1990 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 60, в. 11
1990 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 60, N 11

01

О СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ В РЕГУЛЯРНОМ ЭКРАНИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

А. В. Гуреев

Рассматриваются энергетические аспекты процессов распространения электромагнитных волн в экранированных неоднородно заполненных волноводах. Задача распространения волн сформулирована в двух эквивалентных формах, одной из которых соответствует закон сохранения энергии, другой — закон сохранения импульса. Их совместный анализ приводит к ряду соотношений, связывающих между собой средние за период энергетические характеристики различных типов нормальных волн (бегущих, комплексных и т. д.).

Исследуются проблемы переноса энергии и энергетической ортогональности нормальных и присоединенных волн. Показано, что условие энергетической ортогональности записывается особенно просто в случае, когда нормальные и присоединенные волны строятся по приведенной канонической системе собственных и присоединенных векторов оператора краевой задачи. При этом используются обобщенные соотношения ортогональности, которым удовлетворяют собственные и присоединенные векторы. С помощью этих соотношений удается также обобщить закон Леонтовича—Лайтхилла на все типы электромагнитных волн в волноводе, в том числе и присоединенные, и показать эквивалентность для бегущих волн трех различных определений скорости переноса энергии.

Введение

Вопросы передачи энергии являются ключевыми в исследованиях процессов распространения волн в волноводах. При их анализе используются энергетические характеристики нормальных и присоединенных волн (НПВ), являющихся решениями однородных уравнений Максвелла в волноводе и представляющих собой базис, по которому раскладываются возбуждаемые поля [1]. Несмотря на то что изучение этих характеристик электромагнитных волн было начато давно [2, 3], ряд вопросов остается открытым и в настоящее время. Например, возникают трудности с определением скорости распространения волн с комплексными волновыми числами [4], не решены проблемы переноса энергии присоединенными волнами, особенно большой кратности [5], и другие. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Многие из полученных ниже результатов справедливы для регулярных волноводов, в которых распространяются волны любой природы. В то же время для электромагнитных волн имеется ряд характерных особенностей, которые вытекают из конкретного вида уравнений движения, физической интерпретации их операторных коэффициентов, отличающейся от существующей, например, в теории упругости [5–7], и т. д. Им в данной работе уделяется основное внимание. Кроме того, наряду с законом сохранения энергии проводится анализ закона сохранения импульса для нормальных волн в волноводе, что позволяет более полно изучить энергетические характеристики волн и, в частности, вопросы, связанные со скоростью переноса энергии.

1. Уравнения состояния

Рассмотрим регулярный вдоль оси z экранированный волновод без потерь сечения Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненный изотропной средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной восприимчивостью μ. Боковую поверхность волновода $\Gamma=d\Omega\times z$ будем считать идеальным металлом, а ε и μ — действительными, строго положительными ограниченными на Ω функциями, не зависящими от z. В дальнейшем имеет смысл всюду в записи трехмерных векторов и векторных дифференциальных операторов с помощью индексов $\perp$ и z выделять поперечную и продольную составляющие, например $\mathrm{grad}=\mathrm{grad}_\perp+\mathbf{z}_0 d/dz$, где $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль оси волновода. Как обычно, операции векторного и скалярного произведения векторов в смысле правил векторной алгебры будем обозначать с помощью символов $\times$ и $\cdot$, а через (A, B) записывать операцию скалярного произведения векторов в четырехкомпонентном функциональном пространстве L_2.

Электромагнитные волны в волноводе описываются уравнениями Максвелла, связывающими между собой векторы электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей. Регулярность структуры позволяет сформулировать задачу либо относительно продольных (см., например, [8, 9]), либо относительно поперечных [10] компонент поля, сократив при этом число независимых переменных в задаче с 6 до 2 или 4 соответственно. При втором подходе исследуемый оператор во многом совпадает с операторами, к которым сводятся задачи распространения упругих волн, что позволяет при анализе электромагнитных волн использовать результаты хорошо разработанной математической теории несамосопряженных полиноминальных операторных пучков [5-7, 11]. Именно такой подход к рассматриваемой проблеме применяется в настоящей работе.

