01; 02; 10

К ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННОГО ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Н. И. Карбушев, А. С. Шлапаковский

В линейном приближении теоретически исследуется неустойчивость электронного пучка ограниченного поперечного сечения, распространяющегося вблизи поверхности диэлектрика, сопровождающаяся излучением электромагнитной энергии в поперечном направлении. Найденные максимальные значения инкрементов имеют зависимости от ленгмюровской частоты пучка, качественно отличающиеся от аналогичных зависимостей в традиционных условиях взаимодействия электронных пучков с волнами диэлектрических волноводов.

1. Исследование взаимодействия электронных пучков с диэлектрическими волноводами представляет интерес прежде всего с точки зрения возможности получения электромагнитного излучения и модуляции электронных пучков [1-3]. При теоретическом рассмотрении такого взаимодействия обычно предполагается (см, например, [4-11]), что волноводная волна является стоячей в поперечном сечении и распределение ее амплитуды фиксировано. Поток же электромагнитной энергии направлен вдоль оси волновода, в направлении которой и происходит усиление волны. В таких условиях пространственный инкремент, определяющий усиление возмущений, пропорционален ленгмюровской частоте пучка в степени 2/3 (току пучка в степени 1/3) в случае малого пространственного заряда или в степени 1/2 (току пучка в степени 1/4) в случае большого пространственного заряда [11]. Вместе с тем с переходом к волноводам большого поперечного сечения и сильноточным электронным пучкам ситуация может существенно изменяться. В частности, возможно наличие составляющей излучения электромагнитной энергии и в поперечном по отношению к пучку направлении. Тогда характер развития неустойчивости и усиления волн электронным пучком становится качественно иным.

В настоящей работе влияние составляющей излучения электромагнитной энергии в поперечном направлении на развитие неустойчивости и усиление волн рассматривается на примере ленточного моноэнергетичного электронного пучка бесконечной ширины, распространяющегося в канале внутри диэлектрика или вблизи его поверхности. Найдены условия, при которых пространственный инкремент, характеризующий нарастание амплитуды возмущений в продольном направлении, принимает максимальное значение, и определена зависимость этого инкремента от ленгмюровской частоты пучка. Найдены также параметры электромагнитного излучения, возникающего под воздействием пучка в диэлектрике.

2. Пусть электронный пучок с однородной плотностью n_b полностью заполняет вакуумный канал толщиной $2a$ в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε. Скорость пучка u направлена вдоль оси координат z, параллельной силовым линиям сильного внешнего магнитного поля.

Для составляющей электрического поля E_z монохроматической волны на частоте ω с составляющей волнового вектора k в направлении оси z ($E_z \sim \exp(-i\omega t + ikz)$) в линейном приближении из уравнений Максвелла получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varkappa^2 \varepsilon_b E_z = 0,\ \ |x| < a,$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_\perp^2 E_z = 0,\ \ |x| > a, \tag{1}$$

где x — поперечная координата; $\varkappa^2 = k^2 - (\omega^2/c^2)$, $k_\perp^2 = \varepsilon(\omega^2/c^2) - k^2$, $\varepsilon_b = 1 - \omega_b^2 \times \times (\omega - ku)^{-2}$, $\omega_b^2 = (4\pi e^2 n_b)/(\gamma^3 m)$, $\gamma = (1 - (u^2/c^2))^{-1/2}$ (e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света).

На границах канала $|x| = a$ должны выполняться граничные условия

$$\{E_z\}_{|x|=a} = 0,\ \ \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}\bigg|_{|x|=a-0} + \frac{\varepsilon}{k_\perp^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}\bigg|_{|x|=a+0} = 0. \tag{2}$$

Интересуемся только четным решением уравнений (1)

$$E_z = \begin{cases} E_1 \operatorname{ch}\left(\varkappa x \sqrt{\varepsilon_b}\right), & |x| < a, \\ E_2 \exp\left(ik_\perp |x|\right), & |x| > a, \end{cases} \tag{3}$$

где E_1, E_2 — некоторые коэффициенты.

