01; 04

АНОМАЛЬНОЕ ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПЛАЗМЫ

В. А. Буц, С. С. Моисеев

Показано, что учет флуктуаций среды качественно меняет эволюцию неравновесных систем. Обнаружен новый тип хаотического состояния — флуктуационный хаос с экспоненциально быстро нарастающей дисперсией, инициированный малыми флуктуациями среды в условиях, когда динамический хаос еще невозможен. В качестве примера исследуется параметрическая неустойчивость в плазме. Далее показано, что в окрестности изолированного неустойчивого состояния учет флуктуаций приводит к ускоренной релаксации системы с развивающейся перемежаемостью.

На примере циклотронного резонанса в плазме показано, что в условиях авторезонанса диффузия частиц по энергии аномально велика.

Введение

Флуктуации в плазме достаточно хорошо исследованы (см., например, [1]). Что же касается их влияния на многие критические явления (переход через порог устойчивости, в том числе с учетом различных резонансных процессов, возникновение интенсивного хаоса в системах с малым начальным шумом и др.), то эта область явлений изучена недостаточно. Особенно это касается флуктуаций, обусловленных случайностью среды (внешнего шума). Дело обычно ограничивается тем, что используют флуктуации в качестве «поставщика» нужного типа возмущений. На самом деле их роль гораздо сильнее, коротко говоря, поведение даже малых флуктуаций очень агрессивно, и поэтому их нельзя выбрасывать. В частности, качественно меняются представления об установлении хаоса в динамических системах. Это уже вытекает из анализа простейшей нелинейной динамической системы — осциллятора Дюффинга [2]. В самом деле, из [2] уже при учете аддитивного шума вытекает ускоренный режим развития неустойчивости. При этом вторые моменты исследуемого случайного поля растут быстрее первых, т. е. в системе нарастает дисперсия и, следовательно, хаос (так называемый флуктуационный хаос). Как, в частности, показано в разделе 1 настоящей работы на примере параметрической неустойчивости, флуктуационный хаос может возникнуть при амплитудах, существенно меньших тех, при которых возникает динамический хаос, т. е. флуктуации рождают новые критические состояния. При этом роль мультипликативного шума (например, флуктуаций собственной частоты) гораздо сильнее, чем аддитивного. Таким образом, под действием малых флуктуаций область хаоса существенно расширяется. Отметим также, что подобная хаотизация возможна и в интегрируемых без шума системах, где динамический хаос в принципе невозможен. Не менее важным является вопрос об ускорении развития неустойчивости, вообще об ускоренном прохождении точки бифуркации под влиянием флуктуаций. С термодинамической точки зрения очевидно, что в результате эволюции система с необходимостью стремится к максимально возможному в данных условиях равновесному состоянию. В разделе 2 показано, что по крайней мере в случае изолированной точки потеря устойчивости под влиянием мультипликативных флуктуаций экспоненциально ускоряется, причем система сразу «стартует» к хаотическому состоянию, а хаос является перемежаемым. Последнее, в частности, означает, что с течением времени энергия нарастающих возмущений концентрируется в узких областях пространства.

Наконец, в разделе 3 на примере циклотронного резонанса анализируется влияние малой случайной добавки к магнитному полю на диффузию заряженных частиц по энергии. Показано, что при авторезонансе (условия, накладываемые интегралом движения, близки к циклотронному резонансу) коэффициент диффузии частиц по энергии аномально велик.

1. Флуктуационный хаос

Последние два-три десятка лет две проблемы физики нелинейных сред (в том числе нелинейной физики плазмы) — динамический хаос и самоорганизация особенно интриговали исследователей (см., например, [3, 4]). В данном разделе, анализируя достаточно характерный пример параметрической неустойчивости, мы покажем, что рассмотрение первой проблемы часто носило скорее академический, нежели практический характер. Конечно, получить шум без шума элегантно и по существу важно. Однако, в системе всегда имеется малый шум и пренебрежение им фактически основывается на предположении о его «неагрессивном» поведении. Мы покажем, что это во многих случаях не так.

