

09

© 1990 г.

ОГРАНИЧЕНИЕ ФАКТОРА КАЧЕСТВА КВАНТОВОГО ДИСКРИМИНАТОРА ЧАСТОТЫ БЫСТРЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ РАДИОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ

А. К. Вершовский, А. С. Пазгалев, Н. Н. Якобсон

Исследовано влияние флуктуационных характеристик резонансного радиополя на разрешающую способность квантового дискриминатора частоты. Получены аналитические выражения для избыточных шумов, вносимых флуктуациями радиополя при наличии регулярной фазовой модуляции, и приведены оценки, показывающие, что при современной технике генерации СВЧ полей фактор качества квантового дискриминатора с оптической накачкой лимитирован флуктуациями радиополя на частотах, кратных частоте модуляции. Для реализации предельных (лимитированных дробовыми шумами фототока) значений параметра качества требуются источники СВЧ полей, характеризующиеся подавлением до уровня $-(110-120)$ дБ по отношению к несущей составляющих в спектре фазово-частотных флуктуаций в области удвоенной частоты модуляции.

Введение

Проблема реализации предельной разрешающей способности (фактора качества) квантового дискриминатора частоты (КДЧ), возникающая в задачах стабилизации частоты и квантовой магнитометрии, прямо связана с полным уровнем шумов в канале регистрации сигнала. Существенный вклад в шумы наблюдаемых сигналов могут вносить не устраняемые системой автоподстройки частоты (АПЧ) быстрые флуктуации индуцирующего переходы резонансного радиополя. Эта проблема в первую очередь затрагивает прецизионные СВЧ дискриминаторы, использующие сигналы резонансов, возникающих в населенностях рабочих состояний; наиболее остро она проявилась в схемах с оптическим детектированием, характеризующихся высокими уровнями сигналов $[1-3]$. Так, фактор качества рубидиевого дискриминатора частоты (РДЧ) с оптической накачкой и оптическим детектированием сигнала в пределе, обусловленном дробовыми шумами фототока, может достигать величин $10^3 \text{ Гц}^{-1} \times \times \text{с}^{-1/2}$, однако шумы, вносимые радиополем, формируемым от источников с кратковременной стабильностью $10^{-12} \text{ с}^{-1/2}$, ограничивают значения фактора качества величинами порядка $10^2 \text{ Гц}^{-1} \cdot \text{с}^{-1/2} [3-5]$. Применение оптического детектирования в пучковых дискриминаторах $[6, 7]$ должно наряду с увеличением отношения сигнала к среднеквадратичной амплитуде шумов канала регистрации привести к возникновению подобной ситуации, т. е. к ограничению фактора качества флуктуациями радиополя.

Появление в КДЧ избыточных шумов, обусловленных флуктуациями радиополя, связано с применением вспомогательной фазовой (частотной) модуляции. Сигнал в разности населенностей рабочих уровней атомной системы определяется квадратичной сверткой действующего радиополя и поляризации рабочих состояний. Поэтому в полный сигнал вносят вклад все комбинационные частоты флуктуационного спектра радиополя и регулярных спектральных компонент модуляции. Система регистрации выделяет составляющую сигнала на частоте модуляции; информационная часть сигнала связана с регулярным отклонением (расстройкой) частоты радиополя относительно частоты перехода, а также с флуктуациями радиополя, лежащими в полосе частот $\pm 1/T$ вокруг

несущей (здесь T — постоянная времени интегрирующего фильтра или динамическая постоянная времени кольца АПЧ). Компоненты флуктуационного спектра радиополя на частотах, кратных частоте модуляции, при таком нелинейном преобразовании переносятся в регистрируемый на частоте модуляции сигнал, образуя избыточный шум. При использовании КДЧ в схемах стабилизации частоты этот шум схемой АПЧ переносится в низкочастотные флуктуации резонансного радиополя, что приводит к снижению кратковременной стабильности схемы стандарта.

