1990 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 60, в. 12
1990 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 60, N 12

01; 03

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

Ю. В. Саночкин

Рассмотрена структура диффузионных пограничных слоев, образующихся на неизотермической границе раздела при растворении газа в жидкость или переносе примеси из одной жидкости в другую. Показано, что она существенно отличается от структуры слоев на твердом теле. Вследствие термокапиллярного эффекта появляется зависимость профиля концентрации от числа Прандтля, изменяется зависимость толщины слоя и плотности потока частиц от числа Шмидта. Указанные изменения различны для разных тепловых и диффузионных условий. Например, в бинарной смеси с градиентом концентрации, параллельном границе, толщина диффузионного слоя зависит только от числа Прандтля.

Введение

В определенных условиях на свободной поверхности жидкости или границе между несмешивающимися жидкостями развиваются термокапиллярные пограничные слои [1-4].

Целью данной работы является изучение структуры диффузионных пограничных слоев на границах раздела сред. Конвективная диффузия вдоль них представляет широкие возможности по легко регулируемой доставке нужного вещества в заданное место, организации поверхностной реакции с отводом продуктов и т. д. и представляет интерес с точки зрения технологии и биомеханики, в том числе на клеточном уровне.

Ограничимся рассмотрением термокапиллярных слоев [1, 2], характеризующихся изотермичностью начального сечения, нормального к границе раздела. Предполагается, что жидкости суть бинарные смеси. Считая их концентрации c_j, где $j=1, 2$ в случае контакта двух жидкостей, малыми, будем пренебрегать термодиффузией и зависимостью коэффициентов диффузии D_j от температуры [5]. Предполагается, что перенос примеси и ее адсорбция на границе раздела не сказывается на величине коэффициента поверхностного натяжения α. В отсутствие концентрационно-капиллярного эффекта задача о диффузии отделяется от гидродинамической и поле скоростей определяется из совместного решения уравнений динамического и температурного пограничных слоев. Поскольку коэффициент диффузии в жидкостях обычно мал, то вместо полного уравнения переноса используется уравнение диффузионного пограничного слоя. Некоторые задачи о конвективной диффузии допускают в указанном приближении решение в замкнутом виде без привлечения численного интегрирования, если ограничиться рассмотрением плоского случая и воспользоваться полученными в [2] явными выражениями для составляющих скорости.

1. Массоперенос на свободной границе неизотермической жидкости

Пусть жидкость заполняет полубесконечную область. Ортогональную систему координат, связанную с ее динамической свободной поверхностью, при рассмотрении структуры пограничных слоев можно считать прямолинейной декартовой. Ось x направлена вдоль границы раздела $y=0$ в сторону движения, ось y — в глубь жидкости. Движение вызывается параллельным границе градиентом температуры β при $y \to \infty$. Свободную поверхность будем считать для определенности теплоизолированной. Тогда распределение скорости описывается выражениями [2]

$$u=\left(\frac{3\alpha'^2\beta^2 x}{\nu\rho^2}\right)^{1/3} w\varphi'(\eta), \quad \eta = w^{1/2}\left(\frac{\alpha'\beta}{3\rho\nu^2 x}\right)^{1/3} y,$$

$$v=\left(\frac{\alpha'\beta\nu}{3\rho x}\right)^{1/3} w^{1/2}(\eta\varphi'-2\varphi). \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, $\alpha'=-d\alpha/dT$, $\varphi(\eta)$ — изученное в [4] решение задачи

$$\varphi'''+2\varphi\varphi''-\varphi'^2=0, \ \varphi(0)=\varphi'(\infty)=0, \ \varphi'(0)=1, \tag{2}$$

которое описывает вязкий пограничный слой толщиной $\Delta\eta \sim 1$. Величина w в (1) зависит только от числа Прандтля и имеет асимптотики $w \to 0.488$ при $P \to 0$ и $w=0.765P^{-1/2}$ при $P \gg 1$.

Рассмотрим задачу о растворении газа в жидкости

$$uc_x+vc_y=Dc_{yy}, \ c(x, 0)=c_0, \ c(x, \infty)=0. \tag{3}$$

Диффундирующее вещество подводится к жидкости из внешней области, и на границе жидкости, соприкасающейся с газовой атмосферой, устанавливается равновесная концентрация c_0. Задача (3) допускает автомодельное решение $c(\eta)$. Подставляя (1) в (3) и интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение, находим

$$\frac{c}{c_0}=1-\frac{\Phi(\eta, S)}{\Phi(\infty, S)},$$

$$\Phi=\int_0^\eta \exp\left[-2S\int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1\right]dt, \tag{4}$$

где $S=\nu/D$ — число Шмидта.

