

01

© 1990 г.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХАОТИЧЕСКИХ И ШУМОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Д. М. Ваврик, Г. А. Громов, В. Б. Рябов

На примере анализа слабонелинейного осциллятора Дуффинга с квазипериодическим внешним возбуждением изучено воздействие шума малой и конечной интенсивности на хаотическую и регулярную динамику квазилинейных систем. Исследована связь максимального показателя Ляпунова λ_1 со спектрами колебаний, фазовыми траекториями и локальными свойствами движения на аттракторах. Установлено, что шум конечной интенсивности приводит к изменению знака λ_1 во всей области существования хаотических колебаний. Изучена зависимость этого явления от процессов растяжения и сжатия вектора в касательном пространстве, которые описаны в терминах текущих показателей Ляпунова.

Введение

К настоящему времени признано, что математическим образом хаотических колебаний в диссипативных системах являются квазиаттракторы, которые в отличие от «истинных» странных аттракторов не являются гиперболическими множествами [1-3]. Для них не имеется строгих результатов, подтверждающих возможность существования непериодических хаотических решений, а их возникновение в натуральных и численных экспериментах, как правило, связывают с влиянием флуктуаций. Они обуславливают «диффузию» фазового потока по бесконечному множеству устойчивых периодических движений с малыми областями притяжения, порожденных гомоклиническими касаниями устойчивых и неустойчивых многообразий. С этой точки зрения исследование влияния шумов на хаотические системы является одной из основных задач теории динамических систем [4-13].

В данной работе рассматривается влияние шума на динамику квазилинейных систем с квазипериодическим внешним воздействием на примере изучения неавтономного уравнения Дуффинга в квазилинейном пределе. Такая математическая модель широко применяется для описания регулярных и хаотических колебаний пассивных осцилляторов разнообразной физической природы (см., например, [14-17]). В рассматриваемом случае в отличие от случая одночастотного воздействия на существенно нелинейный осциллятор [18] возникновение хаоса наблюдается при значительно меньших уровнях внешнего регулярного колебания, которые могут быть сравнимы с уровнем естественных флуктуаций [15-17, 19]. В силу этого представляется особенно важным выяснить роль внешнего шумового воздействия на формирование характеристик выходных колебаний квазилинейных систем.

1. Математическая модель

Рассмотрим задачу о возбуждении слабонелинейного осциллятора внешним амплитудно-модулированным сигналом. Модуляция представляет собой аддитивную смесь регулярного и узкополосного шумового сигналов. Предположение о квазилинейности осциллятора позволяет представить изменение во вре-

мени его обобщенной координаты x в виде $x = a(\tau) \cos [\omega t + \varphi(\tau)]$, где ω — несущая частота внешнего колебания, τ — безразмерное медленное время. Амплитуда $a(\tau)$ и фаза $\varphi(\tau)$ находятся из следующей обобщенной системы уравнений [14, 20]:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \alpha(a) a + g(\tau) \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\Delta + \beta(a) + \frac{g(\tau)}{a} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\alpha(a)$, $\beta(a)$ — функции, определяющие диссипативные и неизохронные свойства осциллятора; Δ — нормированная частотная расстройка ω относительно собственной частоты осциллятора ω_0 :

$$g(\tau) = g_0 + g_1 \cos(\Omega\tau) + \xi(\tau) \quad (2)$$

— огибающая амплитуды; g_0 — амплитуда несущей; g_1 — глубина модуляции регулярной составляющей с безразмерной частотой Ω ; $\xi(\tau)$ — случайный процесс, распределенный по стандартному нормальному закону с временем корреляции $\tau_{\text{кор}} \gg \omega_0^{-1}$; $\sigma^2 \equiv D$ — дисперсия шума.

В дальнейшем мы будем рассматривать пассивный осциллятор, нелинейность которого проявляется только в неизохронности колебаний. В этом случае без существенных ограничений на область применимости результатов анализа функции $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ можно задавать в виде

$$\alpha(a) = -\alpha_0, \quad \beta(a) = \beta_0 a^2, \quad (3)$$

где α_0 — декремент колебаний, β_0 — параметр неизохронности.

Легко убедиться, что уравнение (1) с учетом (3) соответствует квазилинейному уравнению Дуффинга.

