01; 04; 10

АНАЛИТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Н. И. Карбушев, Н. Л. Цинцадзе, Г. Г. Чигладзе

Построена приближенная аналитическая нелинейная теория взаимодействия электронного пучка малой плотности с плазмой, позволяющая исследовать эволюцию роста амплитуды возбуждаемых колебаний во времени или в пространстве. При этом плазма предполагается линейной, а движение электронов пучка находится с помощью метода последовательных приближений путем разложения по степеням амплитуды поля. Сравнение полученных аналитических результатов с результатами численного расчета усредненных нелинейных уравнений показывает их неплохое соответствие.

Введение

Известно, что при взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой в определенных условиях возникают неустойчивости [1, 2], в результате развития которых нарастает амплитуда возбуждаемых колебаний электромагнитного поля, а электроны теряют часть своей кинетической энергии. Линейная стадия развития пучковых неустойчивостей, имеющая место при малых амплитудах поля, хорошо описывается аналитически (см., например, [3, 4]). Из линейной теории следует экспоненциальное нарастание амплитуды поля во времени или в пространстве. С ростом амплитуды поля наступает нелинейная стадия неустойчивости, на которой происходят захват частиц пучка и насыщение роста амплитуды. В некоторый момент времени или на некотором расстоянии достигается максимум амплитуды поля, значение которого может быть определено в рамках нелинейной теории.

Правильное описание нелинейной стадии пучково-плазменной неустойчивости возможно только с помощью численных методов решения усредненных нелинейных уравнений [5, 6]. Существующие приближенные аналитические методы [7–9] позволяют лишь оценить значение установившейся амплитуды плазменной волны и не дают представления об эволюции неустойчивости. При этом определяемое значение амплитуды значительно отличается от действительного.

В настоящей работе построена приближенная аналитическая теория взаимодействия моноэнергетического электронного пучка малой плотности с холодной электронной плазмой, позволяющая проследить эволюцию роста амплитуды возбуждаемых колебаний во времени или в пространстве, начиная с линейной стадии вплоть до достижения ею первого максимального значения. Плазма считается линейной, а движение электронов пучка находится с помощью метода последовательных приближений путем разложения по степеням амплитуды поля. Таким образом, учитывается влияние высших гармоник скорости и плотности электронов пучка на возбуждение колебаний и пренебрегается высшими гармониками поля как нерезонансными для плазмы. Аналогичный подход известен в физике плазмы [10] и электронике СВЧ [11], однако до сих пор не получил широкого распространения.

Сравнение приближенного аналитического решения с численным расчетом показывает, что ограничение точностью до третьей степени амплитуды поля (т. е. вторыми гармониками скорости и плотности электронов пучка) уже дает неплохие результаты. Из него следует правильное представление о нелинейной стадии развития неустойчивости и довольно близкие к действительным значения максимальной амплитуды поля и момента времени или координаты, соответствующие достижению этого максимума.

Неустойчивость ленгмюровских колебаний изотропной плазмы с электронным пучком

Рассмотрим вначале временну́ю неустойчивость ленгмюровских колебаний изотропной плазмы, пронизываемой нерелятивистским электронным пучком. В равновесном состоянии плазма и пучок однородны и имеют плотности электронов n_0 и N_0, а скорость пучка $\mathbf{u}_0$ направлена вдоль оси z. Для возмущенных величин в предположении линейности плазмы справедлива система уравнений ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{u}$)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{e}{m} E, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u_0 + u)\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{e}{m} E, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[(N_0 + N)(u_0 + u)\right] = 0,$$

$$\frac{dE}{dt} = -4\pi e\,(n + N), \tag{1}$$

где v и u — возмущения скоростей электронов плазмы и пучка, n и N — возмущения их плотностей, E — электрическое поле, $-e$ и m — заряд и масса электрона.

Будем искать решение системы (1) в виде

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots, \tag{2}$$

где X_1 представляет собой линейное приближение, а $X_n \sim X_1^n$.