Для электромагнитных волн, являющихся решением однородных уравнений Максвелла, краевая задача относительно векторов $\mathbf{E}_\perp$ и $\mathbf{H}_\perp$ может быть записана в двух эквивалентных формах

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{V}+cJ\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\mathbf{V}+A\mathbf{V}=0,\quad T_1\mathbf{V}\,|_{\partial\Omega}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{V}+c^{-1}J\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\mathbf{V}-B\mathbf{V}=0,\quad T_2\mathbf{V}\,|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}\varepsilon^{-1/2}\,\mathrm{rot}_\perp\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}_\perp\,\varepsilon^{-1/2} & 0\\ 0 & -\mu^{-1/2}\,\mathrm{grad}_\perp\,\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div}_\perp\,\mu^{-1/2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{grad}_\perp\,\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div}_\perp\,\varepsilon^{1/2} & 0\\ 0 & \mu^{1/2}\,\mathrm{rot}_\perp\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}_\perp\,\mu^{1/2}\end{pmatrix},$$

$$T_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}_0\,\cdot & 0\\ 0 & \mathrm{div}_\perp\,\mu^{-1/2}\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}\mathrm{div}_\perp\,\varepsilon^{1/2} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\tau}_0\,\cdot\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

$\mathbf{V}=\{\varepsilon^{1/2}\mathbf{E}_\perp,\ \mu^{1/2}\mathbf{H}_\perp\times\mathbf{z}_0\}$ — нормированный вектор неизвестных, $c=(\varepsilon\mu)^{-1/2}$ — скорость света в безграничной среде с параметрами ε и μ, $\boldsymbol{\tau}_0$ — единичный вектор касательной к контуру $d\Omega$, t — время, I — единичный оператор.

Под A и B в (1), (2) понимаются определенные на плотных в L_2 множествах функций D_1 и D_2, совпадающих с энергетическими пространствами [12] положительно определенных операторов $A+I$ и $B+I$, самосопряженные расширения соответствующих «классических» операторов. Отметим неотрицательность A и B, вытекающие из определения операторов тождества

$$AB=BA=0,\quad A=cJBJc,$$

а также справедливое для решения краевых задач (1) и (2) соотношение

$$cJB\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}=A\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{V}.$$

Для распространяющихся в волноводе электромагнитных волн задачи (1) и (2) эквивалентны и их решения лежат в плотном множестве $D=D_1\cap D_2$.

Наибольший интерес представляют элементарные, или однородные, решения [5, 6] уравнений (1), (2) вида

$$\mathbf{V}_q^n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{U}_q^k \frac{(-iz)^{n-k}}{(n-k)!} \exp\{i(\omega_q t - \gamma_q z)\}, \;\; U_q^k \in D, \tag{3}$$

называемые нормальными ($n=0$) или присоединенными ($n>0$) волнами (НПВ).

Индекс q в (3) выделяет одну из множества НПВ в спектре волновода, частота ω_q и коэффициент распространения γ_q в общем случае комплексны, а собственный $\mathbf{U}_q^0$ и присоединенные к нему $\mathbf{U}_q^k$ ($k>0$) векторы (СПВ) задач (1) и (2) зависят только от поперечных координат и удовлетворяют цепочке уравнений [11]

$$L_m \mathbf{U}_q^k + \frac{\partial L_m}{\partial \gamma} \mathbf{U}_q^{k-1} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L_m}{\partial \gamma^2} \mathbf{U}_q^{k-2} + \ldots = 0, \;\; \mathbf{U}_q^{-1} = 0, \;\; \mathbf{U}_q^{-2} = 0, \ldots, \tag{4}$$

где под оператором L_m понимаются оператор L_1 или L_2, получаемые из операторов в левой части (1) и (2) заменой $\partial/\partial t = i\omega$, $\partial/\partial z = -i\gamma$,

$$L_1 = -\omega^2 I + \omega\gamma c J + A,$$
$$L_2 = -\gamma^2 I + \omega\gamma c^{-1} J - B.$$