В области $|x| > a$ оно должно удовлетворять условиям ограниченности амплитуды волны и излучения

$$\operatorname{Im} k_\perp > 0,\ \ \operatorname{Re} k_\perp > 0. \tag{4}$$

Подстановка решения (3) в граничные условия (2) позволяет получить дисперсионное уравнение

$$k_\perp \sqrt{\varepsilon_b}\, \operatorname{th}\left(\varkappa a \sqrt{\varepsilon_b}\right) = -i\varepsilon\varkappa. \tag{5}$$

3. При выполнении неравенства

$$\varkappa a \sqrt{\varepsilon_b} \ll 1 \tag{6}$$

дисперсионное уравнение принимает вид

$$k_\perp a \varepsilon_b = -i\varepsilon. \tag{7}$$

Полагая в нем $\operatorname{Im} k_\perp \ll \operatorname{Re} k_\perp \approx (\omega/u)\sqrt{(u^2/c^2)\varepsilon - 1}$, найдем, что

$$k = \frac{\omega}{u} \pm \frac{\omega_b}{u}\left(1 + \frac{i\varepsilon}{\operatorname{Re} k_\perp a}\right)^{-1/2}. \tag{8}$$

В пределе $\operatorname{Re} k_\perp a \ll \varepsilon$, отсюда имеем

$$k \approx \frac{\omega}{u} \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\omega_b}{u} \sqrt{\frac{\operatorname{Re} k_\perp a}{\varepsilon}}, \tag{9}$$

а при $\operatorname{Re} k_\perp a \gg \varepsilon$ находим

$$k \approx \frac{\omega}{u} \pm \frac{\omega_b}{u}\left(1 - \frac{i\varepsilon}{2 \operatorname{Re} k_\perp a}\right). \tag{10}$$

Таким образом, в области низких частот $\omega \to 0$ ($\operatorname{Re} k_\perp \to 0$) $|\operatorname{Im} k| \sim \sim \sqrt{\omega} \to 0$, а в области высоких частот $\omega \to \infty$ ($\operatorname{Re} k_\perp \to \infty$) $|\operatorname{Im} k| \sim \frac{1}{\omega} \to 0$. Анализ выражения (8) показывает, что максимум пространственного инкремента $|\operatorname{Im} k|_{\max}$ достигается на частоте

$$\omega = \frac{u\varepsilon}{a\sqrt{3}}\left(\frac{u^2}{c^2}\varepsilon - 1\right)^{-1/2}, \tag{11}$$

когда $\operatorname{Re} k_\perp a = \varepsilon/\sqrt{3}$. При этом справедливо соотношение

$$k = \frac{\omega}{u} \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_b}{u}. \tag{12}$$

Знак в соотношениях (8)—(10) и (12) следует выбрать так, чтобы выполнялись условия (4). Поскольку $\operatorname{Im} k_\perp \approx -\operatorname{Im} k\,((u^2/c^2)\varepsilon-1)^{-1/2}$, то физически корректному решению соответствует значение $\operatorname{Im} k < 0$. Таким образом, амплитуда волны нарастает в продольном направлении по закону $\sim \exp \times \times (|\operatorname{Im} k| z)$, а ее фазовая скорость $\omega/\operatorname{Re} k < u$.

Развитие неустойчивости электронного пучка с максимальным инкрементом (12) сопровождается излучением электромагнитной энергии в диэлектрике под углом

$$\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} k_\perp}{k} \approx \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u^2}{c^2}\varepsilon - 1}\,,$$

близким к углу черенковского излучения заряженных частиц, движущихся в диэлектрике со сверхсветовой скоростью. Фактически же угол излучения из-за наличия действительной добавки к составляющей волнового вектора $(k-(\omega/u)) > 0$ оказывается меньше на малую величину порядка ω_b/ω. Амплитуда поля волны при удалении от пучка спадает по закону

$$E_z \sim \exp\left[-\operatorname{Im} k_\perp (|x|-a)\right] = \exp\left[\frac{\omega_b}{2\sqrt{2}\,u}\left(\frac{u^2}{c^2}\varepsilon-1\right)^{-1/2}(|x|-a)\right].$$

Неравенство (6) в условиях достижения максимального инкремента (12) может быть выполнено только для ультрарелятивистских электронных пучков с параметрами, удовлетворяющими неравенствам

$$\sqrt{3}\,\gamma^2\left(\frac{u^2}{c^2}\varepsilon-1\right) \gg \varepsilon^2, \quad \sqrt{2}\,\omega_b a \ll \frac{u}{\varepsilon}\sqrt{\frac{u^2}{c^2}\varepsilon-1}\,. \tag{13}$$

В области низких частот для выполнения неравенства (6) ультрарелятивизм пучка не требуется, а в области высоких частот требование на ультрарелятивизм становится более жестким. Неустойчивость исчезает ($\operatorname{Im} k \to 0$), если $\varepsilon \to c^2/u^2$ или $\varepsilon < c^2/u^2$.