Тогда представляя в линейном приближении все величины как $X_1 = \mathrm{Re}\, X_{10} \exp(-i\omega t + ikz)$, где X_{10} — комплексная амплитуда, ω и k — частота и волновой вектор, можно получить известное дисперсионное соотношение [1, 2]

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku_0)^2} = 0, \tag{3}$$

в котором $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0/m$, $\omega_b^2 = 4\pi e^2 N_0/m$.

Для пучка малой плотности ($N_0 \ll n_0$) уравнение (3) определяет три значения частот трех нормальных волн, резонансных с пучком, $|\omega - ku_0| \sim \omega_p (N_0/2n_0)^{1/3} \ll \omega_p$. Поэтому в линейном приближении поле ленгмюровской волны представляется в виде суммы

$$E_1 = \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{3} E_{10}^{(i)} \exp(-i\omega_i t + ikz), \tag{4}$$

где ω_i представляет три решения уравнения (3).

Амплитуды нормальных волн $E_{10}^{(i)}$ определяются из начальных условий при $t=0$. Если в начальный момент электронный пучок не модулирован ни по скорости, ни по плотности, а амплитуда поля равна E_0, то для величин $E_{10}^{(i)}$ находим выражения

$$E_{10}^{(i)} = \frac{(\omega_i - ku_0)^2}{(\omega_i - \omega_j)(\omega_i - \omega_l)} E_0, \quad i \neq j \neq l \neq i. \tag{5}$$

Из дисперсионного соотношения (3) следует, что инкремент нарастания неустойчивости $\delta = \mathrm{Im}\,\omega$ максимален при $k = \omega_p/u_0$. Тогда частоты нормальных волн равны [1, 2]

$$\omega = \omega_p + \omega_p \left(\frac{N_0}{2n_0}\right)^{1/3} \begin{cases} \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} \\ 1 \end{cases}. \tag{6}$$

При этом из формулы (5) следует, что $E_{10}^{(1)}=E_0/3$.

На временах $t>\delta^{-1}$ самой большой амплитудой будет обладать экспоненциально нарастающая нормальная волна с $\operatorname{Im}\omega>0$, остальными же нормальными волнами можно пренебречь по сравнению с ней. Вследствие этого в условиях максимального инкремента в линейном приближении для поля вместо (4) при $t>\delta^{-1}=(2/\sqrt{3}\,\omega_p)(2n_0/N_0)^{1/3}$ можно записать ($\operatorname{Im}E_0=0$)

$$E_1=\frac{E_0}{3}e^{\delta t}\cos(\bar\omega t-kz), \tag{7}$$

где

$$\bar\omega=\operatorname{Re}\omega=\omega_p\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{N_0}{2n_0}\right)^{1/3}\right].$$

Легко показывается, что во втором приближении достаточно учитывать только нелинейные возмущения скорости и плотности электронов пучка u_2 и N_2, являющиеся вторыми гармониками основной частоты. Вклад от остальных нелинейных величин содержит малый множитель порядка $(N_0/2n_0)^{1/3}\ll 1$. Представляя в соответствии с (7) X_2 в виде $X_2=e^{2\delta t}\operatorname{Re}X_{20}\exp(-2i\bar\omega t+2ikz)$, для комплексных амплитуд u_{20} и N_{20} находим следующие выражения:

$$u_{20}=-\frac{ke^2E_{10}^2}{4m^2(\omega-ku_0)^3},\quad N_{20}=-\frac{3k^2N_0e^2E_{10}^2}{4m^2(\omega-ku_0)^4}. \tag{8}$$

В третьем приближении все величины представляются в виде $X_3=e^{3\delta t}\operatorname{Re}X_{30}\exp(-i\bar\omega t+ikz)$, причем третьими гармониками основной частоты можно пренебречь. Тогда для комплексной амплитуды поля E_{30} из системы (1) следует формула

$$E_{30}=-\frac{i\omega_p\omega_b^2k^2e^2|E_{10}|^2E_{10}}{32m^2\delta(\omega_k^2+\delta^2)^2}\,\frac{7\delta^2+5\omega_k^2+10i\delta\omega_k}{(\omega_k+i\delta)^2(\omega_k+3i\delta)^2+\omega_p\omega_b^2(\omega_k+2i\delta)}, \tag{9}$$

в которой $\omega_k=\bar\omega-ku_0$.

