. И. Григорьев

Решается задача о параметрической раскачке неустойчивости капиллярных волн в капле маловязкой жидкости во внешнем однородном, стохастически изменяющемся во времени электрическом поле. Найдены критические условия реализации указанной неустойчивости. Проведенная оценка возможности развития параметрической неустойчивости капиллярных волн в капле во внутриоблачном поле грозового облака приводит к физически реальным значениям необходимых для этого амплитуд флуктуаций величины поля. Обсуждаемое явление может лежать в основе физического механизма инициирования разряда линейной молнии.

Параметрическая неустойчивость капли или жидкого мениска на срезе капилляра, по которому жидкость подается, во внешнем электрическом поле, зависящем от времени, представляет интерес в связи с проблемой получения при электродиспергировании потоков монодисперсных капель с регулируемыми размерами и зарядами, а также в связи с различными геофизическими проблемами [1–4]. В частности, значительный интерес представляет задача выяснения механизма начальной стадии разряда линейной молнии, так как, несмотря на длительную историю изучения молнии, о механизме ее зарождения до сих пор неизвестно ничего. Не существует даже плохих, слабо физически и математически аргументированных моделей ее инициирования. Все, чем располагает современное естествознание по этому вопросу, — это общие утверждения, что линейная молния может инициироваться при интенсивном коронном разряде с группы близко расположенных, сильно заряженных крупных капель и обводненных градин [4, 5]. Но данные измерений внутриоблачных полей и зарядов отдельных капель и градин дают значения величин, при которых зажигание коронного разряда невозможно. В этой связи представляется целесообразным оценить вероятность развития в капле неустойчивости капиллярных волн в стохастически изменяющемся со временем электрическом поле. Учтем, что внутриоблачное электрическое поле грозовых облаков представляет собой результат суперпозиции кулоновских и дипольных полей весьма большого количества отдельных, движущихся, сталкивающихся, колеблющихся капель и состоит из постоянной E_* и флуктуирующей E_0 компонент. Величина постоянного слагаемого недостаточна для развития неустойчивости в облачных каплях ($E_* \leqslant 3\cdot 10^3$ В/см), поэтому остается попытаться связать возможный механизм зажигания коронного разряда с капель с их параметрической неустойчивостью и эмиссией на финальной стадии этой неустойчивости высокодисперсных, сильно заряженных микрокапелек, в окрестности которых уже может зажигаться коронный разряд в соответствии с механизмом, описанным в [6, 7]. Дальнейшая же эволюция во внутриоблачном электрическом поле образовавшейся газоразрядной плазмы и зарождение канала разряда линейной молнии может происходить в соответствии с моделью начальной стадии разряда, предложенной в [8].

Пусть сферическая капля радиуса R идеально проводящей, маловязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с коэффициентом кинематической вязкости ν

и поверхностного натяжения σ находится в однородном электрическом поле, амплитуда которого хаотически зависит от времени $\mathbf{E}=\mathbf{E}(t)$. Учтем также, что в капле существует капиллярное волновое движение, приводящее к искажению сферической формы поверхности капли вида $\xi(\theta, \varphi, t)$ ($|\xi| \ll R$). В сферической системе координат с началом в центре капли уравнение поверхности капли имеет вид

$$r(\theta, \varphi, t)=R+\xi(\theta, \varphi, t).$$

Угол θ отсчитывается от $\mathbf{E}$. Разложим возмущение $\xi(\theta, \varphi, t)$ в ряд по сферическим функциям

$$\xi(\theta, \varphi, t)=\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} z_l^m(t) Y_l^m(\theta, \varphi), \tag{1}$$

где z_l^m — зависящие от времени амплитуды отдельных мод капиллярных волн, из которых, согласно (1), складывается возмущение формы поверхности ξ.

Во внешнем электрическом поле $E(t)$, зависящем от времени, амплитуды некоторых мод могут изменяться. Уравнение, описывающее изменение амплитуд z_l^m со временем имеет вид (см. Приложение)

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{l}\left\{\frac{d^2 z_l^m}{dt^2}+2(l-1)(2l+1)\frac{\nu}{R^2}\frac{dz_l^m}{dt}+\right.$$
$$\left.+l(l-1)(l+2)\frac{\sigma}{R^3\rho} z_l^m\right\} Y_l^m=\frac{1}{R\rho} P_E, \tag{2}$$