Приведенные результаты остаются справедливыми в случае произвольного заполнения диэлектрического канала электронным пучком. При этом в выражениях (8)—(10) и (12) для продольной составляющей волнового вектора и инкремента под величиной ω_b следует понимать среднеквадратичную по всему сечению канала ленгмюровскую частоту пучка. Других изменений в формулах не будет. Такой вывод можно сделать на основании того, что неравенство (6), например, на частоте, соответствующей максимуму инкремента, когда $\varepsilon_b \sim 1$, а также в низкочастотной области принимает вид $\varkappa a \ll 1$. Отсюда следует практическое постоянство амплитуды поля волны во всем поперечном сечении канала и в отсутствие его зависимости от поперечной координаты x.

4. Представляет интерес рассмотрение неустойчивости в несколько иной геометрии, когда диэлектрик имеется только с одной стороны ленточного пучка, а с другой — вакуум. В таком случае с помощью уравнений (1) и граничных условий (2) можно найти дисперсионное уравнение

$$(ik_\perp\varepsilon_b - \varkappa\varepsilon)\,\operatorname{th}\left(2\varkappa a\sqrt{\varepsilon_b}\right) = \sqrt{\varepsilon_b}\,(\varkappa\varepsilon - ik_\perp). \tag{14}$$

В пределе (6) оно принимает вид

$$k_\perp a\varepsilon_b = -\frac{k_\perp}{2\varkappa} - i\frac{\varepsilon}{2}(1+2\varkappa a). \tag{15}$$

Поскольку в случае ультрарелятивистского пучка $\varkappa \ll k_\perp$, то для продольной составляющей волнового вектора из (15) находим выражение

$$k \simeq \frac{\omega}{u} \pm \frac{\omega_b}{u}\sqrt{2\varkappa a}\left(1 - i\frac{\varkappa\varepsilon}{2k_\perp}\right), \tag{16}$$

в котором слагаемое с мнимой единицей в скобке мало́ по сравнению с единицей (слагаемое $-\varkappa a$ в скобке, также малое по сравнению с единицей, опущено, так как оно не влияет на значение инкремента).

Из (16) следует, что при выполнении неравенства

$$2\gamma \frac{\omega_b a}{u} \ll 1 \tag{17}$$

в области частот $\omega \gg 8\gamma^3 (\omega_b^2 a/u)$ имеем $\varkappa \approx \omega/\gamma u$. Тогда

$$k \approx \frac{\omega}{u} \pm \frac{\omega_b \sqrt{2\omega a}}{u\sqrt{\gamma u}} \left(1 - \frac{i \frac{\varepsilon}{2\gamma}}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2}\varepsilon - 1}}\right). \tag{18}$$

С ростом частоты инкремент (18) растет $\sim \sqrt{\omega}$. Такой рост будет иметь место вплоть до значения $\omega \sim \gamma u/a$, когда начинает нарушаться неравенство (6). При этом максимальная величина инкремента (18) оказывается несколько меньше определяемой формулой (12). В пределе, обратном (17), $\varkappa \approx \sqrt{2\omega (ku - \omega)}/u$. В этом случае из (16) находим, что

$$k \approx \frac{\omega}{u} + 2\left(\frac{\omega\omega_b^4 a^2}{u^5}\right)^{1/3} - i \frac{8\omega_b^2 a\varepsilon}{3u^2 \sqrt{\frac{u^2}{c^2}\varepsilon - 1}}. \tag{19}$$

При получении (19) было учтено условие $\operatorname{Re}\varkappa > 0$, требующееся для ограниченности амплитуды волны в вакуумном полупространстве. Выражение (19) справедливо в диапазоне частот

$$\left(\frac{4\varepsilon}{\frac{u^2}{c^2}\varepsilon - 1}\right)^{3/2} \frac{\omega_b^2 a}{u} \ll \omega \ll \frac{u^2}{\omega_b a^2}, \tag{20}$$

когда $\omega_b a \ll u$.

5. Найденные в настоящей работе выражения для инкремента неустойчивости электронного пучка, взаимодействующего с диэлектриком, показывают качественно отличную от традиционной зависимость его максимальной величины от ленгмюровской частоты пучка ω_b (вместо $|\operatorname{Im} k|_{\max} \sim \omega_b^{2/3}$ или $|\operatorname{Im} k|_{\max} \sim \omega_b^{1/2}$ [11] имеем $|\operatorname{Im} k|_{\max} \sim \omega_b$ в формулах (12), (18) или $|\operatorname{Im} k|_{\max} \sim \omega_b^2$ в формуле (19)). Эти особенности обусловлены наличием составляющей излучения электромагнитной энергии в поперечном по отношению к электронному пучку направлении. Следует отметить, что зависимость инкремента, пропорциональная ω_b, была найдена в работе [12] для пучка в цилиндрическом канале в магнитодиэлектрике, только авторы [12] не связывали этот результат с указанной причиной. В частности, дисперсионное соотношение типа (7) было получено для случая сплошного заполнения пучком канала радиуса r_0 в приближениях $k_\perp r_0 \gg 1$, $\varkappa r_0 \sqrt{\varepsilon_b} \ll 1$ (для перехода к этому случаю в соотношении (7) необходимо произвести замену $a \to r_0/2$). Нетрудно, однако, заметить, что при этом выражение (12) для максимального инкремента оказывается справедливым лишь для диэлектриков с проницаемостью $\varepsilon \gg \sqrt{3/2}$ и ультрарелятивистских пучков, параметры которых удовлетворяют условию $\gamma^2 \gg \varepsilon/\sqrt{3}$.