В условиях максимального инкремента нарастания отсюда получим

$$E_{30}=-\frac{13-5\sqrt{3}\,i}{576\pi N_0mu_0^2}\left(\frac{2n_0}{N_0}\right)^{1/3}|E_{10}|^2E_{10}. \tag{10}$$

Полное поле ленгмюровской волны на временах $t>\delta^{-1}$, таким образом, с точностью до членов третьего приближения можно представить в виде

$$E=\frac{E_0}{3}e^{\delta t}\left(1-\alpha\frac{E_0^2}{9}e^{2\delta t}\right)\cos(\bar\omega t-kz)+\alpha\frac{5\sqrt{3}}{13}\frac{E_0^3}{27}e^{3\delta t}\sin(\bar\omega t-kz), \tag{11}$$

где $\alpha=(13\,(8n_0/N_0)^{2/3})/(576\,\pi N_0mu_0^2)$.

Слагаемое в (11), пропорциональное $\sin(\bar\omega t-kz)$, определяет нелинейный сдвиг фазы или частоты ленгмюровской волны, а второе слагаемое в скобках — нелинейное насыщение ее амплитуды. Из формулы (11) следует, что максимальная амплитуда поля волны, равная

$$E_{\max}=\frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}=8\sqrt{\frac{2}{39}}\,\frac{m}{e}\,\omega_pu_0\left(\frac{N_0}{2n_0}\right)^{2/3}, \tag{12}$$

достигается в момент времени

$$t_{\max}=\frac{1}{\delta}\ln\frac{\sqrt{3}}{E_0\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{\delta}\ln\frac{9E_{\max}}{2E_0}=\frac{2}{\sqrt{3}\,\omega_p}\left(\frac{2n_0}{N_0}\right)^{1/3}\ln\left[\frac{36}{E_0}\sqrt{\frac{2}{39}}\,\frac{m}{e}\,\omega_pu_0\left(\frac{N_0}{2n_0}\right)^{2/3}\right]. \tag{13}$$

Для максимальной же величины отношения плотности энергии ленгмюровской волны к плотности начальной кинетической энергии электронов пучка находим соотношение

$$\eta=\frac{E_{\max}^2}{4\pi N_0mu_0^2}=\frac{64}{39}\left(\frac{N_0}{2n_0}\right)^{1/3}. \tag{14}$$

Усиление волны в замагниченной плазме релятивистским электронным пучком

Аналогичный изложенному подход применим и к задаче усиления волн в плазме. В качестве примера рассмотрим стационарное усиление медленной волны в замагниченной плазме релятивистским электронным пучком. Равновесная скорость пучка $\mathbf{u}_0$ направлена вдоль оси z, параллельной бесконечному внешнему магнитному полю. Однородная холодная плазма заполняет полупространство $z \geqslant 0$. В сечении $z=0$ в плазму инжектируется электронный пучок без предварительной модуляции по скорости и плотности и подается плазменная волна с амплитудой продольной составляющей электрического поля E_0 ($\mathrm{Im}\, E_0=0$).

Вследствие одномерности движения электронов плазмы и пучка и линейности плазмы для возмущенных величин справедлива система уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_z, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u_0 + u) \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{e}{m\gamma^3} E_z,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [(N_0 + N)(u_0 + u)] = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_p + \mathbf{j}_b), \tag{15}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля плазменной волны, $\mathbf{j}_p$ и $\mathbf{j}_b$ — плотности тока электронов плазмы и пучка, $\gamma=(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор электронов пучка, c — скорость света, остальные обозначения аналогичны введенным в (1).

