

01; 12

© 1990 г.

О МАЯТНИКЕ П. Л. КАПИЦЫ ВНЕ И В ЗОНЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

В. Г. Широносос

На основе резонансной теории динамических систем Пуанкаре исследовано движение перевернутого маятника П. Л. Капицы с вибрирующей точкой подвеса вне и в зоне параметрического резонанса. Получены в аналитическом виде общие формулы для нахождения периодических движений и исследования их на устойчивость без предположения о малости амплитуд колеблющегося маятника.

На примере двух типов решений (устойчивого $(2:1)$ и неустойчивого $(1:1)$) получены в аналитическом виде условия возникновения хаоса и точек бифуркации $2:1 \leftrightarrow 1:1$ для перевернутого маятника.

Отмечена важность исследования динамической устойчивости неустойчивых состояний нелинейных систем типа маятника вне и в зоне линейного параметрического резонанса для удержания и захвата атомных частиц в электродинамических ловушках.

Задача динамика маятника с вибрирующей точкой подвеса с давних пор привлекает к себе внимание [1-13]. Это обусловлено тем, что соответствующее уравнение в качестве модельного

$$\ddot{x} + \varepsilon_0 \dot{x} + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \tau) \sin x - \varepsilon_{-1} \cos(\tau + \varphi) \cos x = 0, \quad (1)$$

довольно часто встречается в различных областях физики: механике, электродинамике, физике плазмы и т. д. В частности, для маятника $\varepsilon_0 = a_0/(\omega^2 l)$; $\beta = 0$, ± 1 , где a_0 — ускорение силы тяжести, $a_{1(-1)}$ — амплитуда продольной (поперечной) вибрации, l — длина маятника, для частицы с собственным магнитным моментом μ , $\varepsilon_0 = \mu H_0/I$, где I — момент инерции, H_0 — напряженность постоянного магнитного поля, $H_{1(-1)}$ — амплитуда переменного магнитного поля продольной (поперечной) накачки, $\psi = \text{const}$, $\tau = \omega t$. При малых углах отклонения x и $\varepsilon_{-1} = 0$ уравнение (1) приводится к хорошо известному уравнению Матье, которое допускает устойчивое состояние перевернутого маятника ($\varepsilon_0 < 0$, $\varepsilon_1 \neq 0$) вне зоны параметрического резонанса. В 1950 г. П. Л. Капица [2], используя метод приближенного решения, описал и экспериментально продемонстрировал этот эффект. В 1982 г. авторы [12] на основе численного моделирования обнаружили устойчивые параметрически возбужденные колебания перевернутого маятника в зоне резонанса. Позднее [1, 7] были получены соответствующие зависимости амплитуд колебаний от ε_0 , ε_1 .

Помимо перечисленных было рассмотрено множество других нетривиальных решений: колебательных, колебательно-вращательных [1-2, 7, 11, 12]; возникновение хаоса [1, 8, 10] и т. д. Поиск решений (1), как правило, для различных случаев велся с использованием различных методов (Чезари [4, 5], Крылова—Боголюбова [1, 11], через переменные действие—угол [8] и т. д. [14, 15]) с разложением $\sin x$, $\cos x$ в ряд по степеням малости x . Такое разнообразие методов затрудняло сшивку частных решений, интерпретацию полученных результатов и понимание причин возникновения хаоса, бифуркаций в системах, описываемых уравнениями типа (1).

Поэтому, учитывая два положения Пуанкаре [13, с. 75] о том, что «... периодические решения являются единственной брешью, через которую мы могли

бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной» (I) и то, что «... периодическое решение может исчезнуть, лишь слившись с другим периодическим решением», т. е. «... периодические решения исчезают парами подобно действительным корням алгебраических уравнений» (II), воспользуемся обобщением соответствующих методов для нахождения и исследования на устойчивость периодических решений (1) по критическим точкам функции действия [13, 16-23].

Для этого перепишем уравнение (1) в лагранжевой форме

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (2)$$

где

$$L = T - U, \quad T = \dot{x}^2/2, \quad F = \varepsilon_r \dot{x}^2/2, \quad (3)$$

$$U = -(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \tau) \cos x - \varepsilon_{-1} \cos(\tau + \varphi) \sin x. \quad (4)$$

В общем случае x может быть вектором и $U = U(\bar{x}, \tau)$. Будем искать решение (2) вблизи периодического решения на частоте α в виде ряда

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n \cos(n\alpha\tau) + \frac{y_n}{n\alpha} \sin(n\alpha\tau) \right], \quad (5)$$

где x_0, x_n, y_n в общем случае $f(\tau)$.