2. Законы сохранения энергии и импульса

Пусть поле $\mathbf{V}$ удовлетворяет принципу причинности и условию излучения. Тогда величины

$$\mathscr{E}_\perp = \frac{1}{2}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon |E_\perp|^2 + \mu |H_\perp|^2)\, d\Omega,$$

$$\mathscr{E}_z = \frac{1}{2}\left(A\int_0^{t'} \mathbf{V}dt, \int_0^{t'} \mathbf{V}dt\right)\Bigg|_{t'=t} = \frac{1}{2}\left(B\int_{\pm\infty}^{z'} \mathbf{V}dz, \int_{\pm\infty}^{z'} \mathbf{V}dz\right)\Bigg|_{z'=z} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon |E_z|^2 + \mu |H_z|^2)\, d\Omega,$$

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2}(cJ\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathrm{Re}\int_\Omega [\mathbf{E}_\perp \times \bar{\mathbf{H}}_\perp] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega,$$

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}(c^{-1}J\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathrm{Re}\int_\Omega \varepsilon\mu [\mathbf{E}_\perp \times \bar{\mathbf{H}}_\perp] \cdot \mathbf{z}_0 d\Omega \tag{5}$$

есть вклад поперечных ($\mathscr{E}_\perp$) и продольных ($\mathscr{E}_z$) составляющих поля в линейную плотность энергии $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\perp + \mathscr{E}_z$, z-я составляющая потока энергии $\mathscr{S}$ и линейная плотность z-й компоненты импульса поля.

Скалярное умножение проинтегрированных по t от 0 до $t' = t$ уравнения (1) и поля $\mathbf{V}$ приводит к закону сохранения энергии

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

а проинтегрированных по z от 0 до $z' = z$ уравнения (2) и поля $\mathbf{V}$ — к закону сохранения импульса

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{E}_\perp - \mathscr{E}_z) = 0. \tag{7}$$

Для НПВ $\mathbf{V}_q^n$ вида (3) соотношения (5) определяют удвоенные средние за период $T = 2\pi/\mathrm{Re}\,\omega_q$ соответствующие энергетические характеристики волны $\mathscr{E}_{\perp q}^n$, $\mathscr{E}_{zq}^n$, $\mathscr{S}_q^n$ и $\mathscr{P}_q^n$. В частности, для нормальной волны ($n=0$) по аналогии с (6), (7) получаем законы сохранения энергии и импульса в виде

$$-\omega_q \mathscr{E}_{\perp q}^0 + \gamma_q \mathscr{S}_q^0 + \bar{\omega}_q \mathscr{E}_{zq}^0 = 0, \tag{8}$$

$$-\gamma_q \mathscr{E}_{\perp q}^0 + \omega_q \mathscr{P}_q^0 - \bar{\gamma}_q \mathscr{E}_{zq}^0 = 0. \tag{9}$$

Анализ (8) и (9), рассматриваемых совместно как однородная система уравнений, приводит к следующим выводам: 1) не существует волн, у которых $\operatorname{Im}\omega_q\neq 0$, $\operatorname{Im}\gamma_q=0$ или $\operatorname{Re}\omega_q=0$, $\operatorname{Re}\gamma_q\neq 0$; 2) на частоте $\omega_q=0$ все волны являются затухающими $\operatorname{Re}\gamma_q=0$; 3) все критические частоты волновода, отвечающие условию $\gamma_q=0$, являются действительными $\operatorname{Im}\omega_q=0$; 4) у нормальной волны с $\operatorname{Re}\omega_q\neq 0$, $\operatorname{Re}\gamma_q=0$ или $\operatorname{Im}\omega_q=0$, $\operatorname{Im}\gamma_q\neq 0$ имеет место равенство $\mathscr{E}^0_{\perp q}=\mathscr{E}^0_{zq}$; 5) нормальные волны с $\operatorname{Im}\omega_q=0$, $\operatorname{Im}\gamma_q\neq 0$ энергии не переносят $\mathscr{S}^0_q=0$; 6) у нормальных волн с $\operatorname{Re}\omega_q\neq 0$, $\operatorname{Re}\gamma_q=0$ равна нулю средняя за период плотность z-й компоненты импульса $\mathscr{P}^0_q=0$; 7) средние за период энергетические характеристики нормальных волн с одновременно неравными нулю ω_q и γ_q связаны соотношением $\mathscr{S}^0_q\mathscr{P}^0_q=(\mathscr{E}^0_{\perp q})^2-(\mathscr{E}^0_{zq})^2$; 8) любые три из средних за период энергетических характеристик нормальной волны с $\operatorname{Im}(\omega_q\gamma_q)\neq 0$ выражаются через четвертую, например