В настоящей работе представлено последовательное описание формирования резонанса в населенностях в схеме с регулярной фазовой модуляцией резонансного радиополя, содержащего в спектре флуктуационную добавку. Получены аналитические выражения для избыточных шумов, вносимых радиополем, и проведены количественные оценки значений параметра качества, достижимых при существующей технике генерации резонансного СВЧ поля.

1. Представим действующее радиополе в виде

$$U(t) = U_0 [1 + a(t)] e^{i\omega t + i\varphi(t)} + \text{с. с.}, \quad (1)$$

где $a(t)$ и $\varphi(t)$ — вещественные стационарные случайные процессы, такие что

$$E\{a\} = E\{\varphi\} = 0, \quad E\{a \cdot \varphi\} = 0, \quad E\{a^2\} = A_a^2, \quad E\{\varphi^2\} = A_\varphi^2, \quad A_a^2, A_\varphi^2 \ll 1. \quad (2)$$

Тогда можно записать

$$U(t) \simeq U_0 [1 + z(t)] e^{i\omega t} + \text{с. с.}, \quad (3)$$

где $z(t) = a(t) + i\varphi(t)$ — стационарный комплексный случайный процесс, $E\{z\} = 0$, $E\{zz^*\} = A_a^2 + A_\varphi^2$.

Величины $z(t)$, $a(t)$, $\varphi(t)$ допускают спектральные представления вида

$$z(t) = \int e^{ixt} ds_z(x), \quad a(t) = \int e^{ixt} ds_a(x), \quad \varphi(t) = \int e^{ixt} ds_\varphi(x), \quad (4)$$

где x — случайные процессы с ортогональными приращениями и

$$ds_z(x) = ds_a(x) + i ds_\varphi(x). \quad (5)$$

Величина $dS_z(x) = E\{ds_z ds_z^*\}$ описывает спектральную плотность флуктуаций поля в окрестности регулярной частоты $\omega + x$, а суммирование в общем случае следует понимать как суммирование по Лебегу [8]. Такое определение спектральных плотностей позволяет обойти обычные формальные затруднения при переходе от стационарных случайных процессов к их спектрам [9].

Радиополе для возбуждения двойного резонанса в КДЧ обычно формируется путем умножения и синтеза частоты, соответствующей рабочему переходу из сигналов высокостабильного кварцевого генератора. Существует много моделей, описывающих флуктуационные спектры таких генераторов и шумы, вносимые процедурой синтеза [10]. В рассматриваемом нами случае условие (2) ограничивает процессы фазово-частотных флуктуаций случаем процессов с ограниченной вариацией фазы, что, однако, позволяет существенно упростить рассмотрение, не снижая общности результатов. В конечном итоге нас будут интересовать параметры флуктуационного спектра в узкой окрестности нескольких фиксированных частот, лежащих в полосе порядка ширины рабочего резонанса. Как будет показано ниже, именно эти параметры полностью определяют шумовые свойства сигнала дискриминатора независимо от способа формирования спектра радиополя.

2. Рассмотрим отклик атомной системы, основное состояние которой расщеплено на два подуровня $|1\rangle$ и $|2\rangle$, на совместное воздействие оптической накачки и радиополя вида

$$U = U_0 [1 + z(t)] e^{i\omega t + i\Phi_M} + \text{с. с.}, \quad (6)$$

где $\Phi_M = q \sin \Omega t$.