Возникновение хаоса в отсутствие шумового воздействия в системах, описываемых уравнениями типа (1), исследовалось как теоретически, так и экспериментально в работах [15, 16, 19]. Мы рассмотрим, как изменяются свойства регулярных и хаотических колебаний в таких системах при малых и конечных уровнях внешнего шумового воздействия. Основным методом анализа служат численные эксперименты, основанные на расчете фазовых траекторий системы, сечений Пуанкаре, спектров мощности, ляпуновских показателей. Однако оказалось, что для полного понимания механизма взаимодействия хаотических и шумовых колебаний наряду с традиционным подходом к анализу таких систем необходимо использовать более «тонкие» характеристики, основанные на расчете текущих показателей Ляпунова (ТПЛ), которые применительно к системе (1) рассмотрены в Приложении.

2. Эволюция системы под действием шума

В отсутствие внешнего шумового воздействия необходимым условием возникновения хаотических колебаний в системе (1) является существование бистабильности при ее одночастотном возбуждении [15, 16, 19]. Это соответствует наличию гистерезисного участка на зависимости стационарных значений амплитуды $A = \lim_{\tau \rightarrow \infty} a(\tau)$ от параметра g_0 при $g_1 = 0$. Конкретный вид такой зависи-

мости, возникающей при $\Delta > \sqrt{3}\alpha_0$, приведен на рис. 1 для $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\Delta = 4.5$. Если амплитуда внешнего колебания изменяется периодически во времени, то при многократном прохождении через гистерезис наблюдается возникновение хаотических колебаний, которые существуют в конечной области пространства параметров системы. Типичная зависимость старшего показателя Ляпунова λ_1 от глубины модуляции амплитуды регулярного колебания g_1 приведена на рис. 2 (кривая 1) для $g_0 = 2.8$ и $\Omega = 2.5$.

Рассмотрим результаты влияния внешнего шума $\xi(\tau)$ на динамику рассматриваемой системы. Нами исследовалось воздействие гауссовского случайного процесса $\xi(\tau)$, эффективная ширина спектра которого выбиралась по-

рядка полосы пропускания системы. Поскольку при выбранной нормировке параметров характерное время релаксации колебаний в системе примерно равно α_0^{-1} , то время корреляции процесса $\xi(\tau)$ задавалось исходя из условия $\tau_{\text{кор}} \approx \alpha_0^{-1}$. В этом случае единственным параметром, определяющим качественные изменения в динамике системы под действием шума, является его дисперсия $D = \sigma^2$. Зависимости $\lambda_1(g_1)$ для различных значений нормированной амплитуды шумового колебания σ приведены на рис. 2. Как показали систематические расчеты, они отражают достаточно общие закономерности в поведении рассматриваемого класса систем. При увеличении уровня шумового воздействия последовательно наблюдаются следующие изменения.

Первоначально, при весьма малых уровнях шума, происходит разрушение тонкой структуры области управляющих параметров, соответствующей хаотическому поведению, что проявляется в исчезновении окон порядка в хаосе и в сглаживании зависимости λ_1 от параметров системы (см. также [4, 10]). При дальнейшем увеличении σ во всей области существования стохастических колебаний наблюдается практически монотонное уменьшение показателя Ляпунова вплоть до отрицательных значений. Отметим, что изменение знака λ_1 происходит при относительно небольших характерных значениях амплитуды шума, которые на порядок меньше амплитуды регулярной составляющей внешнего колебания. Таким образом, если исходить из зависимостей старшего показателя Ляпунова от σ , то можно говорить о том, что под действием шума происходит глобальная регуляризация динамики системы.

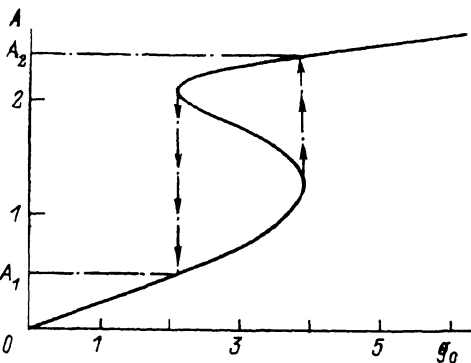


Рис. 1.

При этом, как показали подробные расчеты, внешнее шумовое воздействие не приводит к иницированию новых областей хаотического поведения. В результате проведенных исследований нами также установлено, что указанные

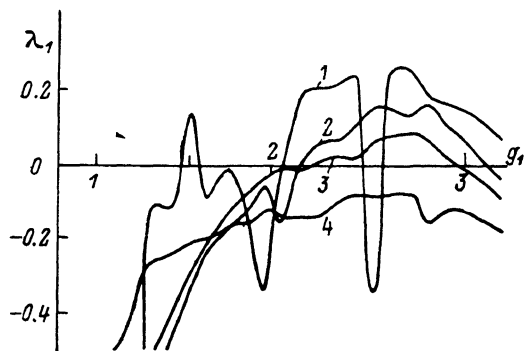


Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова от g_1 при $\tau_{\text{кор}}=1$, $\alpha_0=-1$, $\beta_0=1$, $\Delta=4.5$, $\Omega=2.5$, $g_0=2.8$ для $\sigma=0$ (1) 0.1 (2), 0.2 (3), 0.4 (4).