$$\mathscr{E}^0_{zq}=\frac{\operatorname{Im}(\bar\omega_q\gamma_q)}{\operatorname{Im}(\omega_q\gamma_q)}\mathscr{E}^0_{\perp q},\quad \mathscr{S}^0_q=2\frac{\operatorname{Re}\omega_p\operatorname{Im}\omega_q}{\operatorname{Im}(\omega_q\gamma_q)}\mathscr{E}^0_{\perp q},\quad \mathscr{P}^0_q=2\frac{\operatorname{Re}\gamma_q\operatorname{Im}\gamma_q}{\operatorname{Im}(\omega_q\gamma_q)}\mathscr{E}^0_{\perp q}.$$

Соотношение (8) остается в силе и для присоединенных волн, а в (9) в результате интегрирования по z появляются дополнительные члены, представляющие собой скалярные произведения типа (5) между векторами $\mathbf{U}^k_q$ различного порядка k. При анализе этих соотношений, а также процессов передачи энергии в волноводе и решении различных дифракционных задач целесообразно использовать обобщенные соотношения ортогональности

$$\begin{gathered}(\omega_q^2-\bar\omega_p^2)(\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^l_p)+(\bar\omega_p\bar\gamma_p-\omega_q\gamma_q)(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^l_p)+\\+\bar\omega_p(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^{l-1}_p)-\omega_q(cJ\mathbf{U}^{k-1}_q,\ \mathbf{U}^l_p)=0,\end{gathered}\tag{10}$$

$$\begin{gathered}(\omega_q^2-\bar\omega_p^2)(c^{-1}J\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^l_p)+(\bar\gamma_p^2-\gamma_q^2)(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^l_p)+2\bar\gamma_p(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^{l-1}_p)-\\-2\gamma_q(cJ\mathbf{U}^{k-1}_q,\ \mathbf{U}^l_p)+(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^{l-2}_p)-(cJ\mathbf{U}^{k-2}_q,\ \mathbf{U}^l_l)=0,\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\gamma_q\bar\gamma_p(A\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^l_p)-\omega_q\bar\omega_p(B\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^l_p)+\bar\gamma_p(A\mathbf{U}^{k-1}_q,\ \mathbf{U}^l_p)+\\+\gamma_q(A\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^{l-1}_p)+(A\mathbf{U}^{k-1}_q,\ \mathbf{U}^{l-1}_p)=0,\end{gathered}\tag{12}$$

набор которых из-за использования двух форм записи уравнений состояния оказывается шире, чем в случае акустических волноводов [13].

3. Ортогональность и перенос энергии НПВ

Под ортогональностью в энергетическом смысле понимается равенство нулю взаимного потока энергии $(cJ\mathbf{V}^n_q,\ \mathbf{V}^m_p)$ двух различных волн на одной частоте $\omega_q=\omega_p$. Выполнение этого условия свидетельствует об аддитивности потока энергии, переносимого суперпозицией волн.