Эволюция элементов матрицы плотности ρ_{ik} такой системы описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned}
i\hbar\dot{\rho}_{11} &= -\rho_{12}H_{21} + \rho_{21}H_{12} - i\hbar\rho_{11}(W_1 + \gamma_1) + i\hbar R/2, \\
i\hbar\dot{\rho}_{22} &= -\rho_{21}H_{12} + \rho_{12}H_{21} - i\hbar\rho_{22}(W_2 + \gamma_1) + i\hbar R/2, \\
i\hbar\dot{\rho}_{12} &= -\rho_{12}(H_{22} - H_{11}) + H_{12}(\rho_{22} - \rho_{11}) - i\hbar\rho_{12}[(W_1 + W_2)/2 + \gamma_2], \\
R &= W_1\rho_{11} + W_2\rho_{22} + \gamma_1, \\
\rho_{11} + \rho_{22} &= 1,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $H_{ik} = \langle i | \mu U / \hbar | k \rangle$ — матричный элемент взаимодействия с радиополем; W_1 и W_2 — скорости оптического возбуждения уровней $|1\rangle$ и $|2\rangle$ соответственно; γ_1 — скорость продольной релаксации уровней $|1\rangle$ и $|2\rangle$; γ_2 — скорость поперечной релаксации; R — количество переходов, совершаемых атомом в единицу времени.

Считается, что когерентности основного и вышележащих состояний отсутствуют и возбужденный атом имеет равные вероятности распада на уровни $|1\rangle$ и $|2\rangle$ (случай полного столкновительного перемешивания возбужденных состояний). Сигнал, наблюдаемый при оптическом детектировании двойного резонанса, пропорционален изменению под действием резонансного радиополя количества поглощаемых атомом в единицу времени фотонов $\dot{A}(t, \delta) = R - R^{(0)}$. В рамках принятых допущений решение системы (7) во втором порядке теории возмущений имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{A}(t, \delta) &= B \sum_m \sum_n J_m(q) J_{m-n}(q) \left[\frac{e^{in\Omega t}}{(in\Omega + \Gamma_1)(i\delta_m + \Gamma_2)} + \right. \\
&+ \left. \int \frac{ds^*(x) e^{i(n\Omega - x)t}}{(i(n\Omega - x) + \Gamma_1)(i\delta_m + \Gamma_2)} + \int \frac{ds(x) e^{i(n\Omega + x)t}}{(i(n\Omega + x) + \Gamma_1)(i(\delta_m + x) + \Gamma_2)} + \text{c. c.} \right], \tag{8}
\end{aligned}$$

где $\Gamma_i = (W_1 + W_2)/2 + \gamma_i$ ($i=1, 2$), $\delta_m = \delta + m\Omega$, $\delta = \omega - \omega_0$, $\omega_0 = (H_{22} - H_{11})/\hbar$,

$$B = \frac{(W_1 - W_2)^2}{2\Gamma_1} \left| \frac{\mu_{12}U_0}{\hbar} \right|^2.$$

Первое слагаемое в (8) соответствует регулярной части сигнала и совпадает с результатами [11–13]. Обычно в схеме частотных измерений из сигнала (8) выделяется составляющая на частоте модуляции Ω . Синхронным с процессом модуляции детектированием эта составляющая преобразуется к сигналам расстройки в области нулевых частот. Спектр преобразованного сигнала ограничивается эффективной полосой $\pm T^{-1}$ с помощью интегрирующего фильтра, причем $T^{-1} \ll \Gamma_1, \Gamma_2, \Omega$.

Операция синхронного детектирования предполагает умножение сигнала (8) на $\sin(\Omega t + \varphi_0)$ (φ_0 — фаза синхронного детектирования) и выделение составляющей в окрестности нулевой частоты. После соответствующих преобразований можно записать

$$A = A_r(\delta) + A_N(\delta, ds_x, x, T). \tag{9}$$

В области малых расстройк при выборе фазы синхронного детектирования $\varphi_0 = -\arctg(\Omega/\Gamma_1)$ регулярный сигнал ошибки может быть записан в виде

$$A_r(\delta) \simeq -G_1 \cdot \delta, \tag{10}$$

где

$$G_1 = \frac{dA_r}{d\delta} \Big|_{\delta=0} = \frac{B}{\sqrt{\Omega^2 + \Gamma_1^2}} \sum_m J_m (J_{m-1} - J_{m+1}) \frac{\Gamma_2^2 - m^2\Omega^2}{(\Gamma_2^2 + m^2\Omega^2)^2} \tag{11}$$

— крутизна дискриминатора.