закономерности характерны не только для случая воздействия шума на пассивные осцилляторы, а также полностью повторяются при возбуждении активных квазилинейных систем, например осциллятора Ван дер Поля с квазипериодическим внешним возбуждением.

Рассмотрим теперь, как проявляется воздействие шума на такие характеристики динамической системы, как ее фазовые траектории и спектры мощности, которые обычно регистрируются в реальных физических экспериментах. Типичной иллюстрацией эволюции этих характеристик служит рис. 3, где приведены результаты расчета фазовых траекторий в координатах $u = a \cos \varphi$, $v = a \sin \varphi$ и спектров мощности S при различных значениях σ и g_1 , для параметров системы, соответствующих рис. 2. Рис. 3, а, б показывает изменение под действием шумов свойств первоначально регулярных колебаний (рис. 3, а), а рис. 3, в, г — хаотических колебаний.

Начиная с определенных уровней шума σ фазовые траектории располагаются на аттракторах, которые не являются хаотическими, поскольку во всей области параметров $\lambda_1 < 0$ и не являются странными, так как фрактальная размерность становится равной размерности фазового пространства. Такие аттрак-

торы мы будем называть зашумленными. Из результатов расчета фазовых траекторий следует, что увеличение σ нивелирует различия между зашумленными регулярными и зашумленными странными аттракторами (ср. рис. 3, б и 3, з). Это же следует и из сравнения соответствующих спектров мощности выходных колебаний. Здесь воздействие шума приводит к их сглаживанию, заметному под-