Учитывая зависимость $x, \dot{x} = f(x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k)$, можно получить в приближении медленно меняющихся амплитуд x_k, y_k за период $2\pi/\alpha$ следующие укороченные уравнения:

$$\dot{x}_k \cong - \frac{\partial S}{\partial y_k} - \frac{\partial R}{\partial x_k}, \quad \dot{y}_k \cong \frac{\partial S}{\partial x_k} - \frac{\partial R}{\partial y_k}, \quad (6)$$

где $y_0 = \dot{x}_0, k = 1, 2, \dots, \infty$ и

$$S = s - y_0^2, \quad s = \langle L \rangle = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} L d\tau, \quad (7)$$

$$R = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[y_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^2 + y_n^2) \right]. \quad (8)$$

При выводе (6) были учтены формулы

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial x_n} \right\rangle \cong \left\langle \left[\frac{\partial L}{\partial x} \cos(n\alpha\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{d\tau} \cos(n\alpha\tau) \right] \right\rangle, \quad (9)$$

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial y_n} \right\rangle \cong \left\langle \left[\frac{1}{n\alpha} \frac{\partial L}{\partial x} \sin(n\alpha\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{d\tau} \sin(n\alpha\tau) \right] \right\rangle, \quad (10)$$

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial x_0} \right\rangle \cong \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial L}{\partial y_0} \right\rangle \cong \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\rangle, \quad (11)$$

$$\dot{x} \cong \dot{x}_0 - n\alpha(2\dot{x}_n + y_n) \sin(n\alpha\tau) + (2\dot{y}_n - n^2\alpha^2 x_n) \cos(n\alpha\tau) \quad (12)$$

и условия экстремальности функции действия (2). В переменных амплитуда-фаза уравнения (6) примут вид

$$\dot{\psi}_n \cong \frac{1}{nr_n} \frac{\partial S}{\partial r_n}, \quad \dot{r}_n \cong - \frac{1}{nr_n} \frac{\partial S}{\partial \psi_n} - \varepsilon_r r_n, \quad (13)$$

где

$$x_n = r_n \cos \psi_n, \quad y_n/n\alpha = r_n \sin \psi_n, \quad (14)$$

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\alpha\tau - \psi_n). \quad (15)$$

В переменных действие—угол

$$\dot{\psi}_n \cong \frac{\partial S}{\partial \chi_n}, \quad \chi_n \cong -\frac{\partial S}{\partial \psi_n} - 2\varepsilon_r \chi_n, \quad (16)$$

где

$$x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\chi_n}{n} \right)^{1/2} \cdot \cos(\alpha\tau n - \psi_n). \quad (17)$$

Нетрудно показать, что в первом приближении метод Крылова—Боголюбова [11, §14] и метод S -функции при $n=1$ приводит к одинаковым укороченным уравнениям для r_1 и ψ_1 . Для этого достаточно подставить (6) в (15) и учесть равенства $\langle \partial U / \partial r_1 \rangle \cong \langle \partial U / \partial x \cos(\alpha\tau - \psi_1) \rangle$, $\langle \partial U / \partial \psi_1 \rangle \cong \langle \partial U / \partial x \sin(\alpha\tau - \psi_1) \rangle$. Соответствующим параметром малости в обоих случаях будет являться относительная расстройка по частоте [11, с. 170].

Улучшенное первое приближение, аналогичное [11], можно получить из условия равновесия $S'_{x_n} = S'_{y_n} = 0$ при $\varepsilon_r \cong 0$

$$\frac{\partial S}{\partial x_n, y_n} = \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_n, y_n} - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x_n, y_n} = 0. \quad (18)$$

Произведя подстановку (3), (5) в (18), получим

$$x_n = \frac{1}{\pi n^2 \alpha} \int_0^{2\pi/\alpha} \frac{\partial U}{\partial x} \cos(n\alpha\tau) d\tau, \quad (19)$$

$$y_n = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi/\alpha} \frac{\partial U}{\partial x} \sin(n\alpha\tau) d\tau, \quad (20)$$

где в первом приближении $x \cong x_0 + x_1 \cos(\alpha\tau) + (y_1/\alpha) \sin(\alpha\tau)$.