Второе слагаемое в (9) описывает полный флуктуационный сигнал, из которого в свою очередь можно выделить вклад медленных ($|x| \ll T^{-1}$) флуктуаций — динамический сигнал расстройки $A_{N_0}(\delta, S_x)$. Полагая стационарную расстройку δ равной нулю, получаем

$$E \{A_{N_0}^2(0, S_x)\} = G_1^2 \cdot 4 \int_{-1/T}^{1/T} x^2 dS_\varphi(x). \tag{12}$$

При вычислениях нами были использованы свойства симметрии спектральных представлений

$$ds_a(-x) = ds_a^*(x), \quad (13)$$

$$ds_\varphi(-x) = ds_\varphi^*(x), \quad (14)$$

являющиеся следствием (4). Таким образом, информационная часть сигнала при $\delta=0$ всецело определяется временной производной фазовых флуктуаций в полосе $\pm T^{-1}$, дисперсия которой имеет спектральное представление вида

$$\int_{-1/T}^{1/T} x^2 dS_\varphi(x). \text{ Эта производная играет роль динамической расстройки радиополя,}$$

а величина $A_{N_0}(0, S_z)$ является динамическим аналогом сигнала ошибки (10). Наличие конечной расстройки δ приводит к появлению в выражении для сигнала дополнительных членов вида

$$E \{A_{N_0}^2(\delta, S_z)\} = G_1^2 \cdot \delta^2 \cdot 4 \int_{-1/T}^{1/T} dS_a(x). \quad (15)$$

Нам осталось рассмотреть вклад в преобразованный к нулевой частоте сигнал быстрых ($|x| > T^{-1}$) флуктуаций радиополя. Пренебрегая членами, имеющими порядок малости $(T\Gamma_1)^{-1}$, $(T\Gamma_2)^{-1}$, получаем

$$N_{MW}^2 \equiv E \{A_N^2\} = \frac{16B^2}{\Omega^2 + \Gamma_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} Q_p^2 \left\{ \left[\sum_m \frac{m\Omega}{\Gamma_2^2 + m^2\Omega^2} (J_m J'_{m-p} + J'_m J_{m-p}) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{m'} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2^2 + m'^2\Omega^2} (J_{m'} J'_{m'-p} - J'_{m'} J_{m'-p}) \right]^2 \right\}, \quad (16)$$

где $I'_n = dJ'_n(q)/dq = (J_{n-1} - J_{n+1})/2$;

$$Q_p^2 = \begin{cases} \int_{p\Omega-1/T}^{p\Omega+1/T} dS_a(x) & p=2N-1, N=1, 2, \dots, \\ \int_{p\Omega-1/T}^{p\Omega+1/T} dS_\varphi(x) & p=2N, N=1, 2, \dots \end{cases}$$

Если $S'_a(x)$, $S'_\varphi(x)$ при $|x| \gg T^{-1}$ медленно меняются на масштабе $2/T$, то можно записать

$$Q_p^2 = \begin{cases} 2 \cdot T^{-1} \cdot S'_a(p\Omega) & p=2N-1, \\ 2 \cdot T^{-1} \cdot S'_\varphi(p\Omega) & p=2N. \end{cases}$$

Следовательно, вклад в шумовой сигнал дают только составляющие спектра амплитудных флуктуаций, совпадающие по частоте с нечетными гармониками частоты модуляции, и составляющие спектра фазовых флуктуаций, совпадающие по частоте с четными гармониками модуляции. Более подробное рассмотрение, учитывающее члены порядка $(T\Gamma_1)^{-1}$, $(T\Gamma_2)^{-1}$, показывает, что наряду с амплитудными флуктуациями на частотах $(2N-1)\Omega$ вклад в шумовой сигнал дают их производные; наряду с фазовыми флуктуациями на частотах $2N\Omega$ вклад в шумовой сигнал дают их производные на этих частотах.