Задачу удобно решать в системе координат, в которой электрическое поле плазменной волны имеет составляющие E_z и E_x, а магнитное поле направлено вдоль оси y, $B=B_y$.

Представляя решение системы (15) в виде (2) и записывая все величины в линейном приближении как $X_1=\mathrm{Re}\, X_{10} \exp(-i\omega t+ik_z z+ik_\perp x)$, где k_z и $k_\perp$ — продольная (вдоль оси z) и поперечная (вдоль оси x) составляющие волнового вектора, приходим к дисперсионному соотношению [4]

$$k_\perp^2 + \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma_0^3 (\omega - k_z u_0)^2}\right] = 0, \tag{16}$$

где $\gamma_0=(1-u_0^2/c^2)^{-1/2}$.

Уравнение (16) в случае пучка малой плотности ($\omega_b^2 < \gamma_0 k_\perp^2 u_0^2$) определяет продольные составляющие волновых векторов трех нормальных волн, резонансных с пучком, $|\omega - k_z u_0| \ll \omega$. В соответствии с этим в линейном приближении составляющая E_z электрического поля плазменной волны при инжекции в плазму немодулированного пучка представляется в виде [11]

$$E_{1z} = \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{3} \frac{(k_{zi} - \omega/u_0)^2}{(k_{zi} - k_{zj})(k_{zi} - k_{zl})} E_0 \exp(-i\omega t + ik_{zi} z + ik_\perp x), \tag{17}$$

$i \neq j \neq l \neq i$, где k_{zi} — три решения дисперсионного соотношения (16).

На расстоянии $z > \varkappa^{-1} = |\mathrm{Im}\, k_z|^{-1}$ от сечения инжекции пучка амплитуда экспоненциально нарастающей нормальной волны с $\mathrm{Im}\, k_z < 0$ становится намного больше амплитуд двух других и ими можно пренебречь. Как следует из уравнения (16), максимальный пространственный инкремент усиления плазменной волны достигается на частоте $\omega=\omega_0=\sqrt{\omega_p^2-\gamma_0^2 k_\perp^2 u_0^2}$, когда

$$k_z = \frac{\omega_0}{u_0} + \frac{\omega_0}{\gamma_0^2 u_0} \left(\frac{\omega_b^2}{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}\right) \begin{cases} \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}, \\ -1. \end{cases} \tag{18}$$

При этом на расстояниях

$$z > \varkappa^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_0^2 u_0}{\omega_0} \left(\frac{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}{\omega_b^2} \right)^{1/3}$$

вместо (17) можно записать

$$E_{1z} = \frac{E_0}{3} e^{\varkappa z} \cos(\omega t - \bar{k}_z z - k_\perp x),$$

$$\bar{k}_z = \operatorname{Re} k_z = \frac{\omega_0}{u_0} + \frac{\omega_0}{2\gamma_0^2 u_0} \left(\frac{\omega_b^2}{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2} \right). \tag{19}$$

Во втором приближении в соответствии с (19) все величины следует представлять в виде $X_2 = e^{2\varkappa z} \operatorname{Re} X_{20} \exp(-2i\omega t + 2i\bar{k}_z + 2ik_\perp x)$, для комплексных амплитуд скорости и плотности электронов пучка находим выражения [1]

$$u_{20} = -\frac{k_z e^2 E_{10z}^2}{4m^2 \gamma_0^8 (\omega - k_z u_0)^3}, \quad N_{20} = -\frac{3k_z^2 N_0 e^2 E_{10z}^2}{4m^2 \gamma_0^6 (\omega - k_z u_0)^4}. \tag{20}$$