Вернемся к уравнению (1), будем искать решение в виде (13), используя представление $\cos x = \text{Re} [\exp i(x)]$, формулы (13) и [24]

$$\exp [ir_n \cos(n\alpha\tau - \psi_n)] = \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} J_{k_n}(r_n) \exp [ik_n(n\alpha\tau + \pi/2 - \psi_n)], \quad (21)$$

получим

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \alpha^2 r_n^2}{4} - \frac{y_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, \dots = -\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{+\infty} J_{k_n}(r_n) \cdot \sum_{\beta=-1}^{+1} \varepsilon_{\beta} \cdot \delta_{\sum_{n=1}^{\infty} k_n \alpha}^{\mp \beta} \times \\ \times (1 + \delta_3^0) \cdot \cos \left[x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{\pi}{2} - \delta_{\beta}^{\pm 1} \psi_n \right) - \delta_{\beta}^{-1} (\pi/2 \pm \varphi) \right], \quad (22)$$

где $J_k(r_n)$ — функции Бесселя, δ_{β}^n — символ Кронекера.

Зачастую, как показывает опыт, достаточно ограничиться вкладом в S (22) от нескольких слагаемых, в частности от $n=1$. Этого бывает вполне достаточно для практических расчетов без существенной потери точности [25], так как ряд (22) быстро сходится из-за известного свойства функций Бесселя быстро убывать с ростом индекса при фиксированном значении аргумента r_n . В общем случае $U(x, \tau)$ сходимость ряда (5) будет определяться ограниченностью функций, стоящих под интегралами (19), (20).

Поиск периодических решений уравнений типа (1), как следует из (6), (13), (16), при $\varepsilon_r \cong 0$ сводится к отысканию и исследованию на устойчивость критических точек (22) по r_n , ψ_n либо x_n , $\Psi_n(x_n, y_n)$ и x_0 , y_0 .

Рассмотрим различные случаи решений (1). В наиболее простом случае математического маятника без учета трения и вибраций результаты вычислений (13) по S (22) с $n=1$

$$S \cong \left[\frac{\alpha^2 r_1^2}{4} - \frac{y_0^2}{2} + \varepsilon_0 J_0(r_1) \cos x_0 \right], \quad (23)$$

свидетельствуют о вполне удовлетворительной точности. Относительная погрешность приближения $\alpha(r_1)$ даже при углах отклонения маятника $x \sim 160^\circ$ не превышает 5.5 % [11, с. 55].

Введение продольной вибрации, как следует из

$$S \cong \left[\frac{\alpha^2 r_1^2}{4} - \frac{y_0^2}{2} + \varepsilon_0 J_0(r_1) \cos x_0 + \varepsilon_1 J_{1/\alpha}(r_1) \cos \left(x_0 + \frac{\pi}{2\alpha} \right) \cos \frac{\psi_1}{\alpha} \right] \quad (24)$$

и (13), приводит к появлению двух типов критических точек. Первым соответствуют положения равновесия $x_0 = \pm n\pi$, $\psi_1 = 0$, $\pm\pi/2$, $1/\alpha$ (четные), вторым — $x_0 \neq \pm n\pi$, $\psi_1 = 0$, $\pm\pi$ ($1/\alpha$ — нечетные), $n = 0, 1, 2, \dots$ (в частности, $x_0 = \pm(2n+1)$ при $\varepsilon_0 = 0$). Поэтому, учитывая сценарий «слияния» двух периодических решений по Пуанкаре (11) вследствие наличия второго типа критических точек $x_0 \neq \pm n\pi$ (бифуркация периода $1/\alpha = 2 \leftrightarrow 1/\alpha = 1$), будем искать решение задачи о маятнике Капицы вне и в зоне параметрического резонанса в виде

$$x_0 \cong x_0 + r_1 \cos(\tau/2 - \psi_1) + r_2 \cos(\tau - \psi_2). \quad (25)$$

Такое представление (16) дает выражение S (22) с точностью до $n = 2$

$$S \cong \left\{ \frac{r_1^2}{16} + \frac{r_2^2}{4} - \frac{y_0^2}{2} + \varepsilon_0 \left[J_0(r_1) J_0(r_2) \cos x_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(r_1) J_n(r_2) \cos \left(x_0 - \frac{n\pi}{2} \right) \cos n(2\psi_1 - \psi_2) \right] - \varepsilon_1 \left[J_2(r_1) J_0(r_2) \cos 2\psi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+2}(r_1) J_n(r_2) \cos \left(x_0 - n\pi/2 \right) \cos [n(2\psi_1 - \psi_2) \pm 2\psi_1] \right] \right\}. \quad (26)$$