Поскольку в жидкостях обычно $S \gg 1$, то, как видно из (4), толщина диффузионного слоя δ_c по порядку величины в $\sqrt{S}$ раз меньше толщины динамического слоя. Решение (4) соответствует максимально возможному перепаду концентраций и, следовательно, наибольшему значению диффузионного потока частиц на поверхность жидкости (режим предельного потока). Указанная величина дается выражением

$$i=\frac{2}{\sqrt{\pi}}Dc_0\left(\frac{\alpha'\beta}{3\nu^2\rho x}\right)^{1/3}(wS)^{1/2}. \tag{5}$$

Здесь учтено, что главный член асимптотики $\Phi(\infty, S)$ при $S \to \infty$ есть $\Phi \sim (\pi/4S)^{1/2}$. Определяя толщину диффузионного слоя выражением $\delta_c=Dc_0/i$, имеем

$$\delta_c=\sqrt{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3\nu^2\rho x}{\alpha'\beta}\right)^{1/3}(wS)^{-1/2}. \tag{6}$$

Решение уравнения (3) с граничными условиями $c(x, 0)=0$, $c(x, \infty)=c_0$ дается зеркально отраженным (4) распределением концентрации

$$\frac{c}{c_0}=\frac{\Phi(\eta)}{\Phi(\infty)}.$$

Оно описывает реакцию на поверхности жидкости, скорость которой настолько велика, что молекулы примеси, подходящие к границе, мгновенно реагируют и их концентрация исчезает.

Как видно из (5), (6), характеристики диффузионного пограничного слоя на свободной поверхности жидкости существенно отличаются от свойств слоев на твердых поверхностях [6]. Изменяется зависимость толщины слоя и плотности потока частиц на контактную поверхность от числа Шмидта. Вследствие термокапиллярного эффекта появляется зависимость профиля концентрации и производных величин от числа Прандтля. Отказ от условия адиабатичности свободной границы не приводит к качественным изменениям полученных закономерностей, поскольку решение для скорости и температуры сохраняет прежний вид [2].

2. Диффузионные пограничные слои на границе раздела несмешивающихся жидкостей

Рассмотрим вопрос о переносе вещества из одной жидкости в другую при наличии термокапиллярной конвекции. Учет процессов в обеих средах по разные стороны поверхности раздела позволяет избавиться от модельности тепловых и диффузионных условий, задаваемых на свободной границе. Пусть жидкость 1 есть бинарная смесь с невозмущенной концентрацией $c_1(x, \infty)=c_\infty$, жидкость 2 — чистая $c_2(x, -\infty)=0$. Граничные условия на поверхности раздела

$$c_1 = c_2, \quad D_1 \frac{\partial c_1}{\partial y} = D_2 \frac{\partial c_2}{\partial y}, \quad y = 0 \tag{7}$$

выражают непрерывность массопереноса и то обстоятельство, что адсорбция и десорбция вещества на границе суть быстрые процессы, не лимитирующие массообмен. При $y \to \pm\infty$ задаются постоянные градиенты температуры $dT_j/dx = -\beta_j\beta$, где β_j — произвольные числовые параметры. Например, при $\beta_j=0$ в невозмущенном состоянии жидкость j изотермична. Согласно [2], решение динамической задачи в обеих областях выражается через функцию $\varphi(\eta)$, удовлетворяющую (2), если перейти к переменной

$$\eta = (-1)^{j+1} w_j^{1/2} \left(\frac{\alpha' \beta}{3\rho_j \nu_j^2 x} \right)^{1/3} y, \quad j = 1, \ 2.$$

Взятые с соответствующими знаками компоненты скоростей u_j, $(-1)^{j+1} v_j$ даются прежними формулами (1) со своими значениями материальных констант. Однако каждый из параметров w_j, входящих в (1), зависит теперь от β_1, β_2, P_1, P_2 и остальных безразмерных критериев. Решение уравнений (3) для обеих жидкостей ищется в виде $c_\infty c_j(\eta)$. Уравнения для c_j отличаются только значениями чисел Шмидта

$$c_j'' + 2S_j \varphi c_j' = 0. \tag{8}$$

Удовлетворяющее (7) решение системы (8) имеет вид

$$c_1 = c_0 \left[1 + \sqrt{\frac{4S_1}{\pi}} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \, \Phi(\eta, \ S_1) \right],$$

$$c_2 = c_0 \left[1 - \sqrt{\frac{4S_2}{\pi}} \, \Phi(\eta, \ S_2) \right], \quad c_0 = \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}}. \tag{9}$$

Здесь Φ дается (4) и предположено, что S_1, $S_2 \gg 1$. Согласно (9), равновесная концентрация на границе раздела c_0 и перепады концентраций в жидкостях $\Delta c_1 = 1 - c_0$, $\Delta c_2 = c_0$ зависят только от соотношения коэффициентов диффузии. Если $D_1 \gg D_2$ (как в случае контакта газовой и жидкой фаз), то c_0 близка к невозмущенной, напротив, $c_0 = (D_1/D_2)^{1/2} \ll 1$ при $D_1 \ll D_2$. Плотность потока частиц на поверхности раздела выражается одинаковым образом (как в формуле