Представляя величины третьего приближения в виде $X_3 = e^{3\varkappa z} \operatorname{Re} X_{30} \exp \times \times (-i\omega t + i\bar{k}_z z + ik_\perp x)$, из системы уравнений (15) для комплексной амплитуды продольной составляющей электрического поля E_{30z} находим формулу

$$E_{30z} = -i \frac{k_z^5 \omega_b^2 e^2 |E_{10z}|^2 E_{10z}}{32 m^2 \gamma_0^{13} k_\perp^2 u_0^6 \varkappa (k_\omega^2 + \varkappa^2)^2} \frac{7\varkappa^2 + 5k_\omega^2 - 10i\varkappa k_\omega}{(k_\omega - i\varkappa)^3 (k_\omega - 3i\varkappa)^2 - 16k_\omega^3 (k_\omega - 2i\varkappa)}, \tag{21}$$

в которой $k_\omega = \bar{k}_z - \omega_0/u_0$.

Для случая максимального пространственного инкремента (18) отсюда имеем

$$E_{30z} = -\frac{13 - 5\sqrt{3}\, i}{576\pi} \frac{\gamma_0^3 k_\perp^2}{\omega_0^2 m N_0} \left(\frac{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}{\omega_b^2} \right)^{1/3} |E_{10z}|^2 E_{10z}. \tag{22}$$

Полная величина продольной составляющей электрического поля плазменной волны с максимальным пространственным инкрементом усиления на расстояниях $z > \varkappa^{-1}$ представляется, таким образом, в виде

$$E_z = \frac{E_0}{3} e^{\varkappa z} \left(1 - \beta \frac{E_0^2}{9} e^{2\varkappa z} \right) \cos(\omega t - \bar{k}_z z - k_\perp x) + $$
$$+ \beta \frac{5\sqrt{3}}{13} \frac{E_0^3 e^{3\varkappa t}}{27} \sin(\omega t - \bar{k}_z z - k_\perp x), \tag{23}$$

где

$$\beta = \frac{13\gamma_0^3 k_\perp^2}{576\pi\omega_0^2 m N_0} \left(\frac{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}{u_b^2} \right)^{1/3}.$$

Слагаемое в (23), пропорциональное $\sin(\omega t - \bar{k}_z z - k_\perp x)$, определяет фазовый сдвиг плазменной волны, а второе слагаемое в скобках — нелинейное насыщение ее амплитуды. Максимальная амплитуда составляющей E_z поля волны

$$E_{z\,\max} = \frac{2}{3\sqrt{3\beta}} = 8 \sqrt{\frac{2}{39}} \frac{m\omega_0 u_0}{e\gamma_0} \left(\frac{\omega_b^2}{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2} \right)^{2/3} \tag{24}$$

достигается на расстоянии

$$z_{\max} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{\sqrt{3}}{E_0 \sqrt{\beta}} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{9E_{z\,\max}}{2E_0} =$$
$$= \frac{2\gamma_0^2 u_0}{\sqrt{3}\,\omega_0} \left(\frac{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}{\omega_b^2} \right)^{1/3} \ln \left[\frac{36}{E_0} \sqrt{\frac{2}{39}} \frac{m\omega_0 u_0}{e\gamma_0} \left(\frac{\omega_b^2}{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2} \right)^{2/3} \right]. \tag{25}$$

Учитывая, что в плазменной волне

$$\frac{c}{u_0} B_y \approx E_x = \frac{k_\perp k_z E_z}{k_z^2 - \omega^2/c^2} \approx \gamma_0^2 \frac{k_\perp^2 u_0}{\omega_0} E_z, \tag{26}$$

---

[1] Учет всех остальных величин второго приближения дает лишь малый вклад порядка $(\omega_b^2/2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2)^{1/3} \ll 1$.