Ограничиваясь членами порядка r_k^4 при разложении $J_n(r_k)$ в S (26) и используя переменные x_k, y_k (14), получим

$$S \cong \left[\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} - \frac{y_0^2}{2} + (\varepsilon_0 f_0 - \varepsilon_1 f_1) \cos x_0 + (\varepsilon_0 F_0 - \varepsilon_1 F_1) \sin x_0 \right], \quad (27)$$

где

$$f_0 = \left[1 - \frac{x_1^2 + 4y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}{4} + \frac{(x_1^2 + 4y_1^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)^2}{64} + \frac{(x_1^2 + 4y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{16} \right], \quad (28)$$

$$f_1 = \left[(x_1^2 - 4y_1^2) \frac{8 - \frac{2}{3}(x_1^2 + 4y_1^2) - (x_2^2 + 3y_2^2)}{64} - \frac{x_1 y_1 x_2 y_2}{8} \right], \quad (29)$$

$$F_0 = \frac{4x_1 y_1 y_2 + x_2(x_1^2 - 4y_1^2)}{8}, \quad F_1 = x_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{x_1^2 + 4y_1^2}{8} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{16} \right]. \quad (30)$$

Подставляя S (27) в (6), при $\varepsilon_r \cong 0$, $\sin x_0 = x_2 = y_2 = x_1 y_1 = y_0 = 0$ получим соответствующие уравнения для нахождения точек равновесия и характеристических корней λ_0

$$S'_{x_2} \cong S'_{y_2} \cong S'_{y_0} \cong S'_{x_0} \cong 0, \quad (31)$$

$$S'_{x_1} = x_1 \left[1 - 4\varepsilon_0^\pm \left(1 - \frac{x_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{2} \right) - 2\varepsilon_1^\pm \left(1 - \frac{x_1^2}{6} \right) \right] \cong 0. \quad (32)$$

$$S'_{y_1} = y_1 \left[1 - 4\varepsilon_0^\pm \left(1 - \frac{x_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{2} \right) + 2\varepsilon_1^\pm \left(1 - \frac{2}{3} y_1^2 \right) \right] \cong 0, \quad (33)$$

$$(\lambda^2 + S''_{x_1 x_1}) [(\lambda^2 + S''_{x_2 x_2} S''_{y_2 y_2}) \cdot (\lambda^2 + S''_{x_0 x_0} S''_{y_0 y_0}) - S''_{y_2 y_2} S''_{y_0 y_0} S''_{x_0 x_2}], \quad (34)$$

где

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_r, \quad \varepsilon_{0,1}^\pm = \varepsilon_{0,1} \cos x_0 \quad \text{и} \quad S''_{i,j} = f(x_1, y_1, \varepsilon_{0,1}^\pm). \quad (35)$$

В случае $x_1 = y_1 = 0$ выражения (32), (33) тождественно равны нулю и

$$\left\{ \lambda^2 + \frac{1}{16} [(1 - 4\epsilon_0^\pm)^2 - 4\epsilon_1^{\pm 2}] \right\} \left\{ \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} (1 + \epsilon_0^\pm)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (1 - \epsilon_0^\pm) [\epsilon_1^{\pm 2} + 2\epsilon_0^\pm (1 - \epsilon_0^\pm)] \right\}. \quad (36)$$

Из первой скобки (36) получаем оценку верхней границы устойчивого решения $4 (\epsilon_1^\pm)^2 < (1 - 4\epsilon_0^\pm)^2$, из второй — нижней $(\epsilon_1^\pm)^2 > 2 |\epsilon_0^\pm (1 - \epsilon_0^\pm)|$, что находится в согласии с результатами, полученными ранее другими методами для маятника Капицы ($\epsilon_1^\pm < 0$) вне зоны параметрического резонанса [2, 15].

В случае $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ ($x = 0, y_1 \neq 0$) из условий $S'_{x_1} = 0$ ($S'_{y_1} = 0$) (34)–(35) можно получить

$$x_1^2 = 6 \left[\frac{4\epsilon_0^\pm + 2\epsilon_1^\pm - 1}{2\epsilon_1^\pm + 3\epsilon_0^\pm} \right], \quad \left(y_1^2 = \frac{4\epsilon_0^\pm - 2\epsilon_1^\pm - 1}{3\epsilon_0^\pm - 2\epsilon_1^\pm} \frac{3}{2} \right), \quad (37)$$

$$\left[\lambda^2 + \frac{x_1^2}{24} (2\epsilon_0^\pm + \epsilon_1^\pm + 1) \right] f_x(\lambda) = 0, \quad \left[\left[\lambda^2 - \frac{\epsilon_1^\pm}{6} y_1^2 (2\epsilon_0^\pm - 2\epsilon_1^\pm - 1) \right] f_y(\lambda) = 0 \right], \quad (38)$$

где $f_{x,y}(\lambda)$ — выражения в квадратной скобке (34).