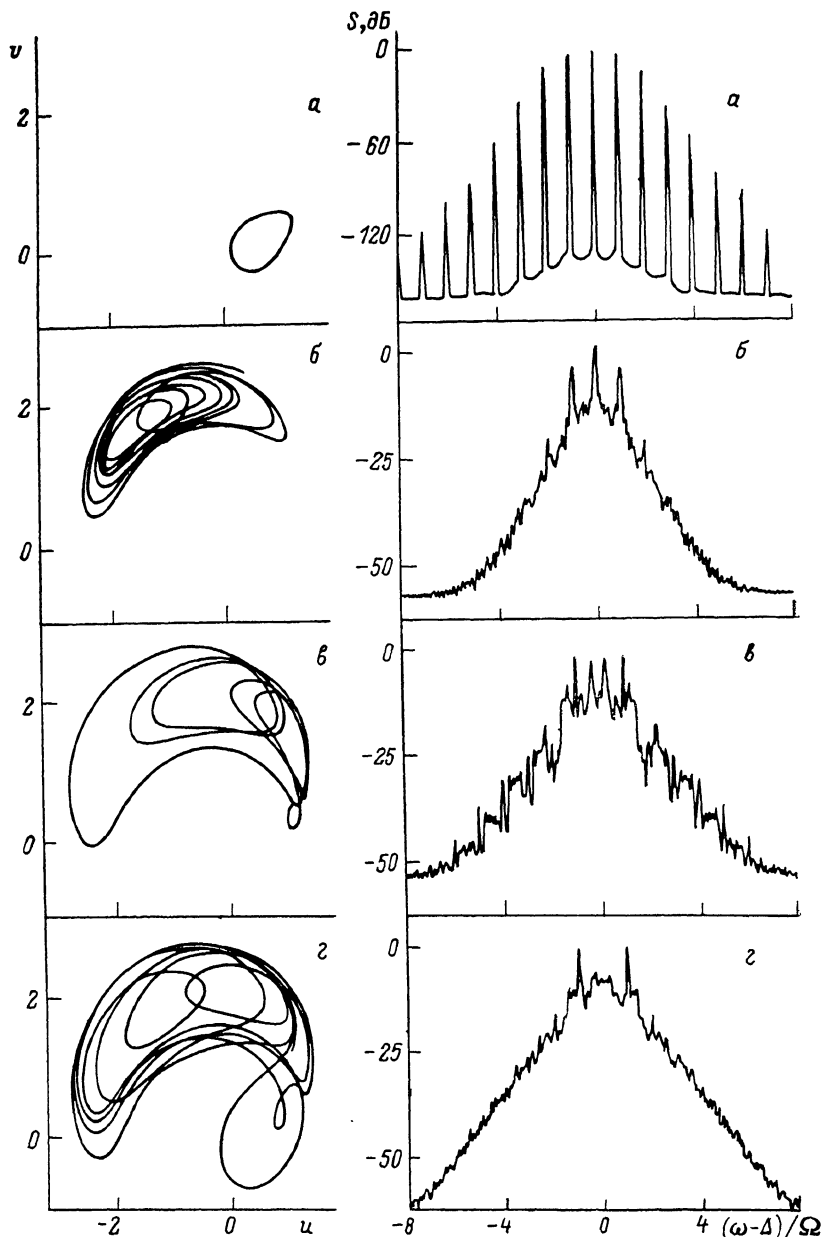


Рис. 3. Фазовые траектории и спектры.

а — регулярный аттрактор ($\sigma=0, g_1=1$); б — зашумленный регулярный аттрактор ($\sigma=0.4, g_1=1$); в — странный аттрактор ($\sigma=0, g_1=2.2$); з — зашумленный странный аттрактор ($\sigma=0.4, g_1=2.2$).

нятию уровня шумового пьедестала и к подавлению высших гармоник регулярной компоненты движения, что обычно служит показателем возникновения более развитых хаотических колебаний. Вместе с тем при переходе от странного аттрактора к зашумленному странному аттрактору величина максимального показателя Ляпунова становится отрицательной, что, исходя из обычных представлений, соответствует регуляризации системы. Таким образом, если в от-

существование внешнего шумового воздействия на систему (или при весьма низких уровнях шумов) изменению знака λ_1 соответствуют однозначные изменения в спектре и во временных реализациях выходного колебания, то начиная с определенных уровней шумов значения показателей Ляпунова практически не несут информации о характерных особенностях динамики системы. Подобные выводы также следуют из результатов анализа других моделей (см., например, [8]). Другие проблемы, возникающие здесь, заключаются в том, что исходя из расчетов λ_x спектров, фазовых траекторий в общем нельзя ничего сказать о характере движения системы при меньших уровнях внешнего шумового воздействия и о том, какие именно процессы приводят к возникновению случайных колебаний в системе. В связи с этим возникает необходимость изучения более «тонких» характеристик движения на аттракторах.

3. Влияние флуктуаций на локальные характеристики движения

В данном разделе мы рассмотрим механизмы, приводящие к изменению знака максимального показателя Ляпунова под воздействием шума. При отсутствии шумов хаотизация колебаний возможна, только если диапазон изменения их амплитуды приблизительно совпадает с интервалом A_1, A_2 , соответствующим гистерезисному участку на амплитудной характеристике системы (рис. 1). Исходя из уравнений (П. 4), (П. 5), определяющих показатели Ляпунова, необходимость выполнения этого условия проявляется в следующем. Из уравнения (П. 5) непосредственно следует, что $\mu_1(\tau)$ достигает положительных значений, когда $\Phi(\tau) \equiv \Psi(\tau) - \varphi(\tau)$ находится в интервале, определяемом условием

$$\sin 2\Phi > \frac{1}{\beta a^2}. \quad (4)$$

Среднее от $\mu_1(\tau)$, равное λ_1 , будет положительным, если Φ достаточно долго находится в указанном интервале. С этой точки зрения условие (4) хаотизации движения системы в некотором смысле подобно условию фазовой синхронизации колебаний осциллятора. В данном случае необходимо, чтобы $\dot{\Psi}$ принимало значения, близкие к нулю, в указанном интервале и окрестность $\dot{\Psi} \approx 0$ была притягивающей для Ψ . Проведенный анализ уравнений (П. 4) показывает, что эти условия выполняются, только когда амплитуда попадает в указанный интервал A_1, A_2 . Тогда вектор в касательном пространстве стремится занять положение, при котором происходит его растяжение.

Связь гистерезисного участка с областью существования положительных значений μ_1 наглядно проявляется на зависимости первого условного момента $M(\mu_1 | a)$ от амплитуды a , приведенной на рис. 4. Величина $M(\mu_1 | a)$ есть среднее значение показателя μ_1 , соответствующего интервалу изменения амплитуды от a до $a + da$, вычисленное для установившегося движения на аттракторе за время $\tau \gg \tau_{\text{кор}}$. Стрелками на рис. 4 обозначены значения A_1, A_2 , определяющие границы гистерезисного участка. Рис. 4, а соответствует случаю незашумленного странного аттрактора. Видно, что положительные значения ТПЛ в среднем реализуются именно в диапазоне амплитуд $A_1 < a < A_2$.