Рассмотрим распад поперечной волны с частотой ω на поперечную и ленгмюровскую ($t \to t'+e$). Исходную систему уравнений можно заметно упростить в случае, когда частота электромагнитного поля существенно превышает электронную плазменную частоту ω_p. Тогда после усреднения по «быстрому» времени получим следующую систему уравнений для определения медленно меняющихся величин:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - k_0^2\varepsilon\mathbf{E} - \frac{2ik_1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\delta n}{n_0}\mathbf{E},$$

$$\frac{\partial^2\delta n}{\partial t^2} + \omega_p^2\delta n - v_{Te}^2\Delta\delta n = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\Delta|\mathbf{E}|^2}{16\pi m}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — огибающая ВЧ-электромагнитного поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}e^{-i\omega t} + \text{к. с.}],$$

δn — медленное изменение плотности электронов плазмы, $k_0 = \omega/c$, $\varepsilon = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$, $v_{Te}^2 = T_e/m$ (T_e — температура электронов, m — их масса). Решение (1) ищем в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_i(t)\,e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r} - i\delta t} + \mathbf{A}_s(t)\,e^{i\mathbf{k}_s\mathbf{r}},$$

$$\delta n = \frac{1}{2}\delta n_p(t)\,e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{r}} + \text{к. с.} \tag{2}$$

При этом $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_p$, $\delta = \omega_i - \omega_s \left(\frac{|\delta|}{\omega_{i,s}} \ll 1\right)$. Будем далее считать, что плотность плазмы $n = n_0 + \tilde{n}(t)$, где $\tilde{n}(t)$ — флуктуирующая добавка, для простоты однородна в пространстве. Тогда, подставляя решение (2) в (1) и переходя к безразмерным переменным, получим следующую систему уравнений для определения амплитуд взаимодействующих колебаний:

$$\frac{dC_0}{d\tau} = -i\rho(1+z)\,e^{i\Delta\tau}C_1,$$

$$\frac{dC_1}{d\tau} = -i\rho^* C_0(1+z)\,e^{-i\Delta\tau},$$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau} + \Gamma^2(1+z)\rho = -C_0C_i^*(1+z)\,e^{-i\Delta\tau}. \tag{3}$$

В (3) введена система обозначений, а именно:

$$C_0=\frac{A_i}{A_0},\quad C_i=\frac{A_s}{A_0},\quad \rho=\left(\frac{\mu^2}{\alpha A_0^2}\right)^{1/3}\frac{\delta n}{n_0},$$

$\mathbf{A}_{i,s}=\mathbf{e}_{i,s}A_{i,s}$, $\mathbf{e}_{i,s}$ — единичные вектора поляризации электрического поля поперечной электромагнитной волны $(\mathbf{e}_{i,s}\mathbf{k}_{i,s}=0)$, $A_0=A_{i(t=0)}$ — начальное значение электромагнитной волны накачки, $\mu\equiv\omega_p^2\cos\theta/4\omega_i$, $\alpha\equiv k_p^2\omega_p^2\cos\theta/\omega_i^2 8\pi n_0 m$, θ — угол между векторами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_s$, $\tau=(\mu\alpha A_0^2)^{1/3}t$,

$$\Delta=\frac{\delta}{(\mu\alpha A_0^2)^{1/3}},\quad z=\frac{\tilde{n}}{n},\quad \Gamma^2=\frac{\omega_p^2}{(\mu\alpha A_0^2)^{2/3}}\equiv\left(\frac{\omega_p^3\cos^2\theta A_0^2}{32\pi\omega_i^3 n_0 m v_\phi^2}\right)^{-2/3}\left(v_\phi=\frac{\omega_p}{k_p}\right).$$

Следует отметить, что система уравнений (3) носит достаточно универсальный характер и описывает широкий класс распадных процессов, в том числе распад плазменной волны на плазменную и ионно-звуковую, распадные процессы в плазменно-пучковых системах. При этом меняются только параметры Γ (обратно пропорциональный амплитуде волны накачки) и Δ.