Теперь мы можем вычислить фактор качества двойного резонанса в рассматриваемой системе

$$F = G_1 [N_\Phi^2 + N_{MW}^2]^{-1/2} T^{-1/2}. \quad (17)$$

Здесь G_1 и N_{MW}^2 определяются выражениями (11) и (16), а средний квадрат амплитуды дробового шума пропорционален интенсивности фототока, т. е. скорости накачки

$$N_\Phi^2 = k^2 (W_1 + W_2) T^{-1}. \quad (18)$$

Предположим, что дробные шумы фототока малы в сравнении с шумами, вносимыми флуктуациями радиополя. Тогда фактор качества можно записать в виде

$$F_{MW} = G_1 \cdot [N_{MW}^2]^{-1/2} T^{-1/2}. \quad (19)$$

Величина такого «реального» фактора качества всецело определяется спектральными плотностями флуктуационного процесса на частотах, кратных Ω . В случае только фазовых флуктуаций при стандартных значениях $\eta = \Omega/\Gamma_2 = 0.5$ и $q = 1/(\sqrt{2} \cdot \eta) = \sqrt{2}$ выражение (19) принимает простой вид

$$F_{MW} \simeq \frac{c_0(\eta)}{\Gamma_2} \left[\frac{1}{\sqrt{S'_\varphi(2\Omega)}} - \frac{c_1(\eta)}{\sqrt{S'_\varphi(4\Omega)}} - \dots \right], \quad (20)$$

где $c_0(0.5) = 0.66$, $c_1(0.5) = 10^{-3}$ (при $\eta = 1$ и $q = 1/\sqrt{2}$ $c_0(1) = 0.91$ и $c_1(1) = 6 \times 10^{-3}$).

Таким образом, параметр качества в этих случаях определяется почти исключительно спектральной плотностью фазовых флуктуаций на удвоенной частоте модуляции.¹

3. В заключение покажем, что при современном состоянии техники формирования СВЧ полей в схемах стандартов частоты с оптической накачкой реальные значения параметра качества оказываются лимитированы флуктуациями СВЧ поля. Как уже отмечалось, резонансное СВЧ поле обычно формируется преобразованием сигналов высокостабильного кварцевого генератора к частоте рабочего перехода КДЧ. Флуктуационные характеристики таких генераторов имеют стандартное представление в виде диаграммы Аллена; для хороших генераторов типичная зависимость дисперсии флуктуаций частоты от времени измерения при $\tau \leq 1$ с представляется в виде $\sigma_\tau^2 = \sigma_0^2 \tau^{-1}$, где $\sigma_0 = 1 - 5 \cdot 10^{-12}$ с^{1/2}. Такая модель флуктуаций соответствует белому шуму со спектральной плотностью σ_0 в полосе 1 с⁻¹ в спектре частотных флуктуаций генератора. При этом среднеквадратичное значение индекса случайной модуляции на частоте 2Ω составляет $q_M = (\sigma_0 \omega_0)/(2\Omega)$ (для ⁸⁷Rb $\omega_0 = 2\pi \cdot 6.8 \cdot 10^9$ с⁻¹). Спектральную плотность флуктуаций на частоте 2Ω можно определить через величину q_M : $S'(2\Omega) \simeq q_M^2/4$ при $q_M \ll 1$. При этом, согласно (20),

$$F_{MW} \simeq \frac{4c_0(\eta)}{\sigma_0 \omega_0} \eta [c^{1/2}] = \frac{8\pi c_0(\eta)}{\sigma_0 \omega_0} \eta [\Gamma \Omega^{-1} \cdot c^{-1/2}]. \quad (21)$$

Таким образом, в случае белого частотного шума генератора ограниченный флуктуациями радиополя «реальный» фактор качества является функцией спектральной плотности частотных флуктуаций σ_0 и отношения $\eta = \Omega/\Gamma_2$. При фиксированном значении η (обычно $\eta = 0.5 - 1.0$) «реальный» фактор качества не зависит ни от амплитуды сигнала, ни от ширины резонанса и всецело определяется стабильностью опорного генератора.²