где P_E — добавка к давлению электрического поля на поверхность капли, вызванная искажением $\xi(\theta, \varphi, t)$ сферической формы капли, имеющая вид [2]

$$P_E=\frac{9E^2(t)}{4\pi R}\left\{\cos\theta \sum_{l, m}(l+1) A_l^m Y_l^m-2\xi\cos^2\theta\right\},$$
$$A_l^m(t)=\int \xi(\theta, \varphi, t) Y_l^m(\theta, \varphi)\cos\theta d\Omega. \tag{3}$$

Подставим с учетом известных рекуррентных соотношений для $\cos\theta\, Y_l^m$ и $\cos^2\theta\, Y_l^m$ (1) в (3), а результат — в (2), тогда, перенося в получившемся выражении все слагаемые влево и собирая их под одним знаком суммы, получим разложение в ряд по сферическим функциям некоторого выражения. Используя ортогональность Y_l^m и приравнивая нулю коэффициенты при сферических функциях разного порядка, получим систему связанных уравнений типа Матье—Хилла, описывающих эволюцию в $E(t)$ амплитуд различных мод капиллярных волн,

$$\frac{d^2 z_l^m}{dt^2}+2\varepsilon_l \frac{dz_l^m}{dt}+\omega_l^2 z_l^m-\varkappa(t)\{[l^2 a_{l+1, m}^2+l(l+2) a_{l, m}^2]\times$$
$$\times z_l^m+l(l-2) a_{l-1, m} a_{l, m} z_{l-2}^m+l^2 a_{l+1, m} a_{l+2, m} z_{l+2}^m\}=0, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_l=(l-1)(2l+1)\frac{\nu}{R^2}, \quad \omega_l^2=\omega_0^2 b_l,$$

$$\omega_0^2=\frac{\sigma}{R^3\rho}, \quad b_l=l(l-1)(l+2),$$

$$a_{l, m}=\left[\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}\right]^{1/2}, \quad \varkappa(t)=\frac{9E^2(t)}{4\pi R^2\rho}.$$

Если диссипация в системе мала, то система реагирует на те части спектра внешнего воздействия, частоты которых близки к собственным частотам системы. Поэтому для приближенного рассмотрения внешнее воздействие может быть заменено белым шумом, спектральная плотность которого равна спектральной плотности входного сигнала при собственных частотах системы. В нашем случае примем $E^2(t)=E_0^2\zeta(\omega_l t)$, где $\zeta(\omega_l t)$ — стационарный нормальный белый шум единичной интенсивности. Учтем далее, что при $\varepsilon_l>0$ и $\omega_l^2>$

$> |\varkappa(t)|$ неустойчивость в системах данного типа может быть только параметрической, и дальнейшее рассмотрение проведем в предположении $\max|\varkappa(t)| \ll \omega_0^2$. В этом случае взаимодействие между модами мало́ и в линейном по $|\varkappa|/\omega_0^2$ приближении его можно не учитывать [2, 9]. С учетом этого (4) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 z_l^m}{d\tau_l^2} + 2\gamma_l \frac{dz_l^m}{d\tau_l} + [1 - wA_l^m \zeta(\tau_l)]\, z_l^m = 0, \tag{5}$$

где введены обозначения

$$\tau_l = t\omega_l, \quad E^2(t) = E_0^2 \zeta(\tau_l),$$

$$\gamma_l = \varepsilon_l \omega_l^{-1}, \quad w = \frac{9}{4\pi} \frac{E_0^2 R}{\sigma},$$

$$A_l^m = \frac{1}{(l-1)(l+2)} \left[l \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1} + (l-2) \frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1} \right].$$

Уравнения вида (5) достаточно подробно исследованы на устойчивость решений (см., например, [10]). Известно, что неустойчивые решения появляются при выполнении условия [10]

$$(A_l^m w)^2 > \alpha \gamma_l$$

или

$$\left(\frac{9RE_0^2}{4\pi\sigma} A_l^m \right)^2 > \alpha \frac{\varepsilon_l}{\omega_l} = \alpha \sqrt{\frac{l-1}{l(l+2)}} (2l+1)\, \nu \sqrt{\frac{\rho}{R\sigma}}, \tag{6}$$

где значение коэффициента α определяется порядком корреляционных моментов, учтенных при анализе.