Кратко проанализируем результаты в различных предельных случаях. При $z=0$ и $C_0(\tau)=\mathrm{const}=1$ решение (3) ищем в виде $\rho=\rho_0 e^{i\Omega\tau}$, $C_1=C_{10}e^{i\Omega\tau-i\Delta\tau}$. Тогда линейная стадия параметрической неустойчивости характеризуется инкрементом, максимальным при $\Delta=\Gamma$ для $\Gamma\gg 1$ $(\mathrm{Im}\,\Omega=1/\sqrt{2\Gamma})$, а в случае $\Gamma<1$ инкремент достигает максимального значения при $\Delta=0$ $(\mathrm{Im}\,\Omega=\sqrt{3}/2)$. В этом последнем случае развивается модифицированный распад, когда в резонансе с электромагнитными волнами находятся обе плазменные волны (прямая и обратная).

Анализ нелинейной стадии параметрической неустойчивости $(C_0\neq\mathrm{const})$ был проведен численными методами (в случае $z=0$) при различных значениях Γ и Δ. При этом оказалось, что в случае $\Gamma\gg 1$ происходит регулярный периодический обмен энергией между взаимодействующими волнами. Характерный временнóй период этого процесса определяется обратной величиной инкремента линейной стадии. При $\Gamma<1$ динамика распада качественно меняется. Она становится хаотической, что соответствует перекрытию резонансов $\omega_i=\omega_s\pm\omega_p$. Учтем теперь малые флуктуации плотности и исследуем случай малых заданных амплитуд волны накачки ($C_0=1$ и $\Gamma\gg 1$), когда взаимодействие электромагнитных волн происходит только с одной плазменной волной. Система (3) может быть еще более упрощена следующей заменой:

$$\rho(\tau)=\mathrm{P}(\tau)\,e^{-i\Gamma\tau}, \tag{4}$$

где $\mathrm{P}(\tau)$ — новая медленная переменная.

Подставляя (4) в (3) и считая, что выполнены условия синхронизма ($\Gamma=\Delta$), получим простую систему уравнений для определения амплитуд C_1 и P

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\tau}+\frac{1}{2}\Gamma z\mathrm{P}=-\frac{i}{2\Gamma}(1+z)C,$$

$$\frac{dC}{d\tau}=i(1+z)\,\mathrm{P}, \tag{5}$$

где $C=C_1^*$.

Используя формулу Фуруцу—Новикова (см., например, [5]), а также выражения для вариационных производных, которые следуют из уравнений (5),

$$\frac{\delta\mathrm{P}(\tau)}{\delta z(\tau)}=-\frac{i}{4}\left[\frac{1}{\Gamma}C+\Gamma\mathrm{P}\right],$$

$$\frac{\delta C(\tau)}{\delta z(\tau)}=\frac{i}{2}\mathrm{P}, \tag{6}$$

получим следующие уравнения для первых и вторых моментов:

$$\frac{d\langle \mathrm{P}\rangle}{d\tau}+\frac{i}{2}\Gamma D\left\{-\frac{i}{2}\Gamma\langle \mathrm{P}\rangle-\frac{i}{2\Gamma}\langle C\rangle\right\}=-\frac{i}{2\Gamma}\langle C\rangle+\frac{1}{2\Gamma}D\langle \mathrm{P}\rangle,$$

$$\frac{d\langle C\rangle}{d\tau}=i\langle \mathrm{P}\rangle+\frac{D}{2}\left\{\Gamma\langle \mathrm{P}\rangle+\frac{1}{\Gamma}\langle C\rangle\right\},$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle \mathrm{P}^2\rangle+D\Gamma^2\langle \mathrm{P}^2\rangle=-\frac{i}{\Gamma}\langle C\mathrm{P}\rangle+D\left(\frac{\langle \mathrm{P}^2\rangle}{\Gamma}-\frac{C^2}{2\Gamma^2}-\langle C\mathrm{P}\rangle\right),$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle C\mathrm{P}\rangle+\frac{D\Gamma^2}{4}\langle C\mathrm{P}\rangle-\frac{D\Gamma}{2}\langle \mathrm{P}^2\rangle=-\frac{i}{2\Gamma}\langle C^2\rangle+i\langle \mathrm{P}^2\rangle+\frac{2}{\Gamma}\langle C\mathrm{P}\rangle-\frac{D}{4}\langle C^2\rangle, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\langle C^2\rangle=\langle C\mathrm{P}\rangle\left(i+\frac{D\Gamma}{2}\right)+\frac{D}{2\Gamma}\langle C^2\rangle-D\langle \mathrm{P}^2\rangle. \quad (8)$$