для максимальной величины отношения плотности потока электромагнитной энергии волны в направлении оси z к плотности потока кинетической энергии электронов инжектируемого пучка получаем соотношение

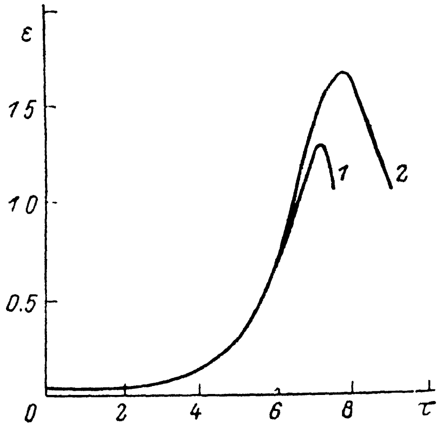
$$\eta = \frac{c\,(\overline{E_x B_y})_{\max}}{4\pi mc^2 N_0 (\gamma_0 - 1)\, u_0} \approx \frac{32}{39}\,\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0}\left(\frac{\omega_b^2}{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}\right)^{1/3}. \tag{27}$$

Соотношения (15)—(27) сохраняют силу как в случае нерелятивистских ($\gamma_0 \sim 1$, $u_0/c \ll 1$), так и в случае ультрарелятивистских ($\gamma_0 \gg 1$, $u_0/c \lesssim 1$) электронных пучков.

Сравнение с численным расчетом

Для сравнения полученных приближенных аналитических результатов с результатами численного расчета усредненных нелинейных уравнений в формулах (11)—(14) удобно ввести безразмерные переменные $\tau = \omega_p t\,(N_0/2n_0)^{1/3}$, $\varepsilon = ((eE)/(\sqrt{2}\, m\omega_p u_0))(2n_0/N_0)^{2/3}$.

На рисунке представлены две кривые зависимости $\varepsilon\,(\tau)$, полученные аналитически в соответствии с формулой (11) (кривая *1*) и численно (кривая *2*) при значении начальной амплитуды $\varepsilon_0 = 2^{1/6} \cdot 10^{-2}$, что соответствует работам [5, 6]. Обе кривые имеют одинаковые характерные особенности и расположены довольно близко друг к другу. Формула (12) дает значение $\varepsilon_{\max} \approx 8/\sqrt{39}$, заниженное в 1.3 раз по сравнению с получаемым при численном счете. Соответствующее максимуму амплитуды поля значение $\tau_{\max} \approx 7.21$, следующее из формулы (13), так-



Зависимость амплитуды поля ленгмюровских колебаний в пучково-плазменной неустойчивости от времени, полученная аналитически (*1*) и с помощью численных методов (*2*).

же оказывается заниженным на 0.74 единицы (или в 1.1 раз). Значение же максимального отношения плотностей энергий (14) оказывается заниженным в 1.7 раз по сравнению с получаемым при численном счете. Сравнение зависимостей $\varepsilon\,(\tau)$ показывает, что вплоть до значений $\tau \approx 7$ учет влияния вторых гармоник скорости и плотности электронов пучка изложенным методом уже позволяет находить амплитуду поля с точностью не более 5 %.

Следует отметить, что работа [7] дает аналитическое значение отношения плотности энергии поля ленгмюровской волны к плотности начальной кинетической энергии электронов пучка, заниженное по сравнению с численной величиной в 2.8 раза, а работа [9] — завышенное в 2.7 раза.

Вводя в формулах (23)—(27) безразмерные величины

$$\zeta = \frac{\omega_0 z}{\gamma_0^2 u_0}\left(\frac{\omega_b^2}{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}\right)^{1/3} \text{ и}$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma_0 e E_z}{\sqrt{2}\, m\omega_0 u_0}\left(\frac{2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2}{\omega_b^2}\right)^{2/3},$$

можно провести аналогичное сравнение аналитических и численных результатов и для задачи стационарного усиления плазменной волны электронным пучком. Отличие между результатами оказывается таким же, как и в задаче, описывающей неустойчивость ленгмюровской волны. В случае ультрарелятивистского электронного пучка величина $\eta = (32/39)(\omega_b^2/(2\gamma_0 k_\perp^2 u_0^2))^{1/3}$, определяемая формулой (27), занижена в 1.7 раз по сравнению с определяемой в численном счете [12].