Рассмотрим, наблюдается ли разбегание траекторий при наличии шума и сохраняется ли при этом корреляция между областью существования положительных значений ТПЛ и гистерезисным участком по амплитуде. Типичная зависимость $M(\mu_1 | a)$ для случая зашумленного странного аттрактора с $\lambda_1 < 0$ приведена на рис. 4, б. Шум приводит к сглаживанию $M(\mu_1 | a)$, однако траектории продолжают разбегаться при тех же значениях амплитуды. Проведенный анализ распределений $M(\mu_1 | a)$ в широком диапазоне изменения параметров системы показывает, что шум с эффективными значениями амплитуды σ вплоть до величин порядка амплитуды регулярной составляющей внешнего сигнала не приводит к качественному изменению свойств растяжения и сжатия вектора в касательном пространстве.

Сохранение растяжения и сжатия как при $\lambda_1 > 0$, так и при $\lambda_1 < 0$ четко прослеживается и на распределениях вероятности $w(\mu_1)$, приведенных на рис. 5 для случаев странного незашумленного аттрактора (a), зашумленного странного

аттрактора (б) и зашумленного регулярного аттрактора (в). Напомним, что величина λ_1 является первым начальным моментом распределений $w(\mu_1)$. Как следует из рис. 5, а-в, знак величины λ_1 определяется конкуренцией растяжения и сжатия вектора в касательном пространстве.¹ В случаях незашумленного и зашумленного странного аттрактора (рис. 5, а, б) вероятность появления как положительных, так и отрицательных значений μ_1 примерно одинакова, а реализация положительных или отрицательных значений λ_1 обусловлена незначительным преобладанием одного из процессов растяжения или сжатия. В силу

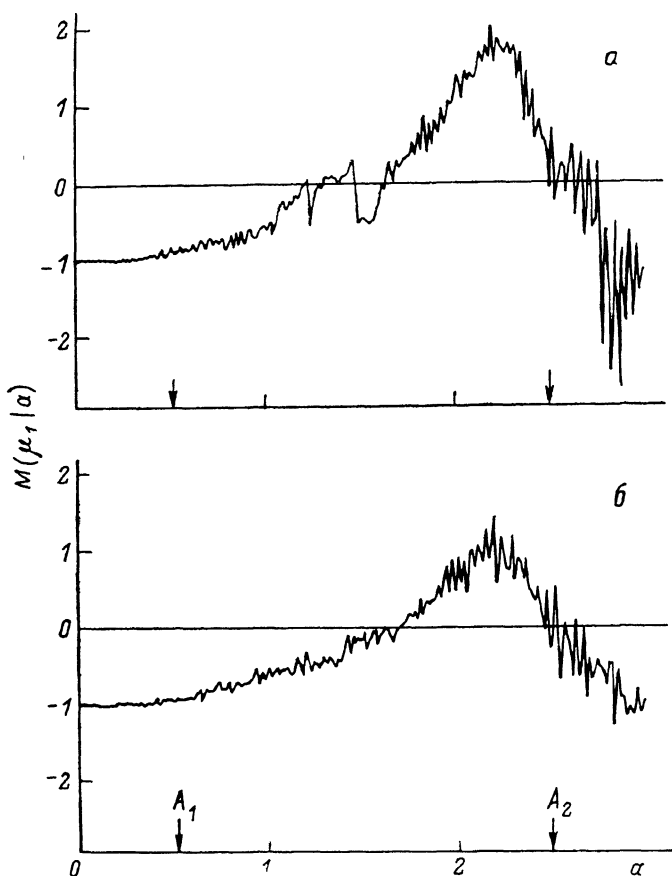


Рис. 4. Зависимость первого условного момента максимального ТПЛ от амплитуды колебаний для параметров рис. 2.

а — $\sigma=0$, $g_1=2.2$; б — $\sigma=0.4$, $g_1=2.2$.

этого относительно небольшие возмущения, в том числе и в виде внешнего шума, приводят к нарушению этого баланса, что выражается в сглаживании распределения $w(\mu_1)$ и в его стремлении к одномодальному с максимумом в окрестности $\mu_1=-1$. Это выделенное значение μ_1 всегда совпадает с величиной $-\alpha_0$ — декрементом свободных колебаний осциллятора.