При получении систем уравнений (7), (8) мы полагаем для простоты, что функция $z(\tau)$ представляет гауссовский δ-коррелированный случайный процесс с нулевым средним

$$\langle z(\tau)\rangle=0,\ \ \langle z(\tau)\,z(\tau_1)\rangle=2D\delta(\tau-\tau_1). \quad (9)$$

Анализ системы (7), (8) приводит к следующим результатам. При $D\Gamma^2\ll 1$ влияние флуктуаций мало́ и динамика по-прежнему носит регулярный характер. При $D\Gamma^2>1$ первые моменты растут с

$$\operatorname{Im}\omega^{(1)}=\sqrt{\frac{4}{5}}\,\frac{2}{D\Gamma^3}\,\frac{\omega_p}{\Gamma}.$$

Что же касается вторых моментов, то здесь необходимо подчеркнуть следующее: при $D\Gamma^2\gg 1$ прямая и обратная плазменные волны сильно взаимодействуют друг с другом и это влияет прежде всего на поведение вторых моментов. Учет в уравнениях для вторых моментов данного обстоятельства приводит нас к инкременту $\operatorname{Im}\omega^{(2)}\sim D\Gamma^2(\omega_p/\Gamma)\gg\operatorname{Im}\omega^{(1)}$. В результате дисперсия экспоненциально растет и система быстро переходит в хаотический режим. В известном смысле этот развивающийся флуктуационный хаос и есть «чистый» хаос, так как ему не присущи трудности динамического хаоса с «дырами» дехаотизации и «островами» устойчивости. Однако главное заключается в том, что флуктуационный хаос развивается при существенно меньших амплитудах волны накачки, чем динамический хаос.

2. Ускоренная флуктуационная динамика и перемежаемость вблизи неустойчивой точки

В настоящем разделе мы остановимся на одной важной особенности динамики неустойчивого процесса под влиянием флуктуаций у порога устойчивости — ускоренной эволюции системы. Практическая важность для плазмы этого вопроса видна уже на слеующем примере линейной системы:

$$\ddot{x}+\Lambda[1+\rho(t)]x=0. \quad (10)$$

Здесь $\rho(t)$ — случайная гауссова дельта-коррелированная функция ($\langle\rho(t)\,\rho(t')\rangle=2D\delta(t-t')$). При $\rho=0$ уравнение типа (10) описывает устойчивость равновесия плазмы в приближении идеальной магнитной гидродинамики, ленгмюровские колебания холодной плазмы и др. При $\Lambda<0$ (10) описывает неустойчивую систему с $\operatorname{Im}\omega=\sqrt{|\Lambda|}$. Учет $\rho(t)$, как нетрудно видеть, в данном случае не влияет на скорость роста первого момента $\langle x\rangle$, а инкремент для второго момента приобретает положительную добавку $(\Delta(\operatorname{Im}\omega)=(1/2)D|\Lambda|)$, т. е. развивается быстрее. Подчеркнем также, что учет случайной гауссовой добавки в уравнении (10) приводит к универсальной неустойчивости (в том числе для плазмы в приближении МГД) независимо от знака параметра Λ.

Наряду с практической важностью для плазмы указанного вопроса существуют и различные принципиальные проблемы, анализ которых должен претерпеть существенные изменения при учете нарастающего флуктуационного воздействия. Среди этих проблем особое место занимают самоорганизация, образование структур, начинающихся, как известно, с неустойчивости.

Учитывая все сказанное выше, исследуем в настоящем разделе влияние мультипликативных флуктуаций на динамические системы вблизи особых стационарных точек. Тогда, используя принцип подчинения (см., например, [4]) для определения параметра порядка y, получим следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda_1 y + Ay^3) + (z_1 y + z_2 y^2). \tag{11}$$