С целью выяснения этого вопроса рассмотрим сначала свойства скалярного произведения СПВ $(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \mathbf{U}^l_p)$. В обобщенных соотношениях ортогональности (10)—(12) можно избавиться от комплексного сопряжения чисел ω_p и γ_p, заменив векторы $\mathbf{U}^l_p$ на СПВ сопряженных операторов $\bar L_1$ и $\bar L_2$, которыми в данном случае являются комплексно-сопряженные векторы $\bar{\mathbf{U}}^l_p$. После выполнения этой операции (10) для $\omega_q=\omega_p\neq 0$ принимает вид

$$(\gamma_p-\gamma_q)(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \bar{\mathbf{U}}^l_p)+(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \bar{\mathbf{U}}^{l-1}_p)-(cJ\mathbf{U}^{k-1}_q,\ \bar{\mathbf{U}}^l_p)=0,$$

откуда следует, что при $\gamma_q\neq\gamma_p$ $(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \bar{\mathbf{U}}^l_p)=0$ для любых k и l. Более того, с помощью (10) и свойств СПВ [11] доказывается, что всегда можно построить каноническую [11] систему СПВ операторов L_1 и L_2, такую что

$$(cJ\mathbf{U}^k_q,\ \bar{\mathbf{U}}^l_p)=\delta_{qp}\delta_{k+l,N}F_q,\tag{13}$$

где δ_{qp}, $\delta_{k+l,N}$ — символы Кронекера; N — длина цепочки СПВ, присоединенной к q-му собственному вектору; F_q — число, называемое нормой q-го собственного вектора.

Такую систему СПВ операторов L_1 и L_2 будем называть приведенной канонической системой (ПКС).

Пусть частота $\omega_q=\omega_p$ действительна. Тогда решения (4) на комплексной плоскости γ образуют четверки, расположенные симметрично относительно действительной и мнимой осей или симметрично лежащие на действительной или мнимой оси пары [14]. Кратность собственных значений и длина отвечающих им цепочек СПВ в таких четверках и парах одинаковы, кроме того, $\bar{\mathrm{U}}_p^l=\mathrm{U}_{\bar{p}}^l$, где индексом $\bar{p}$ обозначены решение (4), удовлетворяющее условию $\gamma_{\bar{p}}=\bar{\gamma}_p$, и отвечающая ему цепочка СПВ. С учетом этого соотношение (13) для векторов из ПКС принимает вид

$$(cJ\mathrm{U}_q^k,\ \mathrm{U}_{\bar{p}}^l)=\delta_{q\bar{p}}\delta_{k+l,N}(F_qF_p)^{1/2}. \tag{14}$$

Перейдем к анализу энергетической ортогональности НПВ. Пусть V_q^n и V_p^m — две НПВ вида (3), отвечающие одной и той же действительной частоте и построенные по векторам из ПКС. С помощью (14) для них находим

$$(cJ\mathrm{V}_q^n,\ \mathrm{V}_p^m=\delta_{q\bar{p}}G_{nm}(iz)^{n+m-N}\,(F_qF_p)^{1/2},$$

где

$$G_{nm}=\begin{cases} 0, & \text{если } n+m<N,\\ \displaystyle\sum_{\zeta=0}^{n+m-N}\frac{(-1)^{n+m-N-\zeta}}{(n+m-N-\zeta)!\,\zeta!}, & \text{если } n+m\geqslant N.\end{cases}$$

Нетрудно показать, что $G_{nm}=\delta_{n+m,N}$, после чего искомое условие энергетической ортогональности НПВ записывается в виде

$$(cJ\mathrm{V}_q^n,\ \mathrm{V}_p^m)=\delta_{q\bar{p}}\delta_{n+m,N}(F_qF_p)^{1/2}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что на действительной частоте энергию переносят бегущие ($\operatorname{Im}\gamma_q=0$) нормальные волны; пары нормальных волн с комплексно-сопряженными коэффициентами распространения; пары присоединенных волн, построенные по ПКС, отвечающие либо одному и тому же действительному γ, либо комплексно-сопряженным γ и имеющие суммарную длину, равную длине соответствующих цепочек СПВ.