Согласно [10], при увеличении порядка моментов значение α сходится к некоторому пределу, равному в анализируемой ситуации ~ 0.25. Отсюда несложно найти ограничение снизу на амплитудное значение напряженности поля E_0, при котором возможна параметрическая стохастическая неустойчивость. Для наиболее неустойчивой основной моды с $l=2$, $m=0$ в гауссовой системе получим

$$E_0 \geqslant 2.7 \sqrt[8]{\frac{\sigma^3 \nu^2 \rho}{R^5}}.$$

Для капли воды при $R=1$ мм это условие дает $E_0 > 3$ кВ/см, что совпадает с величиной постоянной компоненты внутриоблачного поля. Несложно, однако, видеть, что стохастические флуктуации напряженности поля такой амплитуды в фиксированной точке могут вызываться за счет диффузионного и турбулентного движения облачных капель в выделенном микрообъеме. Так, если крупные облачные капли с диаметрами диапазона размеров от 30 мкм до 1 мм (концентрация которых в облаке $\sim 10^2$—10^3 см$^{-3}$ [11]) имеют заряды, соответствующие значению параметра Рэлея $W = Q^2/(16\pi\sigma R^3)$, в десять раз меньше критического (равного единице), то они будут создавать кулоновские поля напряженностью ~ 3 кВ/см на расстоянии, в несколько раз превышающем их диаметры.

Приложение

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ — поле скоростей в жидкости, p — отклонение давления от своего равновесного значения. Линеаризованное уравнение Навье—Стокса для рассматриваемой задачи запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{П. 1}$$

Кинематическое и динамические граничные условия к нему

$$r = R: \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r, \tag{П. 2}$$

$$P_{r\theta}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}u_\theta=0, \qquad (\text{П. 3})$$

$$P_{r\varphi}\equiv\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}u_\varphi=0, \qquad (\text{П. 4})$$

$$P_{rr}\equiv p-2\rho\nu\frac{\partial U_r}{\partial r}=P_\sigma-P_E, \qquad (\text{П. 5})$$

где P_{rr}, $P_{r\theta}$, $P_{r\varphi}$ — компоненты тензора напряжений, а P_σ и P_E — лапласовское давление и давление электрического поля соответственно, причем

$$P_\sigma=-\frac{\sigma}{R^2}(2+\hat{L})\,\xi, \qquad (\text{П. 6})$$

где $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах. Все производные в (П.2)—(П.6) отнесены к невозмущенной поверхности капли, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [12].

В уравнениях перейдем к безразмерным переменным, используя в качестве характерных масштабов величины.

$$r_*=R,\quad t_*=\sqrt{\frac{R^3\rho}{\sigma}},\quad u_*=\sqrt{\frac{\sigma}{R\rho}},$$

$$p_*=\frac{\sigma}{R},\quad \nu_*=\sqrt{\frac{R\sigma}{\rho}}.$$

За безразмерными величинами сохраним те же буквенные выражения. Разделим $\mathbf{u}$ на потенциальную и соленоидальную компоненты

$$\mathbf{u}=\nabla\Phi+\mathbf{w},\quad \operatorname{div}\mathbf{w}$$

и исключим давление p из системы уравнений при помощи соотношения

$$p=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

В результате вместо (П. 1), (П. 5)

$$\Delta\Phi=0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}=\nu\Delta\mathbf{w}\qquad \operatorname{div}\mathbf{w}=0,$$

$$r=1:\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}+2\nu\frac{\partial u_r}{\partial r}-(2+\hat{L})\,\xi=P_E. \qquad (\text{П. 7})$$

Используем далее такое интегральное преобразование $f(t)\to F(s)$, что

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t}\to s\cdot F(s).$$

Решение для потенциальной компоненты поля скоростей будем искать в виде

$$\Phi=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_1(s)\,r^lY_l^m.$$

Для соленоидальной компоненты получаем уравнения

$$\Delta\mathbf{w}=\frac{s}{\nu}\mathbf{w},\quad \operatorname{div}\mathbf{w}=0. \qquad (\text{П. 8})$$

Учитывая, что соленоидальное поле может быть представлено в виде суммы полоидального и тороидального полей и тороидальное поле не влияет на колебания поверхности в силу нулевой радиальной компоненты поля, будем искать решение уравнений (П. 8) в виде разложения по полоидальным полям

$$w_r = \sum_{l,\, m} \frac{l(l+1)}{r^2} v(r,\ s)\, Y_l^m,$$

$$w_\theta = \sum_{l,\, m} \frac{1}{r} \frac{\partial v(r,\ s)}{\partial r} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta},$$

$$w_\varphi = \sum_{l,\, m} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v(r,\ s)}{\partial r} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi}. \qquad (\text{П. }9)$$