(5)) через характеристики той или другой жидкости

$$i=\frac{2}{\sqrt{\pi}}c_\infty \Delta c_j D_j\left(\frac{a'\beta}{3\rho_j\nu_j^2 x}\right)^{1/3}(w_j S_j)^{1/2},\quad j=1,\ 2. \tag{10}$$

Учитывая соотношение [2]

$$w_1 S_1 D_1(\rho_2\nu_2^2)^{2/3}=w_2 S_2 D_2(\rho_1\nu_1^2)^{2/3}, \tag{11}$$

можно проверить, что формулы (10) представляют одну и ту же величину. Толщины диффузионных пограничных слоев, определенные, как прежде, выражениями $\delta_j=c_\infty\Delta c_j D_j/i$, даются формулами (6) со своими значениями материальных констант и безразмерных параметров. С помощью (11) нетрудно установить их пропорциональность $\delta_2=(D_2/D_1)^{1/2}\delta_1$.

Специфика тепловых условий задачи, вязкое и тепловое взаимодействие контактирующих сред учитываются в (9), (10) через изученную в [2] зависимость параметров w_j от коэффициентов переноса и теплофизических характеристик обеих жидкостей.

3. Параллельный свободной границе градиент концентрации

Пусть, как в разделе 1, жидкая смесь заполняет полубесконечную область и в невозмущенном состоянии кроме градиента температуры имеется и градиент концентрации $c\ (x,\ \infty)=\gamma x$. Приведем примеры диффузионных слоев, возникающих на границе жидкости вследствие термокапиллярного движения. Их структура отличается от структуры рассмотренных выше слоев. Решение уравнения (3) с коэффициентами (1) ищется в виде $c=\gamma x\sigma\ (\eta)$. Для определения σ получается уравнение

$$S^{-1}\sigma''+2\varphi\sigma'-3\varphi'\sigma=0, \tag{12}$$

отличающееся от уравнения тепловой задачи раздела 1 заменой $P\to S$. Граничные условия $\sigma\ (\infty)=1$, $\sigma'\ (0)=0$ к (12) соответствуют задаче о перераспределении примеси в жидкости при наличии конвекции. Главные члены асимптотического ($S\gg 1$) разложения решения имеют вид [2] для внешнего решения

$$\sigma(\eta)=\left(\frac{\varphi}{\varphi_\infty}\right)^{3/2}-\frac{\sqrt{\pi/2}\ V_0'}{4S^2U_0'\varphi_\infty^{3/2}}\varphi^{-3/2}\exp\left(-2S\int_0^\eta\varphi dt\right), \tag{13}$$

для внутреннего решения

$$\sigma(\zeta)=\frac{\sqrt{\pi/2}\ \exp(-\zeta^2/2)}{(2S)^{3/4}\varphi_\infty^{3/2}U_0'}(U_0'V-V_0'U),\quad \zeta=\sqrt{S}\ \eta. \tag{14}$$

Здесь $\varphi_\infty=\varphi\ (\infty)=0.7515$, $U=U\ (2,\ \sqrt{2}\ \zeta)$, $V=V\ (2,\ \sqrt{2}\ \zeta)$ — функции параболического цилиндра со значением параметра 2 [7], $U_0'=U'\ (2,\ 0)$, $V_0'=V'\ (2,\ 0)$. Согласно (13), толщины вязкого и диффузионного пограничных слоев совпадают. Полагая в (14) $\zeta=0$, находим, что градиент концентрации вдоль свободной поверхности уменьшается подобно градиенту температуры $\sigma\ (0)=0.785\ S^{-3/4}$.

Рассмотрим задачу о гетерогенном превращении в режиме предельного потока, которой соответствует система граничных условий к (12) $\sigma\ (\infty)=1$, $\sigma\ (0)=0$. Ее решение выражается разложениями, подобными (13), (14) [2]. Не приводя их, отметим, что толщины динамического и диффузионного слоев, как и в предыдущем случае, совпадают. Для потока частиц на поверхность реакции получается выражение

$$i=\frac{\Gamma(7/4)}{(\varphi_\infty/2)^{3/2}}\gamma D\left(\frac{a'\beta x^2}{3\rho\nu^2}\right)^{1/3}w^{1/2}S^{-1/4}. \tag{15}$$

Обращает на себя внимание существенно отличная зависимость (15) от S по сравнению с (5).

Список литературы

[1] *Napolitano L. G.*, *Golia C.* // Acta Astronautica. 1981. Vol. 8. N 5—6. P. 417—434.
[2] *Саночкин Ю. В.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 12. С. 13—21.
[3] *Cowley S. J.*, *Davis S. H.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 135. P. 175—188.
[4] *Саночкин Ю. В.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 193—196.
[5] *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 658 с.
[6] *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 510 с.
[7] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Всесоюзный электротехнический институт
им. В. И. Ленина
Москва

Поступило в Редакцию
11 декабря 1989 г.