Пусть система в отсутствие флуктуаций устойчива. Тогда в уравнении для параметра порядка Λ_1 есть собственное значение матрицы, определяющей устойчивость линейной задачи, которое имеет минимальное значение действительной части, т. е. $(\mathrm{Re}\,\Lambda_1) < (\mathrm{Re}\,\Lambda_i)$ $(i \neq 1)$, где i характеризует последовательность уравнений типа (11), описывающих состояние системы вблизи особой точки. В (11) мы учли также кубичную нелинейность и характерные флуктуации z_1 и z_2, по предположению статистически независимые ($\langle z_1 z_2 \rangle = 0$). Мы также будем считать справедливыми обычные соотношения $\langle z_j \rangle = 0$, $\langle z_j(t)\, z_j(t') \rangle = 2D_j \delta(t - t')$, $j = 1, 2$ (по j нет суммирования). Используя формулу Фуруцу—Новикова (см., например, [5]), получим следующую систему уравнений для определения моментов:

$$\frac{d}{dt}\langle y^n \rangle = n(\Lambda_1 + nD)\langle y^n \rangle + n[A + (n+1)D_2]\langle y^{n+2} \rangle. \tag{12}$$

Из (12) следует ряд важных результатов, в том числе тот, что учет флуктуаций приводит к дестабилизации моментов. Причем наличие D_2 может привести к взрывному росту моментов. Рассмотрим прежде всего некоторые следствия в линейном приближении ($A = D_2 = 0$). Тогда из (12) видно, что наличие флуктуаций всегда приводит к ослаблению устойчивости, если $\mathrm{Re}\,\Lambda_1 < 0$, и к ускорению развития неустойчивости, если $\mathrm{Re}\,\Lambda_1 > 0$. Более того, несмотря на малость случайных сил, всегда найдется такой номер n, что $nD_1 > |\mathrm{Re}\,\Lambda_1|$, т. е. вблизи особых точек наличие случайных сил приводит к неустойчивости моментов с номером $n > |\mathrm{Re}\,\Lambda_1|/D$, причем более высокие моменты растут с бо́льшим инкрементом. Такая особенность роста моментов, как показано в [6], характеризует перемежаемость (см. там же более раннюю библиографию о перемежаемости). Таким образом, можно сформулировать следующий общий результат: вблизи одной точки бифуркации наличие мультипликативных случайных сил всегда приводит к ускоренной эволюции системы и развитию перемежаемой стохастичности. Отметим, что ранее близкий результат был обнаружен при анализе околопороговых режимов стратифицированных сдвиговых течений [7, 8]. В качестве примера использования системы (12) в нелинейном режиме рассмотрим динамику второго момента. Считая отклонение y от точки бифуркации малым и используя гауссово приближение, выразим четвертый момент $\langle y^4 \rangle$ через второй. Вводя обозначения $\Lambda^* \equiv (\Lambda_1 + 2D)$ и $A^* = (A + 3D_1)$, считая $\Lambda^* < 0$ и $A^* > 0$, получим из (12)

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\langle y^2 \rangle_0 \exp(-2t\,|\Lambda^*|)}{1 - \dfrac{A^* \langle y^2 \rangle_0}{|\Lambda^*|}\left[1 - e^{-2t\,|\Lambda^*|}\right]}, \tag{13}$$

$\langle y^2 \rangle_0$ — начальное значение второго момента.

Из формулы (13) следует, что если выполнено неравенство $A^* \langle y^2 \rangle_0 > |\Lambda^*|$, то рост второго момента со временем происходит по взрывному закону, несмотря на то что из линейного приближения следует его затухание.

Результаты этого параграфа свидетельствуют о сильном влиянии флуктуаций на устойчивость (а следовательно, на образование структур, нагрев, диффузию, ускорение частиц) динамических, в том числе плазмоподобных, систем. В следующем разделе на конкретном примере мы покажем, что эта роль еще более возрастает при учете резонансных процессов в плазме.

3. Аномальная диффузия частиц в условиях авторезонанса

Рассмотрим динамику заряженной частицы во внешнем магнитном поле, которое имеет постоянную составляющую H_0, направленную вдоль оси z, и флуктуирующую компоненту $\tilde{H}(t)$, также направленную вдоль оси z. Пусть кроме магнитного поля имеется поле внешней плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z. В этом случае поведение заряженной частицы характеризуется известным интегралом движения (см., например, [9, 10])

$$\frac{v_z}{c}\gamma = \varkappa\gamma + \text{const}. \tag{14}$$

Здесь v_z, γ — соответственно проекция скорости частицы на ось z и ее релятивистский фактор; $\varkappa = (kc)/\omega$ (ω, k — соответственно частота и волновой вектор волны). Нас будет интересовать случай эффективного взаимодействия частицы с полем, которое происходит вблизи одного из резонансных условий в постоянном поле H_0,