Здесь и далее для упрощения записи у функций v и коэффициентов c_1, c_2 опускаются индексы l, m. Подставляя (П. 8) в (П. 7), получим

$$\frac{\partial^2 v(r,\ s)}{\partial r^2} - \left[\frac{s}{\nu} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] v(r,\ s) = 0. \qquad (\text{П. }10)$$

Безразмерную вязкость ν будем считать малой величиной, поэтому достаточно получить уравнение поверхностных колебаний капли с точностью до величин не выше первого порядка по ν. Сделаем замену переменной

$$r = 1 - \varepsilon y, \quad y = \frac{1-r}{\varepsilon}, \quad y \geqslant 0,$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{\nu}{s}, \quad \varepsilon \ll 1. \qquad (\text{П. }11)$$

Уравнение (П. 10) примет вид

$$\frac{\partial^2 v(y,\ s)}{\partial y^2} - \left[1 + \varepsilon^2 \frac{l(l+1)}{(1-\varepsilon y)^2}\right] v(y,\ s) = 0.$$

Его приближенное решение имеет вид

$$v(y,\ s) \approx c_2(s)\left[e^{-y} + O(\varepsilon^2)\right]$$

или

$$v(r,\ s) \approx c_2(s) \exp\left(\frac{r-1}{\varepsilon}\right). \qquad (\text{П. }12)$$

Для нахождения связи между $c_1(s)$ и $c_2(s)$ воспользуемся граничным условием (П. 3). Граничное условие (П. 4) сводится к (П. 3)

$$r = 1: \quad 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - 2\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} - w_\theta = 0$$

или

$$2(l-1)\varepsilon^2 c_1(s) + \left[1 - 2\varepsilon + l(l+1)\varepsilon^2\right] c_2(s) = 0. \qquad (\text{П. }13)$$

Отклонение от невозмущенной поверхности ξ также разложим в ряд по сферическим функциям в виде (см. (1))

$$\xi = \sum_{l,\, m} z_l^m(s)\, Y_l^m,$$

где связь $z(s)$ с $c_1(s)$ и $c_2(s)$ находится при помощи (П. 2) (здесь и далее индексы l, m у z также опускаем)

$$r = 1: \ s \cdot \xi = u_r$$

или

$$s \cdot z(s) = l c_1(s) + l(l+1) c_2(s). \qquad (\text{П. }14)$$

Разрешая систему (П. 13), (П. 14) относительно $c_1(s)$, $c_2(s)$ и учитывая (П. 11), получим

$$c_1(s) = \frac{1}{l}\left[1 + 2(l-1)(l+1)\frac{\nu}{s}\right] s \cdot z(s), \qquad (\text{П. }15)$$

$$c_2(s) = -\frac{1}{l} 2(l-1)\nu z(s). \qquad (\text{П. }16)$$

Подставляя в (П. 7) выражение для Ф, а также (П. 5), (П. 12), (П. 15), (П. 16) и совершая обратное интегральное преобразование, получаем

$$\sum_{l,\,m}\left\{\frac{1}{l}\frac{d^2z(t)}{dt^2}+\frac{2}{l}(l-1)(2l+1)\nu\frac{dz(t)}{dt}+(l-1)(l+2)z(t)\right\}Y_l^m=P_E(t)$$

или в размерных переменных

$$\sum_{l,\,m}\frac{1}{l}\left\{\frac{d^2z}{dt^2}+2(l-1)(2l+1)\frac{\nu}{R^2}\frac{dz}{dt}+l(l-1)(l+2)\frac{\sigma}{R^3\rho}z\right\}Y_l^m=\frac{1}{R\rho}P_E(t).$$

Список литературы

[1] *Sample S. B., Bollini R.* // J. Colloid Interface Sci. 1972. Vol. 41. N 2. P. 185—193.
[2] *Григорьев А. И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50—55.
[3] *Григорьев А. И.* // Метеорология и гидрология. 1988. № 5. С. 67—75.
[4] *Krehbiel P. R.* // Studies in Geophysics. The Earth's Electrical Environment. Washington: National Academy Press, 1986. P. 90—113.
[5] *Имянитов И. М.* // Тр. II Всесоюз. симпозиума. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. С. 94—99.
[6] *Григорьев А. И., Синкевич О. А.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 7. С. 1276—1283.
[7] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 5—15.
[8] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6—13.
[9] *Cheng K. J.* // Phys. Lett. 1985. Vol. 112A. N 8. P. 392—396.
[10] *Болотин В. В., Москвин В. Г.* // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 88—94.
[11] *Мазин И. П., Шметер С. М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 279 с.
[12] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 23 июня 1989 г.