Заключение

Предлагаемая в настоящей работе приближенная аналитическая теория дает правильное представление о характере взаимодействия моноэнергетичного электронного пучка малой плотности с плазмой. Показано, что ограничение точностью до третьей степени амплитуды поля уже дает вполне разумные результаты. Можно получить и более точные результаты, если удерживать в разложении (2) члены с пятой и более высокой степенью амплитуды поля. Однако при этом возникает необходимость проведения простых, но громоздких вычислений.

Изложенный метод является эффективным тогда, когда известно простое аналитическое решение линейного дисперсионного соотношения, как, например, в случае максимального временнóго или пространственного инкрементов. В противном случае может потребоваться численное решение дисперсионного соотношения и аналитические преимущества теряются.

Полученное в работе аналитическое решение предполагает наличие довольно большого отрезка безразмерного времени $\tau \gg 1$ или безразмерной координаты $\zeta \gg 1$, на котором происходит практически линейный рост амплитуды поля до достижения ею первого максимума. Это обстоятельство накладывает ограничение сверху на безразмерную начальную амплитуду поля вида $\varepsilon_0 \ll 1$. Изложенные результаты справедливы тогда, когда в движении электронов пучка еще не возникает многопотоковость и применимы уравнения одножидкостной гидродинамики. Именно в таких условиях скорость электронов пучка является однозначной функцией, которую можно разложить в ряд Фурье на гармоники. Таким образом, представленная теория является фактически слабонелинейной и не может описать процесс захвата электронов пучка волной, а также стадию развитой нелинейности неустойчивости. По этой причине формулы (11) и (23), строго говоря, справедливы только в условиях $\varepsilon \ll 1$. Тем не менее, как показывает сравнение с численным расчетом, вплоть до достижения максимального значения амплитуды $\varepsilon_{max} \sim 1$ они качественно правильно и количественно удовлетворительно описывают процесс эволюции амплитуды поля в результате развития неустойчивости.

Возможны также и другие приближенные методы решения исходных систем уравнений, близкие по характеру к изложенному. Например, практически такие же результаты дает метод, в котором решение вместо суммы (2) представляется в виде

$$X = \mathrm{Re}\, X_0 \exp\left[-i\omega t + ikz + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n},$$

где $\varphi_n(t) \sim X_{2n} \sim X_0^{2n}$.

Авторы выражают благодарность В. Е. Захарову за интерес к работе и обсуждение ее результатов и Е. А. Галстьяну за проведение численных расчетов.

Список литературы

[1] *Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б.* // ДАН СССР. 1949. Т. 69. № 3. С. 555—561.
[2] *Bohm D., Gross E.* // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. N 12. P. 1851—1869.
[3] Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 720 с.
[4] *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 408 с.
[5] *Онищенко И. Н., Линецкий А. Р., Мациборко Н. Г.* и др. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. Вып. 8. С. 407—411.
[6] *Matsiborko N. G., Onishchenko I. N., Shapiro V. D., Shevchenko V. I.* // Plasma Phys. 1972. Vol. 14. P. 591—600.
[7] *Ковтун Р. И., Рухадзе А. А.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 5. С. 1709—1714.
[8] *Гришин В. К., Шапошникова Е. Н.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 6. С. 1106—1113.
[9] *Кузелев М. В., Рухадзе А. А.* // Физика плазмы. 1980. Т. 6. № 4. С. 792—799.
[10] *Шапиро В. Д.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. Вып. 2. С. 613—625.
[11] *Шевчик В. Н., Трубецков Д. И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 732 с.
[12] *Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Филиппычев Д. С.* // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1981. Вып. 2. С. 170—203.

Тбилисский государственный университет
Физический факультет

Поступило в Редакцию
8 декабря 1986 г.