$$R_{n0} \equiv kv_{z0} + \frac{n\omega_{H_0}}{\gamma} - 1 = 0 \tag{15}$$

(R_{n0} обращается в нуль в случае точного резонанса). В (15) n — номер резонанса, ω_{H_0} — циклотронная частота в поле H_0 (здесь и далее поле $\tilde{H}_1$ считаем малой поправкой). Подчеркнем, что если $\varkappa \to 1$, а const $\to -n\,(\omega_{H_0}/\omega)$, то интеграл движения совпадает с условием циклотронного резонанса (случай авторезонанса). При перекрытии резонансов развивается динамический хаос, возникает диффузия частиц в пространстве энергии u и возможно неограниченное ускорение заряженных частиц. Однако темп ускорения не слишком высок, а в фазовом пространстве всегда имеются острова устойчивости, попадая в которые, частицы долго в них остаются. Наличие флуктуаций внешнего магнитного поля $\tilde{\omega}_H$ приводит к диффузии частиц, которая будет определяющей в островах устойчивости и в изолированных резонансах, когда динамический хаос не проявляется. В дальнейшем мы ограничимся одним изолированным резонансом и будем считать изменение энергии частицы $\tilde{\gamma}$ под воздействием волны и флуктуирующего поля слабым ($\tilde{\gamma} \ll \gamma_0$, где γ_0 — начальный релятивистский фактор). Тогда, ограничившись линейным по $\tilde{\gamma}$ приближением и используя уравнения движения частицы для этого случая, получим

$$\frac{d\tilde{\gamma}_n}{d\tau} = \frac{1}{\gamma_0} E_0 W_n \cos\theta_n, \quad \frac{d\theta_n}{d\tau} = \frac{\partial R_{n0}}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=\gamma_0} \tilde{\gamma}_n + \frac{n\tilde{\omega}_H}{\gamma_0}, \quad \theta_n \equiv kz - n\theta - \tau. \tag{16}$$

В (16) θ — угол, образуемый импульсом частицы с осью x; $E_0 = (eE_0)/(mC\omega)$ (e — заряд частицы, E_0 — амплитуда электрического вектора напряженности волны); $\tau = \omega t$:

$$W_n \equiv \alpha_x p_\perp \frac{n}{\mu} J_n(\mu) - \alpha_y p_\perp J_n'(\mu);$$

α_x, α_y — проекции вектора поляризации соответственно на оси x и y; $p_\perp$ — проекция импульса частицы, перпендикулярная оси z; $\mu \equiv \rho_\perp/\omega_{H_0}$; J_n — функция Бесселя.

Заметим, что в условиях, когда $\varkappa \to 1$, а $v_z \to c$, можно пренебречь изменением $p_\perp$. Уравнения (16) описывают движение математического маятника, на фазу которого действует внешняя флуктуационная сила $\sim \tilde{\omega}_H$. Отбросив пока флуктуационный член, исследуем структуру нелинейного резонанса. Из уравнений (16) вытекает следующее значение ширины изолированного нелинейного резонанса

$$\Delta \frac{d\theta_n}{d\tau} = 4\sqrt{\frac{\partial R_{n0}}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma_0} \frac{E_0 W_n}{\gamma_0}}. \tag{17}$$

Нас прежде всего интересует структура резонансов в энергетическом пространстве. Из уравнений (16), используя (17), находим следующее значение ширины нелинейного резонанса в энергетических единицах:

$$\Delta\tilde{\gamma}_n = 4\sqrt{E_0 W_n/\gamma_0 \frac{\partial R_n}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma_0}}. \tag{18}$$

Отметим одну важную особенность формулы (18) — с уменьшением производной от резонанса по энергии $\partial R_{n0}/\partial\gamma\,|_{\gamma_0}$ ширина нелинейного резонанса растет. Стремление производной к нулю означает, что резонанс при взаимодействии частицы с волной сохраняется, т. е. резонансное соотношение является одним из интегралов движения. Нетрадно видеть, что при $\partial R/\partial\gamma \to 0$ возникает отмеченный выше авторезонанс. Можно также показать, что одновременно с уширением отдельного резонанса в случае, близком к авторезонансу, соседние резонансы «разбегаются», т. е. это случай, противоположный динамическому хаосу, и поэтому учет флуктуаций здесь особенно важен.