Аналогичные эффекты ранее были обнаружены также в лазерах на свободных электронах (каналирование или самофокусировка излучения электронным пучком) [13] и в плазме, в которой распространяется поперечно ограниченный электронный пучок [14]. Однако максимальная величина инкремента в работах [13, 14], достигаемая в пределе $k_\perp \to 0$, оказывается пропорциональной $\omega_b^{4/5}$. При взаимодействии же электронного пучка с диэлектриком неустойчивость исчезает, если $k_\perp \to 0$. Это обусловлено тем, что в пределе $k_\perp \to 0$ обращается в нуль продольная составляющая электрического поля E_z волны в диэлектрике и ее взаимодействие с пучком становится невозможным. В то же время сохраняется возможность взаимодействия электронного пучка с электромагнитными волнами в лазерах на свободных электронах, а также с продольными волнами в плазме и в пределе $k_\perp \to 0$.

Рассмотренные эффекты развития неустойчивости электронного пучка в диэлектрике могут наблюдаться и в волноводах, если толщина диэлектрика Δ

между электронным пучком и металлической стенкой удовлетворяет неравенству $\operatorname{Im} k_\perp \Delta \geqslant 1$. Для сильноточных пучков с плотностью тока порядка 10 кА/см^2 и энергией электронов 1 МэВ минимальное значение Δ составляет всего единицы сантиметров. Длина излучаемой в диэлектрике волны с максимальным инкрементом при толщине канала $2a \leqslant 1$ см, согласно (11), попадает в сантиметровый диапазон.

Полученные в работе формулы можно понимать и как асимптотические в пределе больших радиусов тонкостенного трубчатого пучка и канала в диэлектрике в цилиндрической геометрии. Для этого должны выполняться неравенства $\operatorname{Im} k_\perp r_b \geqslant 1$ или $\operatorname{Re} \varkappa r_b \geqslant 1$, где r_b — радиус пучка, в зависимости от того, имеется диэлектрический стержень внутри пучка или нет.

Отмеченные особенности необходимо учитывать при постановке экспериментов по взаимодействию сильноточных релятивистских электронных пучков с диэлектрическими волноводами.

Список литературы

[1] *Von Laven S., Branscum J., Golub J.* et al. // Appl. Phys. Lett. 1982. Vol. 41. № 5. P. 408—410.
[2] *Диденко А. Н., Борисов А. Р., Фоменко Г. П., Штейн Ю. Г.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. Вып. 1. С. 60—62.
[3] *Garate E., Cook R., Heim P.* et al. // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 58. N 2. P. 627—632.
[4] *Иванов С. Т., Николов Н. А.* // Болг. физ. журн. 1979. Т. 6. № 4. С. 491—497.
[5] *Uhm H. S.* // J. Appl. Phys. 1981. Vol. 52. N 11. P. 6533—6539.
[6] *Tripathi V. K.* // J. Appl. Phys. 1984. Vol. 56. N 7. P. 1953—1958.
[7] *Garate E. P., Walsh J. E.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1985. Vol. 13. N 6. P. 524—530.
[8] *Александров А. Ф., Кузелев М. В., Пыркина О. Е.* // Физика плазмы. 1986. Т. 12. № 8. С. 927—933.
[9] *Иванов С. Т., Гришин В. К., Каневский М. Ф.* // Болг. физ. журн. 1983. Т. 10. № 1. С. 107—116.
[10] *Ташкун С. А., Фоменко Г. П., Шлапаковский А. С.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 8. С. 1538—1543.
[11] *Карбушев Н. И., Шлапаковский А. С.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 3. С. 161—168.
[12] *Алексахин Ю. И., Беляев А. П., Перельштейн Э. А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 4. С. 592—597.
[13] *Гинзбург Н. С., Ковалев Н. Ф.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 5. С. 274—277.
[14] *Кондратенко А. Н.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 23. С. 1462—1464.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
при Томском политехническом институте
им. С. М. Кирова

Поступило в Редакцию
10 октября 1989 г.