Из (38) следует существование двух устойчивых состояний движения маятника Капицы ($\epsilon_0^\pm < 0$) в зоне параметрического резонанса $2\epsilon_1^\pm > 4 |\epsilon_0^\pm| + 1$, ($2 |\epsilon_1^\pm| > 4 |\epsilon_0^\pm| + 1$), отличающихся друг от друга только сменой знака ϵ_1^\pm . Результат с $y_1 \neq 0$, (37) и $\epsilon_0 = 0$ ранее был получен методом Крылова—Боголюбова [1, с. 281] без учета x_0, x_2, y_2, y_0 и соответствующего анализа на устойчивость. Такой подход не является корректным, так как отбрасывание членов с x_2, y_2 в (25) на частоте возмущающей силы приводит, как это следует из (34), (35), к неверному заключению о неустойчивости возбужденных колебаний маятника Капицы в зоне резонанса по x_0, y_0 , что противоречит проведенному опыту и результатам численного моделирования [12].

В наиболее простом случае с $\epsilon_0 = 0$ точка бифуркации $1/\alpha = 2 \leftrightarrow 1/\alpha = 1$ находится из совместного рассмотрения двух периодических решений по сценарию (II). Проводя вычисления, аналогичные (34)–(38), вблизи точки равновесия $x_0 = \pm(2n+1)\pi/2, x_1 = y_1 = y_0 = 0$ получим

$$\prod_{k=0}^2 (\lambda^2 + S''_{x_k x_k} S''_{y_k y_k} - \delta_k^2 S''_{x_k y_k}) = 0, \quad (39)$$

$$S''_{x_0 x_0} \cdot S''_{y_0 y_0} = -\frac{\epsilon_1^* x_2}{2} \left(1 - \frac{x_2^2}{8} \right), \quad S''_{x_1 x_1} \cdot S''_{y_1 y_1} = \frac{1}{16} (1 + 2\epsilon_1^* x_2^2), \quad (40)$$

$$S''_{x_2 x_2} \cdot S''_{y_2 y_2} - S''_{x_2 y_2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3\epsilon_1^* x_2}{4} \right), \quad (41)$$

$$x_2 \cong \frac{4}{3\epsilon_1^*} \left(1 - \left(1 + \frac{3}{2} \epsilon_1^{*2} \right)^{1/2} \right), \quad \epsilon_1^* = \epsilon_1 \sin x_0, \quad y_2 = 0. \quad (42)$$

Периодические решения с $\alpha^{-1} = 1$ при $|x_2| < \pi/2$ неустойчивы по x_0, y_0 [$\exp |\lambda| \tau$], так как $S''_{x_0 x_0} \cdot S''_{y_0 y_0} < 0$. Решая совместно (37), (42), можно определить соответствующую точку бифуркации из условия (см. рисунок)

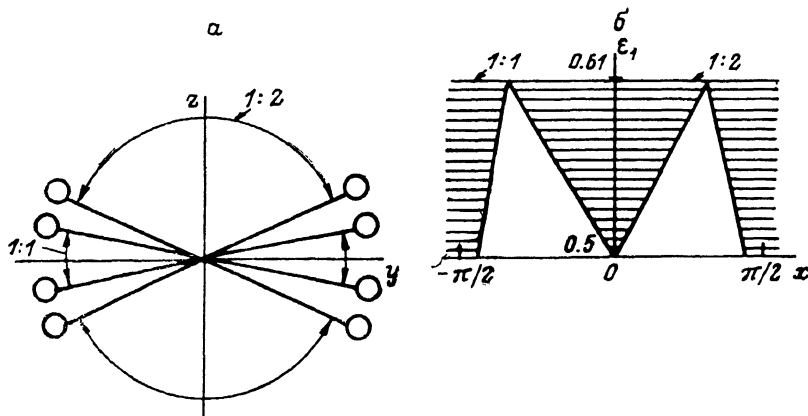
$$|x_1^*(\epsilon_1^*)| + |x_2^*(\epsilon_1^*)| = \frac{\pi}{2}, \quad (43)$$

$x_1^* \cong 59^\circ, x_2^* \cong 31^\circ, \epsilon_1^* \cong 0.61$.