Определим теперь особенности движения заряженной частицы под действием флуктуаций внешнего магнитного поля. Для этого достаточно рассмотреть линеаризованную систему уравнений (16)

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -B\theta, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \alpha y + f, \tag{19}$$

где $B \equiv E_0 W_n/\gamma_0$, $\theta = \theta_n - n/2$, $\alpha \equiv \partial R/\partial\gamma\,|_{\gamma_0}$, $f \equiv n\tilde{\omega}_n/\gamma_0$, $\gamma \equiv \tilde{\gamma}$.

Будем считать, что $\langle f\rangle = 0$, $\langle f(\tau)\, f(\tau')\rangle = 2D\delta(\tau-\tau')$. Тогда из (19) аналогично предыдущим разделам легко получим

$$\frac{d}{d\tau}\langle\gamma\rangle = -B\langle\theta\rangle, \quad \frac{d}{d\tau}\langle\theta\rangle = \alpha\langle\gamma\rangle, \tag{20а}$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle\gamma^2\rangle = -2B\langle\gamma\theta\rangle, \quad \frac{d}{d\tau}\langle\theta\gamma\rangle = -B\langle\theta^2\rangle + \alpha\langle\gamma^2\rangle,$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle\theta^2\rangle = 2\alpha\langle\gamma\theta\rangle + 2D. \tag{20б}$$

Из этих уравнений находим

$$\langle\gamma^2\rangle = \frac{E_0 W_n D}{2\gamma_0 \frac{\partial R}{\partial\gamma}}\tau. \tag{21}$$

Таким образом, хотя ширина резонанса при $(dR)/(d\gamma) \to 0$ аномально растет, диффузия заряженной частицы внутри резонанса растет еще быстрее. Еще более сильное влияние флуктуаций возникает при диффузии резонанса, т. е. когда частица диффундирует вместе с резонансом. Система (16) описывает «блуждающий» резонанс с центром $\tilde{\gamma} = -(n\,\omega_H/\gamma_0)/(\partial R/\partial\gamma)$. Отсюда находим следующее выражение для локального коэффициента диффузии:

$$\langle\tilde{\gamma}^2\rangle = 2D_л\tau, \quad D_л = \frac{n^2 D}{\gamma_0^2\left(\frac{\partial R}{\partial\gamma}\right)^2}. \tag{22}$$

Итак, при авторезонансе флуктуационная диффузия может заметно превышать обычную квазилинейную диффузию.

Отметим, что роль флуктуаций параметров волны (амплитуды или ее фазы) также может быть определена из системы (19). Из нее, в частности, находим следующее выражение для второго момента:

$$\langle\gamma^2\rangle \sim \exp\left[\sqrt[3]{2B^2 D}\left(\frac{\partial R_n}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma_0}\right)^{2/3}\tau\right]. \tag{23}$$

Из (23) видно, что влияние флуктуаций параметров волны становится определяющей вдали от условий авторезонанса.

Список литературы

[1] *Ситенко А. Г.* Флуктуация и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев: Наукова думка. 1977.

[2] *Барц Б. И., Лапидус И. И., Моисеев С. С.* Препринт ИКИ АН СССР. № 1375. М., 1988.

[3] *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
[4] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1985.
[5] *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
[6] *Молчанов С. А., Рузматкин А. А., Соколов Д. Д.* // УФН. 1985. Т. 145. № 4. С. 593—628.
[7] *Моисеев С. С., Пунгин В. Г., Сагдеев Р. З.* и др. // Тез. докл. II Всесоюз. съезда океанологов. Вып. 2. Севастополь, 1982. С. 63—64.
[8] *Моисеев С. С., Сузов И. В., Эткин В. С.* Препринт ИКИ АН СССР. № 905. М., 1984.
[9] *Давыдовский В. Я.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. Вып. 3. С. 886—888.
[10] *Коломянский А. А., Лебедев А. К.* // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 6. С. 1259—1261.

Институт космических исследований АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
4 мая 1989 г.
В окончательной редакции
17 июля 1990 г.