Остается выяснить, почему шум конечной интенсивности в рассматриваемом случае в отличие от регулярного воздействия всегда приводит к регуляризации системы (в смысле уменьшения λ_1 с ростом σ). Для этого обратимся к формулам (П. 4), (П. 5). Как мы уже отмечали, возникновение положительных значений λ_1 возможно лишь при выполнении условий преимущественной стабилизации фазы Ψ в области растягивающих направлений (см. (4)). Влияние шума

¹ По-видимому, впервые принципиальная роль подобной конкуренции в возникновении хаотических режимов была отмечена в работе [2, с. 90] при исследовании генератора с инерционной нелинейностью.

приводит к тому, что все направления вектора в касательном пространстве становятся примерно равновероятными. Такое изменение плотности распределения вероятности $w(\Psi)$ иллюстрируется результатами численных расчетов, представленных на рис. 5 для случаев странного (z) и зашумленного странного ат-

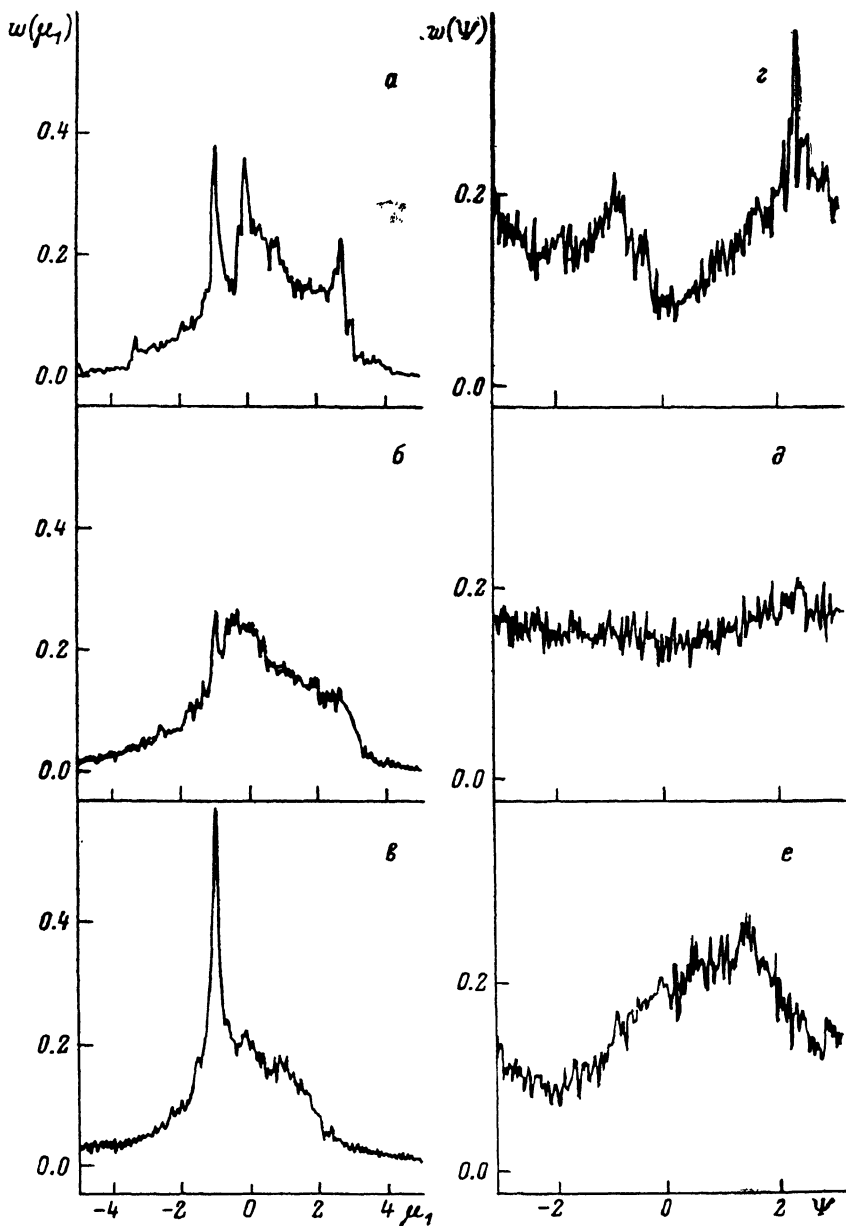


Рис. 5. Плотности вероятностей для максимального ТПЛ ($a-e$) и фазы вектора в касательном пространстве ($z-e$) для параметров рис. 2.

$a, z - \sigma = 0, g_1 = 2,2$; $b, д - \sigma = 0,4, g_1 = 2,2$; $e, z - \sigma = 0,4, g_1 = 1$.