Во всех случаях переносимый одной или парами волн средний за период поток энергии не зависит от координаты z. Другой результат и невозможен, так как противоречил бы закону сохранения энергии. Очевидно, что то же самое имеет место при построении НПВ не по ПКС, как это принято у нас, а по произвольной системе СПВ операторов L_1 и L_2, хотя соотношения ортогональности в общем случае оказываются сложнее, чем (14) и (15) (см., например, [5, §29]).

4. Скорость переноса энергии

Известно, что наличие дисперсии приводит к неоднозначности определения скорости волны [15]. При описании процессов распространения волн чаще всего используются понятия групповой скорости, с которой перемещается волновой пакет (группа волн),

$$c_{\text{г}}=\frac{d\omega}{d\gamma}$$

и определяемой из закона сохранения энергии скорости переноса энергии

$$c_{\text{э}}=\frac{\mathscr{P}}{\mathscr{E}}.$$

Исходя из закона сохранения импульса (7) можно определить также скорость

$$c_{\text{и}} = \frac{\mathscr{E}_\perp - \mathscr{E}_z}{\mathscr{P}}.$$

Для бегущих нормальных волн в волноводах имеет место равенство

$$c_{\text{г}} = c_{\text{в}}, \tag{16}$$

называемое теоремой Леонтовича—Лайтхилла [4].

Покажем, что при тех же условиях

$$c_{\text{г}} = c_{\text{и}}, \tag{17}$$

т. е. введенные выше три определения скорости эквивалентны.

Продифференцировав (11) N раз по γ_q, положив $\omega_q = \omega_p$, $\gamma_q = \gamma_p$, $k = l = 0$ и приняв во внимание связь между СПВ и локальными характеристиками дисперсионных кривых [7], получим

$$\frac{d^{N+1}\omega_q}{d\gamma_c^{N+1}} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_q F_q}{\omega_q\,(c^{-1}J\,\mathbf{U}_q^0,\ \bar{\mathbf{U}}_q^0)}, & \gamma_q \neq 0, \\ \dfrac{F_q}{2\omega_q\,(c^{-1}J\,\mathbf{U}_q^1,\ \bar{\mathbf{U}}_q^0)}, & \gamma_q = 0. \end{cases}$$

По аналогии с [4] эти соотношения можно назвать обобщением закона Леонтовича—Лайтхилла. В частности, отсюда и из (6), (7) для нормальных бегущих волн ($\operatorname{Im}\omega_q = 0$, $\operatorname{Im}\gamma_q = 0$, $N = 0$) вытекает (17), а также

$$c_{\text{г}} c_{\text{ф}} = \frac{\mathscr{S}_q^0}{\mathscr{P}_q^0}. \tag{18}$$

Соотношение (18) известно в электродинамике как закон парциальных мощностей [16]. При однородном заполнении волновода $\mathscr{S}_q^0 = c^2 \mathscr{P}_q^0$ и, согласно (18), имеем

$$c_{\text{г}} c_{\text{ф}} = c^2.$$

Список литературы

[1] *Краснушкин П. Е.* // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 5. С. 1014—1017.
[2] *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948. 540 с.
[3] *Adler R. B.* // Proc. IRE. 1952. N 3. P. 339—348.
[4] *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 2. С. 241—251.
[5] *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* Спектральная теория регулярных волноводов. Л., 1983. 302 с.
[6] *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* Препринт ФТИ. № 660. Л., 1980. 57 с.
[7] *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1981. № 6. С. 97—146.
[8] *Левин Л.* Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981. 312 с.
[9] *Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В.* Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М., 1989. 184 с.
[10] *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 548 с.
[11] *Келдыш М. В.* // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 15—41.
[12] *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
[13] *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* // ДАН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333—335.
[14] *Краснушкин П. Е., Моисеев Е. И.* // ДАН СССР. 1982. Т. 264. № 5. С. 1123—1127.
[15] *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 438 с.
[16] *Семенов Н. А.* // РиЭ. 1963. Т. 8. № 8. С. 1476. Там же. 1965. Т. 10. № 8. С. 1533—1534.

Поступило в Редакцию
28 июля 1989 г.
В окончательной редакции
1 февраля 1990 г.