В данном случае (с $\epsilon_0 = 0$) появление бифуркации может одновременно привести к возникновению хаоса в системе (1) (см. рисунок). Причиной могут послужить флуктуации, погрешности от макросистемы, используемой при физическом, аналоговом или численном моделировании детерминированной системы, описываемой уравнением (1). В результате будут наблюдаться каскады переходов между различными типами периодических движений при $\epsilon_1 = \epsilon_1^*$ (колебательными 1 : 2, 1 : 1; вращательными 1 : 1 и др.), воспринимаемые как хаос.

Машинное моделирование уравнения (1) на АЦВК ГВС «Русалка» и натурное моделирование на магнитной стрелке от компаса, помещенной в магнитное поле, подтвердили правильность полученных результатов в пределах погрешностей моделирования.

В конце своей работы [2] П. Л. Капица отмечал, что ориентирующий момент сил, возникающий при колебательных процессах, ускользал от внимания физиков, поэтому было бы интересно поставить вопрос о возможности наблюдения ориентирующего эффекта вибрационного момента на частицы и молекулы.



Сценарий появления бифуркации для перевернутого маятника по Пуанкаре при $\epsilon_0=0$.

$a - 0.5 < \epsilon_1 < 0.61$, $b -$ зависимости $x_1, x_2(\epsilon_1)$.

кулы. Лишь позднее такая возможность была реализована в ряде работ по удержанию и захвату заряженных частиц [3, 26, 27], частиц с магнитным моментом [28, 29] вне зоны и в зоне параметрического резонанса [25, 30, 31] в неоднородных электромагнитных полях.

В заключение автор выражает признательность А. С. Боровику-Романову, М. И. Каганову и другим участникам семинара за обсуждение работы и сделанные замечания.

Список литературы

- [1] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [2] Капица П. Л. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588—597.
- [3] Тошек П. Э. // УФН. 1989. Т. 158. № 3. С. 451—498.
- [4] Баталова З. С., Бухалова Н. В. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. С. 401—409.
- [5] Баталова З. С., Белякова Г. В., Бухалова Н. В. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 18—25.
- [6] Баталова З. С., Белякова Г. В. // ПММ. 1988. Т. 52. С. 53—63.
- [7] Зевин А. А., Филоненко Л. А. // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 49—53.
- [8] Chirikov V. V. // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. N 5. P. 263—379.
- [9] Челомей В. Н. // ДАН СССР. 1983. Т. 270. С. 62—67.
- [10] Лигтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [11] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958.
- [12] Баталова З. С., Белякова Г. В. // Динамика систем. Оптимизация и адаптация. Горький, 1982. С. 145—153.
- [13] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. Т. 1.
- [14] Хаяси Е. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968.
- [15] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
- [16] Козлов В. В. // ДАН СССР. 1986. Т. 288. № 2. С. 289—291.
- [17] Козлов В. В. // ДАН СССР. 1982. Т. 264. № 3. С. 567—570.
- [18] Белецкий В. В., Шлятин А. Н. // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 829—832.
- [19] Белецкий В. В., Касаткин Г. В. // ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 1. С. 58—62.
- [20] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
- [21] Валеев К. Г., Ганиев Р. Ф. // ПММ. 1969. Т. 33. С. 413—430.
- [22] Ovenden M. W., Feagin T., Graff O. // Celestial Mechanics. 1974. Vol. 8. N 4. P. 455—471.
- [23] Блехман И. И. // ПММ. 1960. Т. 24. С. 1100—1103.
- [24] Корн К., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
- [25] Воиштетт А. В., Широносков В. Г. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 5. С. 82—85.

- [26] Гапонов А. В., Миллер М. А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. Вып. 1. С. 242—243.
- [27] Wierker R. F., Shelton H., Langmuir R. V. // J. Appl. Phys. 1959. Vol. 30. N 3. P. 342—349.
- [28] Van der Heide H. // Philips Tech. Rev. 1974. Vol. 34. N 2/3. P. 61—72.
- [29] Широносков В. Г., Бонштедт А. В. // Тез. докл. XVIII Всесоюз. конф. по физике магнитных явлений. Калинин, 1988. С. 886—887.
- [30] Широносков В. Г. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 7. С. 1414—1416.
- [31] Широносков В. Г. // Изв. вузов. Физика. 1985. Т. 28. № 7. С. 74—78.

Физико-технический институт
УрО АН СССР
Ижевск

Поступило в Редакцию
22 ноября 1989 г.
В окончательной редакции
6 июня 1990 г.