трактора с $\lambda_1 < 0$ ($д$). Видно, что при движении на странном аттракторе существует некоторое выделенное значение Ψ , удовлетворяющее (4), вероятность реализации которого максимальна. При наличии шума, начиная с некоторых значений σ , такое выделенное направление отсутствует и распределение фазы Ψ стремится к равномерному (рис. 7, $д$). В этом случае второе слагаемое в выражениях (II. 5) в среднем стремится к нулю, а средние значения μ_k (τ) к $-\alpha_0$.

Мы полагаем, что именно размывание распределения $w(\Psi)$ является основной причиной изменения знака максимального показателя Ляпунова.

Значение $\mu_k = -\alpha_0$ является выделенным не только в случае зашумленного странного аттрактора, но и для зашумленного регулярного аттрактора. Однако в последнем случае в окрестности этого значения существует единственный четко выделенный экстремум в распределении $w(\mu_1)$ (рис. 5, в). Из сравнения распределений $w(\mu_1)$ для этих двух случаев можно в определенной степени судить о динамике системы при отсутствии шумов. Количественной характеристикой, позволяющей различать зашумленные странные и регулярные аттракторы, может служить, например, дисперсия распределения $w(\mu_1)$, которая при одинаковых уровнях внешнего шума больше для случая странных аттракторов. Отметим также, что другим возможным подходом к решению этой задачи является использование фильтрации зашумленного сигнала, основанной на вычислении размерности вложения [21].

Заключение

В работе изучено влияние шумов на регулярную и хаотическую динамику неавтономного квазилинейного осциллятора. Исследования включали расчет и анализ как глобальных характеристик колебаний системы, так и локальных свойств аттракторов. В результате установлено, что увеличение дисперсии шума приводит к уменьшению величины максимального показателя Ляпунова во всей области управляющих параметров, где существуют хаотические колебания с предварительным разрушением в ней окон порядка. Однако уменьшение не сопровождается качественными изменениями в спектре мощности и виде фазовых траекторий, на основании которых можно было бы судить об упорядочивании движения системы. Путем расчета таких характеристик представляется невозможным в общем случае различить зашумленные странный и регулярный аттракторы.

На основе анализа вероятностных распределений показано, что при наличии внешних шумов, так же как и при их отсутствии, сохраняется разбегание фазовых траекторий в течение определенных промежутков времени и сохраняются условия растяжения вектора в касательном пространстве, связанные с наличием гистерезисного участка на амплитудной характеристике. Глобальное уменьшение значения максимального показателя Ляпунова обусловлено тем, что все значения фазы вектора в касательном пространстве становятся примерно равновероятными. Показано, что путем анализа вероятностных распределений максимального ТПЛ в ряде случаев можно различать зашумленные странные и зашумленные регулярные аттракторы, хотя достаточно полное решение этой задачи требует проведения дальнейших целенаправленных исследований.

Авторы признательны О. А. Третьякову за поддержку данной работы и А. Б. Белогорцеву за большую помощь в ее выполнении.

Приложение

Текущие показатели Ляпунова

ТПЛ вводятся следующим образом [22]. Пусть динамическая система задана обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (\text{П. 1})$$

Как и в обычной процедуре определения показателей Ляпунова [23, 24], рассмотрим уравнения для произвольного вектора y в касательном пространстве

$$\dot{y} = \hat{J}(x, t) y, \quad (\text{П. 2})$$

где $\hat{J}(x, t)$ — матрица линеаризованной системы (П. 1).

Выберем произвольный набор ортогональных векторов $\{\xi_k\}$ $k=1, 2, \dots, n$ в касательном пространстве. Тогда спектр текущих показателей Ляпунова $\mu_k(t)$ определяют следующим образом:

$$\mu_k(t) = \frac{d}{dt} \ln \|\xi_k(t)\|. \quad (\text{П. 3})$$

Введение $\mu_k(t)$ позволяет характеризовать свойства регулярных и хаотических аттракторов с помощью распределения вероятностей этих величин и их моментов. В частности, первые начальные моменты $M(\mu_k)$ этих распределений совпадают со стандартным определением ляпуновских характеристических показателей λ_k [23, 24].