При $\eta = 0.5$ и $\sigma_0 = 3 \cdot 10^{-12}$ с^{1/2} вычисленная по (21) величина фактора качества оказывается ограничена значением $F_{MW} \simeq 60$ Гц⁻¹·с^{1/2}. С другой стороны, как это было показано в [5, 14, 15], для РДЧ с оптической накачкой предельный (лимитированный шумами фототока) фактор качества достигает 10^3 Гц⁻¹·с^{-1/2}. В соответствии с приведенной оценкой это значение не может быть реализовано при существующих способах генерации СВЧ полей; для его реализации, согласно (20), необходимо, чтобы спектральная плотность фазовых флуктуаций на частоте 2Ω составляла $S'(2\Omega) \leq 10^{-11}$, что соответствует подавлению фазо-

¹ Этот результат указывает на прямую связь рассматриваемой задачи с известным эффектом возникновения погрешности в определении частоты в КДЧ при наличии в спектре модулирующих радиополе сигналов четных гармоник. Результат (20) следует понимать как среднеквадратическое смещение нуля сигнала ошибки при равномерном случайном распределении фазы четных гармоник модуляции.

² Это справедливо, пока $N_\varphi^2/N_{MW}^2 \ll 1$. Результаты исследования зависимости фактора качества от параметров накачки и характеристик шумов в сигнальном канале во всем диапазоне значений отношения N_φ^2/N_{MW}^2 приведены в [14].

вых флуктуаций в спектре СВЧ генератора на уровне $-(110-120)$ дБ по отношению к несущей.

Авторы благодарят В. С. Жолнерова за многочисленные дискуссии, стимулировавшие написание работы.

Список литературы

- [1] Александров Е. Б., Мамырин А. Б., Якобсон Н. Н. // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 3. С. 607—612.
- [2] Александров Е. Б., Вершовский А. К., Якобсон Н. Н. // Тез. докл. Всесоюз. семинара «Оптическая накачка атомов и молекул». Л., 1986. С. 18.
- [3] Александров Е. Б., Якобсон Н. Н. // Тез. докл. Всесоюз. семинара «Оптическая ориентация атомов и молекул». Л., 1986. С. 20—21.
- [4] Александров Е. Б., Якобсон Н. Н., Вершовский А. К. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 5. С. 970—973.
- [5] Александров Е. Б., Вершовский А. К., Якобсон Н. Н. // Тез. докл. Междунар. конф. «Применение средств измерения времени и частоты в народном хозяйстве стран-членов СЭВ». М., 1987. С. 76—78.
- [6] Беседина А. Н., Величанский В. Л., Зибров А. С. и др. // Тез. II Всесоюз. семинара по оптической ориентации атомов и молекул. Л., 1989. С. 15.
- [7] Giordano V., Hamel A., Theobald G. et al. // Metrologia. 1988. Vol. 25. N 1. P. 17—20.
- [8] Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
- [9] Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
- [10] Алексеев Э. И., Базаров Е. Н., Герасимов Г. А., Шубин В. П. Проблемы современной радиотехники и электроники. М.: Наука, 1980.
- [11] Якобсон Н. Н. // Вопр. радиоэлектрон. Сер. ОТ. 1965. Вып. 12. С. 3—9.
- [12] Якобсон Н. Н. // Вопр. радиоэлектрон. Сер. ОТ. 1965. Вып. 29. С. 119—124.
- [13] Жолнеров В. С. // Вопр. радиоэлектрон. Сер. ОТ. 1973. Вып. 5. С. 112—116.
- [14] Александров Е. Б., Вершовский А. К., Якобсон Н. И. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 6. С. 1116—1122.
- [15] Александров Е. Б., Вершовский А. К., Якобсон Н. Н., Пазгалев А. С. // Тез. докл. VII Всесоюз. конф. «Метрология и радиоэлектроника». М., 1988. С. 349—350.

Поступило в Редакцию
9 ноября 1989 г.