Отметим также связь между $\mu_k(t)$ и введенными в работах [3, 25] эффективными (локальными) показателями Ляпунова $\lambda_k[x(t), t]$, которая выражается соотношением

$$\mu_k(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_k[x(t), t].$$

Введение текущего показателя $\mu_k(t)$ позволяет не только получать более полную информацию о движении по аттрактору, но и дает возможность упростить процедуру вычисления спектра Ляпуновских показателей. Покажем это на примере исследуемой системы уравнений (1). Для этого выпишем соответствующую ей систему линеаризованных уравнений (П. 2) для амплитуды ρ и фазы Ψ вектора в касательном пространстве

$$\dot{\rho} = \rho [-\alpha_0 + \beta_0 a^2 \sin 2(\Psi - \varphi)], \quad (\text{П. 4a})$$

$$\dot{\Psi} = -\Delta + 2\beta_0 a^2 + \beta_0 a^2 \cos 2(\Psi - \varphi). \quad (\text{П. 4б})$$

Учтем, что $\|\xi_1\| = \rho$, а угол между ξ_1 и ξ_2 по определению равен $\pi/2$, тогда из (П. 3) и (П. 4) находим

$$\mu_1(\tau) = -\alpha_0 + \beta_0 a^2 \sin 2(\Psi - \varphi),$$

$$\mu_2(\tau) = -\alpha_0 - \beta_0 a^2 \sin 2(\Psi - \varphi). \quad (\text{П. 5})$$

Таким образом, соотношения (П. 5) определяют явную связь между углом вектора в касательном пространстве Ψ и ТПЛ.

Расчет спектра ляпуновских показателей $\lambda_{1,2}$ сводится к вычислению средних по времени значений функций $\mu_{1,2}(\tau)$. В отличие от традиционных подходов к определению $\lambda_{1,2}$ здесь достигается заметное упрощение процедуры таких расчетов. Это обусловлено тем, что для расчета $\mu_1(\tau)$ и λ_1 достаточно интегрировать только одно уравнение (П. 4б) для фазы Ψ совместно с (1). Использование текущих показателей позволяет точно так же упростить расчеты спектра ляпуновских показателей и для других, в том числе многомерных, систем.

Список литературы

- [1] Афраймович В. С., Шильников Л. П. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. С. 3—25.
- [2] Анищенко В. С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1, 2. Саратов, 1985, 1986.
- [3] Grassberger P., Badii R., Politi A. // J. Stat. Phys. 1988. Vol. 51. N 1/2. P. 135—178.
- [4] Crutchfield J. P., Farmer J. D., Hubermann B. A. // Phys. Rep. 1982. Vol. 92. N 2. P. 45—82.
- [5] Meunier C., Verga A. D. // J. Stat. Phys. 1988. Vol. 50. N 1/2. P. 345—375.
- [6] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [7] Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. // Phys. D. Vol. 16. N 3. P. 285—317.
- [8] Harding R. H., Ross J. // J. Chim. Phys. 1987. Vol. 84. N 11/12. P. 1305—1313.
- [9] Ven-Mizrachi A., Procaccia I., Grassberger P. // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 29. P. 975—979.
- [10] Анищенко В. С., Сафонова М. А. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 4. С. 641—651.
- [11] Анищенко В. С., Сафонова М. А. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. Вып. 12. С. 740—744.
- [12] Tongue B. H. // J. Appl. Mech. 1987. Vol. 54. P. 695—699.
- [13] Morimoto Y. // Trans. IEICE. 1987. Vol. E70. N 2. P. 89—92.
- [14] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1971. 503 с.
- [15] Белогорцев А. Б., Вагрис Д. М., Третьяков О. А. // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. Вып. 4. С. 1316—1321.
- [16] Вагрис Д. М., Чернышов И. Ю., Третьяков О. А. // РИЭ. 1989. Т. 34. № 8. С. 1698—1706.

- [17] Белогорцев А. Б., Ваерис Д. М., Третьяков О. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 3. С. 369—371.
- [18] Holmes P., Whitley D. // Phys. D. 1983. Vol. 7. N 1—3. P. 111—123.
- [19] Ваерис Д. М., Третьяков О. А. Теория резонансных усилителей с распределенным взаимодействием О-типа. Киев: Наукова думка. 1989. 152 с.
- [20] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
- [21] Ланда П. С., Розенблюм М. Г. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 13—20.
- [22] Herzel H., Schulmeister Th. // Dynamical Systems and Environmental Models / Ed. H. G. Bothe, W. Ebeling, A. B. Kurzhansky, M. Peschel. Berlin: Akademie Verlag, 1987. P. 85—94.
- [23] Оселедец В. И. // Тр. Моск. мат. общества. 1968. Т. 19. С. 179—210.
- [24] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. // Meccanica. 1980. Vol. 15. N 1. P. 9—30.
- [25] Badii R., Politi A. // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. N 3. P. 1288—1293.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступило в Редакцию
22 мая 1989 г.
В окончательной редакции
6 декабря 1989 г.